

Phạm Văn Tuấn (Chủ biên)  
Đỗ Việt Cường, Võ Thị Như Quỳnh

(cùng với sự hỗ trợ về latex của Võ Thanh Tùng, Đàm Thu Hiền,  
Trần Quang Huy, Nguyễn Thị Phương Mai, Nguyễn Đức Ngà, Trần Thu Trang)

Bài tập

# Đại Số Tuyến Tính I



VIASM  
VIỆN NGHIÊN CỨU CAO CẤP VỀ  
TOÁN



# Lời nói đầu

Cuốn sách bài tập đại số tuyến tính I này trình bày hệ thống bài tập cần thiết khi các em học nhập môn về đại số tuyến tính. Đại số tuyến tính được trình bày bắt đầu từ hệ phương trình tuyến tính, ma trận và định thức. Đây là sự nối tiếp tự nhiên của hệ phương trình tuyến tính với 2 hoặc 3 ẩn, của ma trận và định thức cỡ  $2 \times 2$  đã được học trong chương trình toán phổ thông. Sau đó, cuốn sách sẽ trình bày các bài tập về không gian véc tơ và ánh xạ tuyến tính tổng quát, các khái niệm quan trọng của ma trận như giá trị riêng, véc tơ riêng. Ma trận đóng vai trò trung tâm trong cách tiếp cận từ cụ thể đến trừu tượng này.

Các bài tập thực hành tính toán với các con số cụ thể ở đây đều được lựa chọn để các em có thể tính toán hầu như không cần sử dụng đến máy tính bỏ túi. Chúng tôi nhấn mạnh đến việc hiểu tính toán, còn kĩ năng tính toán chỉ luyện tập ở mức độ vừa phải, nhằm mục đích hiểu lí thuyết, hiểu thuật toán. Trong thực tế, khi các em gặp các hệ phương trình với nhiều phương trình, nhiều ẩn, gặp các ma trận cỡ lớn, các em có thể tính toán một cách dễ dàng sử dụng các hệ đại số máy tính có sẵn. Như vậy, điểm mấu chốt ở đây là chúng ta hiểu tính toán, hiểu cách vận hành của các thuật toán.

Mỗi khi có thể, chúng tôi đều nhấn mạnh khía cạnh hình học của đại số tuyến tính, đặc biệt là các phép biến đổi hình học quen thuộc trong mặt phẳng Euclid  $\mathbb{R}^2$  và không gian Euclid  $\mathbb{R}^3$ .

Cuốn sách gồm có 7 chương. Chương 1 trình bày về hệ phương trình tuyến tính và ma trận. Chương 2 trình bày về định thức của ma trận. Chương 3 trình bày về không gian véc tơ  $\mathbb{R}^n$ . Không gian véc tơ tổng quát được trình bày ở chương 4. Tập nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất là một không gian véc tơ. Khái niệm số chiều và cơ sở là quan trọng nhất trong lí thuyết không gian véc tơ. Chương 5 trình bày về biến

đôi ma trận và phiên bản tổng quát của nó là ánh xạ tuyến tính. Chương 6 trình bày về véc tơ riêng, giá trị riêng của ma trận, và bài toán chéo hóa ma trận. Cuối cùng, chương 7 trình bày về không gian véc tơ được trang bị tích vô hướng, trong đó, ta có thể định nghĩa các khái niệm hình học như khoảng cách, góc, vuông góc. Ứng dụng được trình bày ở chương 7 là nghiệm bình phương tối thiểu của một hệ phương trình tuyến tính.

Về các tác giả: Hệ thống lý thuyết và bài tập được chuẩn bị bởi TS Phạm Văn Tuấn. TS Đỗ Việt Cường và TS Võ Thị Như Quỳnh soạn thảo một phần kiến thức chuẩn bị trong cuốn sách. Định dạng latex của cuốn sách, và việc sử dụng Lyx để soạn thảo cuốn sách này được hỗ trợ bởi TS Võ Thanh Tùng. Các bạn Đàm Thu Hiền, Trần Quang Huy, Nguyễn Thị Phương Mai, Nguyễn Đức Ngà và Trần Thu Trang đã hỗ trợ các tác giả soạn thảo latex từ những bản thảo viết tay.

Viện nghiên cứu cao cấp về toán (VIASM) đã hỗ trợ kinh phí cho dự án sách này. Chúng tôi hi vọng cuốn sách bài tập này sẽ góp phần giúp các bạn sinh viên học tốt môn học đại số tuyến tính.

# Mục lục

|          |                                                            |            |
|----------|------------------------------------------------------------|------------|
| <b>1</b> | <b>Hệ phương trình và Ma trận</b>                          | <b>1</b>   |
| 1.1      | Hệ phương trình tuyến tính . . . . .                       | 2          |
| 1.2      | Phương pháp khử Gauss . . . . .                            | 16         |
| 1.3      | Ma trận và Phép toán ma trận . . . . .                     | 40         |
| 1.4      | Nghịch đảo của ma trận . . . . .                           | 63         |
| <b>2</b> | <b>Định thức</b>                                           | <b>91</b>  |
| 2.1      | Khai triển Laplace của định thức . . . . .                 | 91         |
| 2.2      | Định thức và phép biến đổi sơ cấp . . . . .                | 105        |
| 2.3      | Ứng dụng của định thức . . . . .                           | 119        |
| <b>3</b> | <b>Không Gian Vectơ Hình Học <math>\mathbb{R}^n</math></b> | <b>143</b> |
| 3.1      | Không gian vectơ $\mathbb{R}^n$ . . . . .                  | 143        |
| 3.2      | Tích vô hướng Euclid . . . . .                             | 148        |
| <b>4</b> | <b>Không Gian Vectơ Tổng Quát</b>                          | <b>151</b> |
| 4.1      | Không gian vectơ tổng quát . . . . .                       | 151        |
| 4.2      | Không gian vectơ con . . . . .                             | 165        |
| 4.3      | Hệ sinh . . . . .                                          | 175        |
| 4.4      | Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính . . . . .       | 186        |
| 4.5      | Tọa độ, cơ sở . . . . .                                    | 197        |

|          |                                                          |            |
|----------|----------------------------------------------------------|------------|
| 4.6      | Số chiều; Ma trận chuyển cơ sở . . . . .                 | 208        |
| 4.7      | Không gian hàng, cột . . . . .                           | 223        |
| <b>5</b> | <b>Ánh Xạ Tuyến Tính</b>                                 | <b>233</b> |
| 5.1      | Ánh xạ tuyến tính . . . . .                              | 233        |
| 5.2      | Hợp thành của ánh xạ tuyến tính; Đẳng cấu tuyến tính . . | 244        |
| 5.3      | Ma trận của ánh xạ tuyến tính . . . . .                  | 246        |
| <b>6</b> | <b>Giá trị riêng và vectơ riêng</b>                      | <b>251</b> |
| 6.1      | Giá trị riêng và vectơ riêng . . . . .                   | 251        |
| 6.2      | Chéo hóa ma trận . . . . .                               | 274        |
| <b>7</b> | <b>Không gian có tích vô hướng</b>                       | <b>295</b> |
| 7.1      | Tích vô hướng . . . . .                                  | 295        |
| 7.2      | Trực giao hóa Gram-Schmidt; Phân tích QR . . . . .       | 318        |
| 7.3      | Ma trận trực giao; Chéo hóa trực giao . . . . .          | 339        |
| 7.4      | Dạng toàn phương . . . . .                               | 357        |
|          | <b>Hướng dẫn giải</b>                                    | <b>365</b> |



# Hệ phương trình tuyến tính và Ma trận

Các phương trình tuyến tính 1, 2 hoặc 3 ẩn đã được học trong chương trình toán học bậc trung học phổ thông. Một ví dụ đơn giản về hệ phương trình tuyến tính là

$$\begin{array}{rcl} x & + & 3y = 1 \\ 2x & - & y = -5 \end{array}$$

Bảng số hình chữ nhật sau ghi lại các thông tin về các hệ số của các phương trình trong hệ phương trình tuyến tính trên

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Bảng này được gọi là ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính.

Chương đầu tiên này của đại số tuyến tính trình bày lý thuyết tổng quát về các hệ phương trình tuyến tính với số ẩn và số phương trình hữu hạn bất kỳ, và về các ma trận. Kỹ thuật giải hệ phương trình tuyến tính sẽ được sử dụng xuyên suốt môn học đại số tuyến tính.

## 1.1 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Các phương trình tuyến tính xuất hiện tự nhiên trong hình học, để mô tả các đường thẳng và mặt phẳng trong hệ trục tọa độ.

- ▷ Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc  $xy$ , phương trình của một đường thẳng là

$$ax + by = c$$

trong đó các hệ số  $a, b$  không đồng thời bằng không.

- ▷ Trong không gian ba chiều với hệ tọa độ vuông góc  $xyz$ , phương trình của một mặt phẳng là

$$ax + by + cz = d$$

trong đó các hệ số  $a, b, c$  không đồng thời bằng không.

**ĐỊNH NGHĨA 1.1.1** (Phương trình tuyến tính; Phương trình thuần nhất). Một **phương trình tuyến tính** đối với  $n$  ẩn  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là một phương trình có dạng

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

trong đó  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và  $b$  là các hằng số.

Khi  $b = 0$ , phương trình tuyến tính

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$$

được gọi là **phương trình thuần nhất**.

Khi  $n = 1, 2$  hoặc  $3$ , ta thường ký hiệu các ẩn không có chỉ số, và viết các phương trình tuyến tính là

▷  $a_1x = b,$

▷  $a_1x + a_2y = b,$

▷  $a_1x + a_2y + a_3z = b.$

**VÍ DỤ 1.1.2.** Trong các phương trình sau, phương trình nào là tuyến tính đối với các ẩn  $x_1, x_2$  và  $x_3$ ?

$$(a) \quad x_1 - 5x_1 - \sqrt{2}x_3 = 1,$$

$$(b) \quad x_1 + 3x_2 + x_1x_2 = 2$$

**GIẢI.** (a) Phương trình đã cho là một phương trình tuyến tính.

(b) Phương trình đã cho không là một phương trình tuyến tính vì nó chứa số hạng  $x_1x_2$ .  $\square$

## BÀI TẬP

**1.1** [hint] Xác định các phương trình tuyến tính trong các phương trình sau.

$$(a) \quad \frac{1}{2}x - y + 3z = -1$$

$$(b) \quad x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$$

$$(c) \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

$$(d) \quad x + 3y^2 = 1$$

$$(e) \quad \sin x + y = -2$$

$$(f) \quad 3x + 2y - xy = 0$$

**1.2** [hint] Trong các phương trình sau, phương trình nào là tuyến tính đối với các ẩn  $x_1, x_2$  và  $x_3$ ?

$$(a) \quad x_1 = 7x_2 + 3x_3 - 5,$$

$$(b) \quad \pi x_1 - \sqrt{2}x_2 = 7,$$

$$(c) \quad \cos\left(\frac{1}{7}\right)x_1 - 4x_2 = \ln 3,$$

$$(d) \quad \frac{\pi}{3} \cos x_1 + 5x_2 = 0.$$

## HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

**ĐỊNH NGHĨA 1.1.3 (Hệ phương trình tuyến tính).** Một hệ phương trình được gọi là **hệ phương trình tuyến tính** nếu các phương trình của hệ này đều là các phương trình tuyến tính. Dạng tổng quát của một hệ phương trình tuyến tính bao gồm  $m$  phương trình

đối với  $n$  ẩn  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Nếu không có gì gây hiểu nhầm, trong hầu hết các trường hợp, ta sẽ không sử dụng dấu ngoặc { khi viết hệ phương trình tuyến tính.

**VÍ DỤ 1.1.4.** Hai ví dụ đơn giản về hệ phương trình tuyến tính là

$$\begin{array}{rcl} 5x & + & y = 3 \\ 2x & - & y = 4 \end{array}$$

và

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 & - & x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 & + & x_2 + 9x_3 = -4 \end{array}$$

Mặc dù không bắt buộc, nhưng khi viết hệ phương trình tuyến tính, ta thường viết các ẩn theo một thứ tự cố định và thẳng cột như bên trên. Cách viết này rất hữu ích khi ta thực hiện các phép biến đổi đại số trên các phương trình trong hệ.

Theo định nghĩa, một hệ phương trình tuyến tính có thể có số ẩn và số phương trình bất kỳ. Trong các ứng dụng của đại số tuyến tính và các bài toán thực tế trong kinh tế, kỹ thuật, ..., ta có thể gặp các hệ phương trình tuyến tính có hàng trăm, thậm chí hàng nghìn ẩn hoặc nhiều hơn nữa. Đại số tuyến tính trình bày phương pháp tổng quát và có hệ thống để giải các hệ phương trình tuyến tính.

Trong các ví dụ minh họa phương pháp bên dưới, ta thường chỉ sử dụng các hệ phương trình có khá ít ẩn và ít phương trình. Hơn nữa, các hệ số thường được lựa chọn đơn giản và cẩn thận để việc giải hệ phương trình có thể tiến hành mà không cần hoặc cần rất hạn chế máy tính bỏ túi.

**ĐỊNH NGHĨA 1.1.5 (Nghiệm).** Một *nghiệm* của một hệ phương trình tuyến tính đối với  $n$  ẩn  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là một dãy  $n$  số thực  $s_1, s_2, \dots, s_n$  sao cho khi ta thế

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$$

vào hệ phương trình thì ta được các đẳng thức đúng. Ta thường ký hiệu một nghiệm

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$$

của hệ phương trình tuyến tính đơn giản là  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ .

Bài toán giải hệ phương trình tuyến tính là bài toán tìm tất cả các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính.

Trong một số trường hợp, ta chỉ muốn biết một hệ phương trình tuyến tính có nghiệm hay không, hoặc cụ thể hơn là có bao nhiêu nghiệm.

## HÌNH HỌC CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH 2 HOẶC 3 ẨN

Xét hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2. \end{aligned} \tag{1}$$

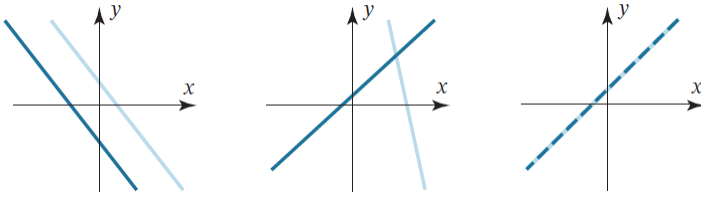
Giả sử hai hệ số  $a_{11}, a_{12}$  không đồng thời bằng không, hai hệ số  $a_{21}, a_{22}$  không đồng thời bằng không. Khi đó mỗi phương trình của hệ (1) xác định một đường thẳng trong mặt phẳng tọa độ  $xy$ . Các tọa độ của giao điểm của hai đường thẳng này chính là các nghiệm của hệ phương trình (1). Từ vị trí tương đối của hai đường thẳng trong mặt phẳng, ta có các trường hợp sau đây.

- ▷ Hai đường thẳng song song. Khi đó, hệ phương trình (1) vô nghiệm.
- ▷ Hai đường thẳng cắt nhau. Khi đó, hệ phương trình (1) có nghiệm duy nhất.
- ▷ Hai đường thẳng trùng nhau. Khi đó, hệ phương trình (1) có vô số nghiệm

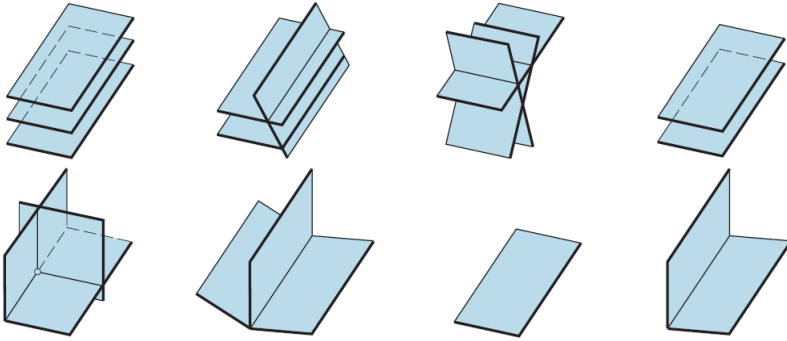
Về số lượng nghiệm, ta thấy rằng hệ phương trình (1) vô nghiệm, có đúng 1 nghiệm, hoặc có vô số nghiệm.

Tiếp theo, xét hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3. \end{aligned} \tag{2}$$



HÌNH 1.1 – Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong mặt phẳng.



HÌNH 1.2 – Vị trí tương đối của ba mặt phẳng trong không gian.

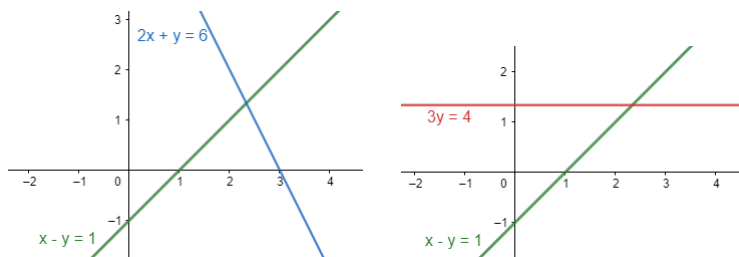
Với  $i = 1, 2, 3$ , giả sử ba hệ số  $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}$  không đồng thời bằng không. Khi đó, mỗi phương trình của hệ phương trình (2) xác định một mặt phẳng trong không gian tọa độ  $xyz$ . Các tọa độ của giao điểm của ba mặt phẳng này chính là các nghiệm của hệ phương trình (2). Từ vị trí tương đối của ba mặt phẳng trong không gian, ta thấy rằng hệ phương trình tuyến tính (2) có thể vô nghiệm, có nghiệm duy nhất, có một đường thẳng nghiệm, hoặc có một mặt phẳng nghiệm.

### MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Từ chương trình toán học THPT, ta biết rằng hệ phương trình tuyến tính có thể được giải bằng cách khử dần các ẩn, sử dụng hoặc phương pháp thế, hoặc phương pháp cộng đại số. Dưới đây, để thống nhất, chúng ta sẽ trình bày cách khử ẩn sử dụng phương pháp cộng đại số.

**Ví dụ 1.1.6.** Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x + y &= 6. \end{aligned} \tag{3}$$



HÌNH 1.3 – Các đường thẳng tương ứng với các hệ phương trình (3) và (4)

**GIẢI.** Để khử ẩn  $x$  ở phương trình thứ hai của hệ phương trình, ta lấy  $(-2)$  lần phương trình một cộng vào phương trình hai. Ta nhận được hệ phương trình tương đương

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 3y &= 4. \end{aligned} \quad (4)$$

Từ phương trình thứ hai của hệ này, ta tính được  $y$ , rồi thế giá trị này của  $y$  vào phương trình đầu tiên, ta tìm được  $x$ :

$$x = \frac{7}{3}, \quad y = \frac{4}{3}.$$

Vậy, hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $(x, y) = \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$ . □

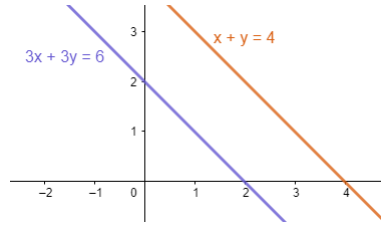
**VÍ DỤ 1.1.7.** Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 3x + 3y &= 6. \end{aligned} \quad (5)$$

**GIẢI.** Để khử ẩn  $x$  ở phương trình thứ hai của hệ phương trình trên, ta lấy  $(-3)$  lần phương trình thứ nhất cộng vào phương trình thứ hai. Ta nhận được hệ phương trình tương đương

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 0y &= -6. \end{aligned} \quad (6)$$

Hệ phương trình này vô nghiệm vì phương trình thứ hai của nó vô nghiệm. Do đó, hệ phương trình đã cho vô nghiệm. □



HÌNH 1.4 – Các đường thẳng tương ứng với hệ phương trình (5)

**VÍ DỤ 1.1.8.** Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 16x - 8y &= 4. \end{aligned} \tag{7}$$

**CHỨNG MINH.** Để khử ẩn  $x$  ở phương trình thứ hai của hệ phương trình trên, ta lấy  $(-4)$  lần phương trình thứ nhất cộng vào phương trình thứ hai. Ta nhận được hệ phương trình tương đương

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 0y &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Vì phương trình thứ hai hiển nhiên đúng, nên ta có thể lược bỏ nó khỏi hệ phương trình, và nhận được phương trình duy nhất

$$4x - 2y = 1.$$

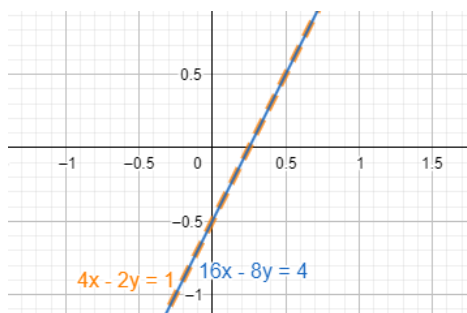
Ta cho  $y$  một giá trị  $t$  bất kỳ, rồi tính  $x$  theo  $t$  và nhận được nghiệm

$$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t, \quad y = t.$$

Đây là một mô tả tham số cho tất cả các nghiệm của hệ phương trình đã cho. Với mỗi giá trị cụ thể của  $t$ , ta thu được một nghiệm của hệ phương trình đã cho. Hệ phương trình có vô số nghiệm.  $\square$

Khi giải hệ phương trình, ta muốn xác định tường minh nghiệm nếu nghiệm là duy nhất, và cho một mô tả tham số của nghiệm, nếu hệ có vô số nghiệm. Lưu ý rằng mô tả tham số là không duy nhất. Ví dụ, trong ví dụ trên, ta có thể cho  $x$  giá trị  $s$  bất kỳ, rồi tính  $y$  theo  $s$ , và nhận được mô tả tham số của nghiệm

$$x = s, \quad y = -\frac{1}{2} + 2s.$$



HÌNH 1.5 – Các đường thẳng tương ứng với hệ phương trình (7)

Ta còn có thể tạo ra các mô tả tham số khác nữa của nghiệm của hệ phương trình đã cho. Không dễ dàng để biết được hai mô tả tham số là tương đương với nhau, tức là chúng là các cách tham số hóa khác nhau tập nghiệm của cùng một hệ phương trình tuyến tính.

**VÍ DỤ 1.1.9.** Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 5 \\ 2x - 2y + 4z &= 10 \\ 3x - 3y + 6z &= 15. \end{aligned} \tag{9}$$

**GIẢI.** Tương tự như các ví dụ trên, ta sử dụng  $x$  ở phương trình đầu tiên để khử  $x$  ở các phương trình còn lại. Vì hai phương trình thứ hai và thứ ba của hệ phương trình tỉ lệ với phương trình đầu tiên, nên hệ phương trình mới nhận được là

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 5 \\ 0z &= 0 \\ 0z &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Vì hai phương trình thứ hai và thứ ba là hiển nhiên, ta ta có thể lược bỏ chúng khỏi hệ phương trình, và nhận được phương trình duy nhất

$$x - y + 2z = 5.$$

Cho  $y = t$  và  $z = s$  với  $t, s$  bất kỳ, rồi tính  $x$  theo  $t, s$ , ta được mô tả tham số của nghiệm của hệ phương trình đã cho

$$x = t - 2s + 5, \quad y = t, \quad z = s.$$



## MA TRẬN HỆ SỐ MỞ RỘNG VÀ PHÉP TOÁN SƠ CẤP TRÊN HÀNG

**ĐỊNH NGHĨA 1.1.10 (Ma trận hệ số mở rộng).** *Ma trận hệ số mở rộng* của hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

được định nghĩa là bảng số hình chữ nhật gồm  $m$  hàng và  $n + 1$  cột

$$\left[ \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

Trong ma trận hệ số mở rộng, phần tử ở vị trí  $(i, j)$  với  $j \leq n$  là hệ số của ẩn  $x_j$  của phương trình thứ  $i$  trong hệ phương trình tuyến tính đã cho. Cột cuối cùng của ma trận hệ số mở rộng ra dãy hệ số tự do của các phương trình trong hệ.

**VÍ DỤ 1.1.11.** Xác định ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{array}{ccccccc} 6x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ & & 5x_2 & - & x_3 & = & 1. \end{array}$$

**GIẢI.** Ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình đã cho là

$$\left[ \begin{array}{cccc} 6 & -1 & 1 & 4 \\ & 5 & -1 & 1 \end{array} \right].$$

□

Khi ta đã cố định thứ tự của các ẩn của hệ phương trình tuyến tính, ma trận hệ số mở rộng của một hệ phương trình tuyến tính hoàn toàn xác định hệ phương trình tuyến tính này. Các ẩn  $x_1, x_2, \dots, x_n$  có vai trò như nhau trong hệ phương trình tuyến tính. Khi chúng ta sắp xếp lại các ẩn, các cột của ma trận hệ số mở rộng cũng được sắp xếp lại một cách tương ứng.

Khi ta đổi chỗ hai phương trình trong hệ phương trình tuyến tính, hai hàng tương ứng của ma trận hệ số mở rộng sẽ đổi chỗ cho nhau. Việc đổi chỗ này không làm thay đổi tập nghiệm của hệ phương trình, nhưng nó làm biến đổi ma trận hệ số mở rộng.

Việc đồng nhất mỗi hệ phương trình tuyến tính với ma trận hệ số mở rộng của nó được thể hiện rõ khi các sử dụng máy tính bỏ túi để giải hệ phương trình tuyến tính. Máy tính bỏ túi hiểu hệ phương trình tuyến tính thông qua ma trận hệ số mở rộng của nó, mà không hề quan tâm đến cách thức kí hiệu cho các ẩn. Cách kí hiệu các ẩn này không đóng vai trò quan trọng, chỉ có thứ tự của chúng là có ý nghĩa.

Kỹ thuật được sử dụng để giải các hệ phương trình nói chung là thực hiện các phép biến đổi tương đương trên hệ phương trình, tức là các phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm, mà cấu trúc của các hệ phương trình ngày càng đơn giản hơn. Đối với hệ phương trình tuyến tính, ta thường khử ẩn ở các phương trình, để các phương trình trong hệ ngày càng chứa ít ẩn hơn. Để khử ẩn, ta có thể sử dụng phương pháp thế, hoặc phương pháp cộng đại số. Như đã nói bên trên, ta sẽ sử dụng phương pháp cộng đại số.

Các phép toán cơ bản để tiến hành cộng đại số trên các phương trình của hệ phương trình tuyến tính là

1. Nhân một phương trình với một vô hướng khác không.
2. Đổi chỗ hai phương trình.
3. Cộng một bội của một phương trình vào một phương trình khác.

Nếu ta đồng nhất hệ phương trình tuyến tính với ma trận hệ số mở rộng của nó thì các phép biến đổi trên các phương trình của hệ phương trình tuyến tính trở thành các phép biến đổi trên các hàng của ma trận hệ số mở rộng.

**ĐỊNH NGHĨA 1.1.12 (Phép biến đổi sơ cấp trên hàng).** Các *phép biến đổi sơ cấp trên hàng* của ma trận

1. Nhân một hàng với một vô hướng khác không.
2. Đổi chỗ hai hàng.
3. Cộng một bội của một hàng vào một hàng khác.

Ta thường ký hiệu các phép biến đổi sơ cấp trên dưới dạng ký hiệu như sau.

1.  $aH_i \rightarrow H_i$ , tức là nhân hàng thứ  $i$  với vô hướng  $a$ , điều kiện:

$a \neq 0$ .

2.  $H_i \leftrightarrow H_j$ , tức là đổi chỗ hàng thứ  $i$  và hàng thứ  $j$ , điều kiện:  $i \neq j$ .
3.  $aH_i + H_j \rightarrow H_j$ , tức là cộng  $a$  lần hàng thứ  $i$  và hàng thứ  $j$ , điều kiện:  $i \neq j$ .

Trong nhiều trường hợp, để thuận tiện, ta thường tổ hợp hai phép biến đổi sơ cấp thứ nhất và thứ ba thành phép biến đổi

▷  $aH_i + bH_j \rightarrow H_j$ , tức là cộng  $a$  lần hàng thứ  $i$  với  $b$  lần hàng thứ  $j$  để được hàng  $j$  mới, điều kiện:  $i \neq j$  và  $b \neq 0$ .

Ví dụ sau đây minh họa cách sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng của ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính.

**Ví dụ 1.1.13.** Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{array}{rrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 6y & - & 5z & = & 0 \end{array}$$

bằng cách thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên hàng của ma trận hệ số mở rộng.

**GIẢI.** Trong ví dụ này, và sẽ viết đồng thời ma trận hệ số mở rộng ở bên trái và hệ phương trình tuyến tính tương ứng ở bên phải.

Hệ phương trình tuyến tính đã cho và ma trận hệ số mở rộng của nó là

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right] \quad \begin{array}{rrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 6y & - & 5z & = & 0 \end{array}$$

Ta sử dụng ẩn  $x$  ở phương trình đầu tiên để khử ẩn  $x$  ở các phương trình thứ hai và thứ ba. Cụ thể, cộng  $(-2)$  lần hàng thứ nhất vào hàng thứ hai, và cộng  $(-3)$  lần hàng thứ nhất vào hàng thứ ba.

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array} \right] \quad \begin{array}{rrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & 2y & - & 7z & = & -17 \\ & & 3y & - & 11z & = & -27 \end{array}$$

Tiếp theo, sử dụng ẩn  $y$  ở phương trình thứ hai để khử ẩn  $y$  ở phương trình thứ ba. Cụ thể, cộng 3 lần hàng hai với  $(-2)$  lần hàng thứ ba để được

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{rclcl} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & 2y & - & 7z & = & -17 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}$$

Từ phương trình thứ ba, ta tìm được  $z$ . Thế  $z$  vào phương trình thứ hai để tìm  $y$ , rồi thế  $y$  và  $z$  vào phương trình đầu tiên để tìm  $x$ , ta nhận được

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3.$$

Quá trình thế giá trị ngược từ dưới lên trên này có thể được thể hiện thông qua việc tiếp tục biến đổi trên ma trận hệ số mở rộng như sau. Ta sử dụng ẩn  $z$  ở phương trình thứ ba để khử ẩn  $z$  ở các phương trình thứ nhất và thứ hai. Cụ thể, cộng 7 lần hàng thứ 3 vào hàng thứ hai và cộng  $(-2)$  lần hàng thứ ba vào hàng đầu tiên.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{rclcl} x & + & y & & = & 3 \\ & & 2y & & = & 4 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}$$

Tiếp theo, ta sử dụng ẩn  $y$  ở phương trình thứ hai để khử ẩn  $y$  ở phương trình đầu tiên. Cụ thể, cộng  $-\frac{1}{2}$  lần hàng thứ hai vào hàng đầu tiên.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{rclcl} x & & & & = & 1 \\ & & 2y & & = & 4 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}$$

Cuối cùng, nhân hàng thứ hai với  $\frac{1}{2}$ , ta được

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{rclcl} x & & & & = & 1 \\ & & y & & = & 2 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3.$$



## BÀI TẬP

- 1.3** [hint] Xác định ma trận hệ số mở rộng của các hệ phương trình tuyến tính sau.

$$\begin{aligned} & 3x - 2y = 1 \\ \text{(a)} \quad & 7x + 5y = 3 \\ & x - 4y = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2x + 2z = 1 \\ \text{(b)} \quad & 3x - y + 4z = 0 \\ & 6x + y - z = 7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad & x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ & 2x_2 - x_3 = 5. \end{aligned}$$

- 1.4** [hint] Tìm hệ phương trình tuyến tính của các ẩn  $x_1, x_2, x_3, \dots$  có ma trận hệ số mở rộng như sau.

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

## BÀI TẬP TỔNG HỢP

- 1.5** [hint] Chứng minh rằng đồ thị hàm số

$$y = a + bx + cx^2$$

đi qua 3 điểm  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  khi và chỉ khi các hệ số  $a, b, c$  là một nghiệm của hệ phương trình tuyến tính tương ứng với ma trận hệ số mở rộng

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & y_3 \end{bmatrix}.$$

- 1.6** [hint] Chứng minh rằng đồ thị hàm số

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

đi qua  $m$  điểm  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$  khi và chỉ khi các hệ số  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$  là một nghiệm của hệ phương trình tuyến tính tương ứng với ma trận hệ số mở rộng

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^n & y_m \end{bmatrix}.$$

## 1.2 PHƯƠNG PHÁP KHỬ GAUSS

Mục này trình bày phương pháp khử Gauss và khử Gauss-Jordan để giải tất cả các hệ phương trình tuyến tính một cách có hệ thống.

### DẠNG BẬC THANG

Trong ví dụ cuối mục trước, chúng ta đã giải hệ phương trình tuyến tính bằng cách biến đổi ma trận hệ số mở rộng của nó về dạng

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

và nhận được nghiệm  $x = 1, y = 2, z = 3$ . Đây là một ví dụ về ma trận bậc thang rút gọn.

**ĐỊNH NGHĨA 1.2.1 (Phần tử dẫn đầu).** Nếu một hàng của ma trận có ít nhất một phần tử khác không thì **phần tử dẫn đầu** của hàng này là phần tử khác không đầu tiên, tính từ trái sang phải. Vị trí của phần tử dẫn đầu gọi là **vị trí dẫn đầu**.

Theo định nghĩa này, một hàng gồm toàn phần tử không sẽ không có phần tử dẫn đầu. Trong trường hợp ngược lại, phần tử dẫn đầu của hàng là duy nhất.

**ĐỊNH NGHĨA 1.2.2 (Ma trận bậc thang; Ma trận bậc thang rút gọn).** Một ma trận được gọi là **ma trận bậc thang** nếu nó có các tính chất sau.

1. Các phần tử dẫn đầu của mỗi hàng đều bằng 1.
2. Các hàng gồm toàn phần tử không nằm bên dưới các hàng gồm ít nhất một phần tử khác không.
3. Đối với các hàng gồm ít nhất một phần tử khác không, phần tử dẫn đầu của hàng bên dưới luôn nằm bên phải phần tử dẫn đầu của hàng bên trên.

Một ma trận bậc thang được gọi là **ma trận bậc thang rút gọn** nếu mỗi cột chứa phần tử dẫn đầu có phần tử dẫn đầu này là phần tử khác không duy nhất.

Giả sử các phần tử dẫn đầu của một ma trận  $A$  đều bằng 1 và các vị trí dẫn đầu của nó là

$$(i_1, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_3), \dots$$

Khi đó, ma trận  $A$  có dạng bậc thang khi và chỉ khi

1. Dãy  $i_1, i_2, i_3, \dots$  là dãy liên tiếp các số nguyên dương, và  $i_1 = 1$ .
2. Dãy  $j_1, j_2, j_3, \dots$  là một dãy tăng chặt, tức là  $j_1 < j_2 < j_3 < \dots$

Trong một ma trận bậc thang, ở mỗi hàng, các phần tử bên phải phần tử dẫn đầu có thể nhận giá trị bất kỳ.

**Ví dụ 1.2.3.** Các ma trận sau là các ma trận bậc thang rút gọn.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Các ma trận sau là ma trận bậc thang nhưng không phải ma trận bậc thang rút gọn.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Ví dụ 1.2.4.** Ma trận bậc thang

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

là một ma trận bậc thang rút gọn khi và chỉ khi phần tử ở vị trí  $(1, 4)$  bằng không. Ma trận này là

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Ví dụ 1.2.5.** Các ma trận sau là các ma trận bậc thang, trong đó các phần tử được kí hiệu \* nhận giá trị bất kì.

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}.$$

Các ma trận bậc thang trên là bậc thang rút gọn nếu và chỉ nếu chúng cho dạng sau

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}.$$

**Ví dụ 1.2.6.** Giả sử ma trận hệ số mở rộng của một hệ phương trình tuyến tính đối với 4 ẩn  $x_1, x_2, x_3, x_4$  đưa được về ma trận bậc thang rút gọn sau sử dụng phép biến đổi sơ cấp trên hàng

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Hãy giải hệ phương trình tuyến tính này.

**GIẢI.** Hệ phương trình tuyến tính tương ứng với ma trận bậc thang rút

gọn đã cho là

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 3 \\ x_2 & = & -1 \\ x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & 5. \end{array}$$

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình tuyến tính này. Do đó, hệ đã cho có nghiệm duy nhất

$$x_1 = 3, \ x_2 = -1, \ x_3 = 0, \ x_4 = 5.$$

□

**Ví dụ 1.2.7.** Xét hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{array}{rclclcl} 0x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ & & & & & & x_4 & = & -1 \end{array}$$

Ma trận hệ số mở rộng của hệ này là

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ma trận này có dạng bậc thang. Các cột chứa các vị trí dẫn đầu là cột 2 và cột 4. Các ẩn tương ứng, ẩn  $x_2$  và ẩn  $x_4$ , là ẩn ràng buộc. Hai ẩn còn lại, ẩn  $x_1$  và ẩn  $x_3$ , là các ẩn tự do, chúng có thể nhận các giá trị bất kỳ.

Cho  $x_1 = t$ ,  $x_3 = s$  với  $t, s \in \mathbb{R}$  bất kỳ. Khi đó

$$x_4 = -1, \ x_2 = 4s + 7.$$

Vậy các nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$x_1 = t, \ x_2 = 4s + 7, \ x_3 = s, \ x_4 = -1.$$

với  $t, s \in \mathbb{R}$  bất kỳ.

**Ví dụ 1.2.8.** Giải hệ phương trình tuyến tính đối với ba ẩn  $x, y, z$  biết rằng hệ số mở rộng của nó đưa được về ma trận bậc thang rút gọn sau sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**CHỨNG MINH.** (a) Phương trình tương ứng với hàng cuối cùng là

$$0x + 0y + 0z = 1.$$

Vì phương trình này vô nghiệm nên hệ phương trình tuyến tính đã cho vô nghiệm.

(b) Phương trình tương ứng với hàng cuối cùng là

$$0x + 0y + 0z = 0.$$

Phương trình này hiển nhiên đúng, do đó, ta có thể loại bỏ nó khỏi hệ phương trình tuyến tính tương ứng với ma trận hệ số mở rộng

$$\begin{array}{rcl} x & + & 3z = -1 \\ y & - & 4z = 2. \end{array}$$

Biến  $z$  có thể nhận giá trị  $t$  bất kỳ, thế giá trị của  $z$  vào phương trình thứ hai ta tính được  $y$  theo  $t$ , rồi thế giá trị của  $y$  và  $z$  vào phương trình đầu tiên, ta tính được  $x$  theo  $t$ :

$$x = -1 - 3t, \quad y = 2 + 4t, \quad z = t.$$

Đây là mô tả tham số của tất cả các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính đã cho. Với mỗi giá trị cụ thể của tham số ta có một nghiệm. Ví dụ, cho  $t = 0$ , ta nhận được nghiệm

$$x = -1, \quad y = 2, \quad z = 0.$$

Cho  $t = 1$ , ta nhận được nghiệm

$$x = -4, \quad y = 6, \quad z = 1.$$

(c) Từ dạng bậc thang của ma trận hệ số mở rộng, ta thấy rằng hệ phương trình tuyến tính đã cho tương đương với

$$x - 5y + z = 4.$$

Hai ẩn  $y$  và  $z$  có thể nhận giá trị bất kỳ, lần lượt là  $t$  và  $s$ . Thế giá trị của  $y$  và  $z$  vào phương trình đầu tiên, ta tính được  $x$  theo  $t, s$ :

$$x = 4 + 5t - s, \quad y = t, \quad z = s.$$

Đây là mô tả tham số cho các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính đã cho.  $\square$

## BÀI TẬP

**1.7** [hint] Trong các ma trận sau, xác định các ma trận bậc thang rút gọn, các ma trận bậc thang nhưng không bậc thang rút gọn.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

**1.8** [hint] Tìm các ma trận bậc thang.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \text{(b)} \quad B &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \text{(c)} \quad C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**1.9** [hint] Tìm điều kiện cho các số thực  $a, b$  và  $c$  để ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

là một ma trận bậc thang rút gọn.

**1.10** [hint] Xác định tất cả các ma trận bậc thang và ma trận bậc thang rút gọn cỡ  $2 \times 3$ .

**1.11** [hint] Xác định các ma trận bậc thang và bậc thang rút gọn cỡ  $3 \times 3$ .

### PHƯƠNG PHÁP KHỬ

Ta có thể viết ra một cách dễ dàng tất cả các nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính nếu ta biết được dạng bậc thang rút gọn của ma trận hệ số mở rộng của hệ.

Ví dụ sau mô tả thuật toán tường minh sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng đưa ma trận về dạng bậc thang rút gọn. Xét ma trận

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Bước 1.** Từ trái sang phải, xác định cột đầu tiên chứa ít nhất một phần tử khác không. Trong ví dụ trên, cột khác không đầu tiên chính là cột một.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

**Bước 2.** Trong cột khác không đầu tiên này, nếu phần tử ở hàng một bằng 0 thì ta có thể đổi chỗ hàng một với một hàng thích hợp của ma trận để phần tử ở hàng một trong cột này của ma trận mới khác 0.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad (H_1 \leftrightarrow H_2)$$

**Bước 3.** Nếu phần tử dẫn đầu của hàng một không phải là 1, hãy chuẩn hóa hàng này bằng cách nhân hàng một nó với một số thích hợp.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad \left(\frac{1}{2}H_1 \rightarrow H_1\right)$$

**Bước 4.** Cộng một bội thích hợp của hàng một vào các hàng bên dưới của ma trận để khử các phần tử của ma trận bên dưới số 1 dẫn đầu này.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \quad \left( -2H_1 + H_3 \rightarrow H_3 \right)$$

**Bước 5.** Lặp lại các bước trên với ma trận con của ma trận ban đầu gồm các hàng từ hàng thứ hai. Rồi lặp lại các bước trên với ma trận con của ma trận ban đầu gồm các hàng từ hàng thứ ba,... cho đến khi nào ta thu được một ma trận bậc thang.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} & \left( -\frac{1}{2}H_2 \rightarrow H_2 \right) \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} & \left( -5H_2 + H_3 \rightarrow H_3 \right) \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} & \left( 2H_3 \rightarrow H_3 \right) \end{aligned}$$

Từ dạng bậc thang này của ma trận hệ số mở rộng, ta có thể biết được số lượng nghiệm của hệ phương trình đã cho: hệ vô nghiệm, có nghiệm duy nhất, hay hệ có vô số nghiệm.

**Bước 6.** Với mỗi cột chứa phần tử dẫn đầu, cộng một bội thích hợp của mỗi hàng chứa phần tử dẫn đầu vào các hàng ở trên nó để khử phần tử bên dưới các phần tử dẫn đầu.

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} & \left( \frac{7}{2}H_3 + H_2 \rightarrow H_2 \right) \\ & \left( -6H_3 + H_1 \rightarrow H_1 \right) \\ & \left( 5H_2 + H_1 \rightarrow H_1 \right) \end{aligned}$$

Ma trận nhận được là một ma trận bậc thang rút gọn.

Thuật toán ta vừa minh họa bên trên để đưa một ma trận về dạng bậc thang rút gọn được gọi là **phương pháp khử Gauss-Jordan**. Nếu ta dừng lại ở ma trận bậc thang, thuật toán được gọi là **phương pháp khử Gauss**.

**VÍ DỤ 1.2.9.** Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & - & 2x_3 & & + & 7x_5 & = & 12 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 10x_3 & + & 6x_4 & + & 12x_5 & = & 28 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 5x_3 & + & 6x_4 & - & 5x_5 & = & -1 \end{array}$$

bằng phương pháp khử Gauss-Jordan.

**CHỨNG MINH.** Ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính đã cho là

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Trong ví dụ trên, ta đã thực hiện phương pháp khử Gauss-Jordan để đưa ma trận này về dạng bậc thang rút gọn và nhận được ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hệ phương trình tuyến tính tương ứng là

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & & + & 3x_4 & = & 7 \\ & & & & & x_3 & = & 1 \\ & & & & & & & x_5 & = & 2 \end{array}$$

Các ẩn tự do là  $x_2$  và  $x_4$ . Cho các ẩn tự do này lần lượt các tham số  $t$  và  $s$  bất kỳ, rồi giải các ẩn phụ thuộc theo ẩn tự do, ta nhận được nghiệm tổng quát của hệ phương trình tuyến tính đã cho

$$x_1 = 7 - 2t, \quad x_2 = t, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = s, \quad x_5 = 2.$$

□

Khi thực hiện phương pháp khử Gauss-Jordan hoặc khử Gauss, nếu ta tiến hành chuẩn hóa hệ số của mỗi hàng, để đưa hệ số dẫn đầu về 1 thì có thể sẽ làm phát sinh phân số một cách không thực sự cần thiết. Để tránh việc này, hãy để bước chuẩn hóa hệ số dẫn đầu ở bước cuối cùng.

**VÍ DỤ 1.2.10.** Giải hệ phương trình tuyến tính sau bằng phương pháp khử Gauss-Jordan.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & & + & 2x_5 & & = & 0 \\
 2x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 4x_5 & - & 3x_6 & = & -1 \\
 & & & & 5x_3 & - & 10x_4 & & & + & 15x_6 & = & 5 \\
 2x_1 & + & 6x_2 & & & & + & 8x_4 & + & 4x_5 & + & 18x_6 & = & 6
 \end{array} \quad (11)$$

**CHỨNG MINH.** Để giải hệ phương trình, ta khử Gauss ma trận hệ số mở rộng của nó.

$$\begin{array}{l}
 \rightarrow \left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 6 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{array} \right] \quad \left( \begin{array}{l} -2H_1 + H_2 \rightarrow H_2 \\ -2H_1 + H_4 \rightarrow H_4 \end{array} \right) \\
 \rightarrow \left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{array} \right] \quad (-H_2 \rightarrow H_2) \\
 \rightarrow \left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{array} \right] \quad \left( \begin{array}{l} -5H_2 + H_3 \rightarrow H_3 \\ -4H_2 + H_4 \rightarrow H_4 \end{array} \right) \\
 \rightarrow \left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \left( \begin{array}{l} H_3 \leftrightarrow H_4 \\ \frac{1}{2}H_3 \rightarrow H_3 \end{array} \right) \\
 \rightarrow \left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (-H_3 + H_2 \rightarrow H_2) \\
 \rightarrow \left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (2H_2 + H_1 \rightarrow H_1)
 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left( \frac{1}{3}H_3 \rightarrow H_3 \right)$$

Các ẩn tự do là  $x_2, x_4$  và  $x_5$ . Cho các ẩn tự do các giá trị tham số bất kì lần lượt bằng  $r, s$ , và  $t$ , rồi tính các ẩn phụ thuộc qua ẩn tự do, ta nhận được mô tả tham số của nghiệm của hệ phương trình đã cho

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \frac{1}{3}.$$

□

### HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

Nhắc lại rằng một hệ phương trình tuyến tính được gọi là thuần nhất nếu các hệ số tự do của nó bằng 0. Dạng tổng quát của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất bao gồm  $m$  phương trình đối với  $n$  ẩn  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất luôn có nghiệm hiển nhiên

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dots, \quad x_n = 0.$$

Nghiệm này được gọi là ***nghiệm tầm thường***. Với một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, ta muốn biết nó có nghiệm không tầm thường hay không. Câu hỏi này sẽ xuất hiện nhiều lần ở trong các chương sau.

**VÍ DỤ 1.2.11.** Sử dụng phương pháp khử Gauss–Jordan để giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & & + & 2x_5 & & = & 0 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 4x_5 & - & 3x_6 & = & 0 \\ & & & & 5x_3 & + & 10x_4 & & & & + & 15x_6 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & & & + & 8x_4 & + & 4x_5 & + & 18x_6 & = & 0 \end{array} \quad (12)$$

**CHỨNG MINH.** Để giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất này, ta sẽ khử Gauss-Jordan ma trận hệ số mở rộng của nó. Vì ma trận hệ số của phương trình này trùng với ma trận hệ số của hệ phương trình tuyến tính (11) nên từ dạng bậc thang rút gọn của ma trận hệ số mở rộng của hệ (11), ta thu được dạng bậc thang rút gọn của ma trận hệ số mở rộng của hệ (12) là

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Giống như trong ví dụ trên, các ẩn tự do là  $x_2, x_4$  và  $x_5$ . Cho các ẩn tự do các giá trị tham số bất kì lần lượt bằng  $r, s$ , và  $t$ , rồi tính các ẩn phụ thuộc qua ẩn tự do, ta nhận được mô tả tham số của nghiệm của hệ phương trình đã cho

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = 0.$$

□

**MỆNH ĐỀ 1.2.12.** Cho một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất đối với  $n$  ẩn. Giả sử ma trận hệ số mở rộng của nó có  $r$  vị trí then chốt. Khi đó, hệ có  $n - r$  ẩn tự do và  $r$  ẩn phụ thuộc.

**MỆNH ĐỀ 1.2.13.** Một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có số ẩn nhiều hơn số phương trình luôn có vô số nghiệm.

Để giải hệ phương trình tuyến tính và trả lời các câu hỏi về số lượng nghiệm, trong phần lớn trường hợp, ta chỉ cần biến đổi ma trận hệ số của hệ phương trình tuyến tính về dạng bậc thang, không cần dạng bậc thang rút gọn.

**VÍ DỤ 1.2.14.** Giải hệ phương trình tuyến tính (11) sử dụng phương pháp khử Gauss.

**CHỨNG MINH.** Ta khử Gauss ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình

tuyến tính (11) và nhận được dạng bậc thang

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lưu ý rằng dạng bậc thang này đã xuất hiện trong khử Gauss-Jordan ở ví dụ 1.2.10. Từ dạng bậc thang này, ta thấy các ẩn tự do là  $x_2, x_4$  và  $x_5$ . Cho các ẩn tự do các giá trị tham số bất kì lần lượt bằng  $r, s$ , và  $t$ , rồi tính các ẩn phụ thuộc qua ẩn tự do, tính ngược từ dưới lên trên

$$x_6 = \frac{1}{3},$$

$$x_3 = 1 - 2x_3 - 3x_5 = -2s,$$

$$x_1 = -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 = -3r - 4s - 2t.$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình tuyến tính đã cho là

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \frac{1}{3}.$$

□

**Ví dụ 1.2.15.** Giả sử ma trận bên dưới là dạng bậc thang của ma trận hệ số mở rộng của một hệ phương trình tuyến tính. Hệ này có bao nhiêu nghiệm?

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**GIẢI.** (a) Hàng cuối cùng của ma trận bậc thang tương ứng với phương trình tuyến tính

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1.$$

Vì phương trình này vô nghiệm nên hệ phương trình tuyến tính đã cho vô nghiệm.

(b) Hệ phương trình đã cho có nghiệm. Hơn nữa, ẩn  $x_4$  là một ẩn tự do, có thể nhận giá trị bất kỳ. Các ẩn phụ thuộc tính được duy nhất thông qua ẩn tự do này. Do đó, hệ phương trình có vô số nghiệm.

(c) Hệ phương trình tuyến tính đã cho có nghiệm duy nhất. □

**VÍ DỤ 1.2.16.** Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -5 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 18 & 5 \end{bmatrix}$$

(a) Khử Gauss ma trận  $A$  về ma trận bậc thang

(b) Khử Gauss-Jordan ma trận  $A$  về ma trận bậc thang rút gọn

**GIẢI.** (a) Khử Gauss ma trận  $A$ , ta được

$$\begin{aligned} \rightarrow & \begin{bmatrix} 2 & 6 & -5 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 18 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 18 & 5 \end{bmatrix} & (H_1 \leftrightarrow H_2) \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 18 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} & \begin{pmatrix} 2H_1 - H_2 \rightarrow H_2 \\ -2H_1 + H_3 \rightarrow H_3 \end{pmatrix} \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} & (-4H_2 + H_3 \rightarrow H_3) \end{aligned}$$

Như đã quy ước bên trên, ta sẽ xem ma trận cuối cùng thu được là một ma trận bậc thang. Trong trường hợp muốn các phần tử dẫn đầu phải là 1, ta chỉ cần thực hiện thêm phép biến đổi hàng sơ cấp  $\frac{1}{6}H_3 \rightarrow H_3$ .

(b) Để khử Gauss-Jordan ma trận  $A$  về dạng bậc thang rút gọn, ta tiếp tục thực hiện các phép biến đổi hàng sơ cấp trên ma trận bậc thang bên trên

$$\begin{aligned}
 &\rightarrow \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \end{array} \right] && \left( -H_3 + 2H_2 \rightarrow H_2 \right) \\
 &\rightarrow \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \end{array} \right] && \left( H_2 + H_1 \rightarrow H_1 \right) \\
 &\rightarrow \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{array} \right] && \left( \begin{array}{l} \frac{1}{2}H_2 \rightarrow H_2 \\ \frac{1}{6}H_3 \rightarrow H_3 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Ta nhận được dạng bậc thang rút gọn của ma trận  $A$ . □

Nhận xét rằng ma trận  $A$  trong đầu bài của ví dụ trên có tất cả các phần tử đều là số nguyên. Do đó, trong các phép biến đổi trung gian, ta tránh tối đa việc tạo ra các phân số. Thực ra, ta có thể biến đổi để phân số, nếu có, thì chỉ xuất hiện ở ma trận cuối cùng, tức là ma trận bậc thang rút gọn của ma trận  $A$ . Phân số xuất hiện khi đó là không thể tránh khỏi vì ma trận bậc thang rút gọn của ma trận  $A$  là duy nhất. Trong khi đó, các ma trận trung gian của phép khử Gauss-Jordan thì lại không duy nhất.

Thuật toán mà máy tính thực hiện không nhất thiết thế này, vì máy tính có thể tính toán trên các phân số hiệu quả. Tuy nhiên, trong các bài tập tính toán trong cuốn sách bài tập này, hầu như tất cả đều đơn giản, và có thể thực hành tính toán mà không cần sử dụng máy tính, và không nên sử dụng máy tính, vì thế, lúc đó việc biến đổi mà hạn chế làm xuất hiện các số không nguyên là việc cần thiết.

**VÍ DỤ 1.2.17.** Sử dụng kết quả trong ví dụ trên để giải các hệ phương trình tuyến tính sau

$$\begin{array}{rclclclcl}
 2x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & - & 2x_4 & - & 3x_5 & = & -1 \\
 \text{(a)} \quad x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & & & & = & 0 \\
 2x_1 & + & 6x_2 & & & & + & 8x_4 & + & 18x_5 & = & 5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 & 2x_1 & - \quad 5x_2 & - \quad 3x_3 & = & -1 \\
 \text{(b)} & x_1 & - \quad 2x_2 & & = & 0 \\
 & 2x_1 & & + \quad 18x_3 & = & 5 \\
 \\ 
 & 2x_1 & + \quad 6x_2 & - \quad 5x_3 & - \quad 2x_4 & = & -1 \\
 \text{(c)} & x_1 & + \quad 3x_2 & - \quad 2x_3 & & = & 0 \\
 & 2x_1 & + \quad 6x_2 & & + \quad 8x_4 & = & 5
 \end{array}$$

**Giải.** (a) Ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình đã cho là

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -5 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 18 & 5 \end{bmatrix}.$$

Theo ví dụ trên, dạng bậc thang rút gọn của ma trận này là

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Do đó, các ẩn tự do là  $x_2$  và  $x_4$ . Cho  $x_2 = t$ ,  $x_4 = s$  với  $t, s \in \mathbb{R}$  bất kỳ, ta thu được

$$\begin{array}{lcl}
 x_5 & = & \frac{1}{6} \\
 x_3 & = & -2x_4 + \frac{1}{2} = -2s + \frac{1}{2} \\
 x_1 & = & -3x_2 - 4x_4 + 1 = -3t - 4s + 1.
 \end{array}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình đã cho là

$$x_1 = -3t - 4s + 1, \quad x_2 = t, \quad x_3 = -2s + \frac{1}{2}, \quad x_4 = s, \quad x_5 = \frac{1}{6},$$

với  $t, s \in \mathbb{R}$  bất kỳ.

(b) Ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình đã cho là

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 18 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ma trận này là một phần của ma trận hệ số mở rộng trong ý (a), gồm các cột 1, 3, 5 và 6. Từ kết quả trong ý (a), ta thấy dạng bậc thang rút gọn của ma trận này là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Do đó, hệ đã cho có nghiệm duy nhất

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{6}.$$

Để có được nghiệm này, ta cũng có thể sử dụng dạng bậc thang thay vì dạng bậc thang rút gọn của ma trận hệ số mở rộng. Ma trận dạng bậc thang này có được từ tính toán trong ví dụ trên

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{6} \\ x_2 &= -3x_3 + 1 = -3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + 1 = \frac{1}{2} \\ x_1 &= 2x_2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{6}.$$

(c) Ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình đã cho là

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -5 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Tương tự ý (b), từ kết quả của ví dụ trên, ta thu được dạng bậc thang của ma trận này là

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hàng cuối của ma trận trên ứng với phương trình

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1.$$

Phương trình này vô nghiệm. Do đó, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.  $\square$

Để giải một hệ phương trình tuyến tính, ta biến đổi ma trận hệ số mở rộng của phương trình này về dạng bậc thang, hoặc tốt hơn là dạng bậc thang rút gọn. Từ một trong hai dạng này, ta biết được ngay phương trình có nghiệm hay vô nghiệm.

Nếu muốn biết nghiệm tổng quát của hệ phương trình đã cho, ta cần phải xác định các ẩn tự do, cho ẩn tự do các giá trị tham số bất kỳ, rồi tính toán các ẩn còn lại (ẩn ràng buộc) thông qua ẩn tự do. Lúc kết luận nghiệm của hệ phương trình, cần ghi dãy các ẩn theo đúng thứ tự quy định lúc ban đầu.

## BÀI TẬP

**1.12** [hint] Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & -9 \\ -3 & -7 & -5 & 12 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}.$$

(a) Khử Gauss ma trận  $A$  về dạng bậc thang theo hướng dẫn sau

$$\begin{aligned} & A \\ \rightarrow & A_1 \quad \left( \begin{array}{l} 3H_1 + H_3 \rightarrow H_3 \\ -H_1 + H_4 \rightarrow H_4 \end{array} \right) \\ \rightarrow & A_2 \quad \left( H_2 \leftrightarrow H_3 \right) \\ \rightarrow & A_3 \quad \left( \begin{array}{l} 3H_2 + H_3 \rightarrow H_3 \\ 2H_2 + H_4 \rightarrow H_4 \end{array} \right) \end{aligned}$$

(b) Khử Gauss-Jordan ma trận  $A$  về dạng bậc thang rút gọn theo hướng dẫn sau

$$\begin{aligned} & A_3 \\ \rightarrow & A_4 \quad \left( \frac{1}{5}H_3 \rightarrow H_3 \right) \\ \rightarrow & A_5 \quad \left( \begin{array}{l} H_1 + 3H_3 \rightarrow H_1 \\ H_2 - 3H_3 \rightarrow H_2 \end{array} \right) \\ \rightarrow & A_6 \quad \left( H_1 + 2H_2 \rightarrow H_1 \right) \\ \rightarrow & A_7 \quad \left( -H_2 \rightarrow H_2 \right) \end{aligned}$$

**1.13** [hint] Giải các hệ phương trình tuyến tính sau

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -1 \\ & \qquad \qquad 3x_2 + 6x_3 - 4x_4 = -9 \\ \text{(a)} \quad & -3x_1 - 7x_2 - 5x_3 + 12x_4 = 6 \\ & x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 9x_4 = -7 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcl}
 & x_1 & + \quad 2x_2 & - \quad 3x_3 & = & -1 \\
 & & & 3x_2 & - \quad 4x_3 & = & -9 \\
 \text{(b)} & -3x_1 & - \quad 7x_2 & + \quad 12x_3 & = & 6 \\
 & x_1 & + \quad 4x_2 & - \quad 9x_3 & = & -7 \\
 & x_1 & + \quad 2x_2 & + \quad x_3 & = & -3 \\
 & & & 3x_2 & + \quad 6x_3 & = & -4 \\
 \text{(c)} & -3x_1 & - \quad 7x_2 & - \quad 5x_3 & = & 12 \\
 & x_1 & + \quad 4x_2 & + \quad 5x_3 & = & -9
 \end{array}$$

**1.14** [hint] Giải các hệ phương trình tuyến tính sau

$$\begin{array}{lcl}
 & x_1 & - \quad 4x_2 & - \quad x_3 & = & -5 \\
 \text{(a)} & 2x_1 & + \quad 2x_2 & + \quad 3x_3 & = & 0 \\
 & & & 4x_2 & + \quad 3x_3 & = & 5 \\
 & 2x_1 & + \quad 6x_2 & - \quad 2x_3 & = & -4 \\
 \text{(b)} & -x_1 & + \quad 9x_2 & - \quad 2x_3 & = & 10 \\
 & -x_1 & - \quad 3x_2 & + \quad 2x_3 & = & 2 \\
 & x_1 & + \quad 2x_2 & + \quad 3x_3 & = & -1 \\
 \text{(c)} & & - \quad 4x_2 & - \quad 2x_3 & = & -4 \\
 & -x_1 & & - \quad 2x_3 & = & 3
 \end{array}$$

## BÀI TẬP TỔNG HỢP

**1.15** [hint] Tìm dạng bậc thang và dạng bậc thang rút gọn của các ma trận sau đây.

$$\begin{array}{lcl}
 \text{(a)} & \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & 1 \end{array} \right] \\
 \text{(b)} & \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & 4 & 1 \end{array} \right] \\
 \text{(c)} & \left[ \begin{array}{cccc} 1 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right] \\
 \text{(d)} & \left[ \begin{array}{cccc} 2 & -2 & -4 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right]
 \end{array}$$



**1.20** [hint] Giải hệ phương trình

$$\begin{aligned} 2x^2 + y - z^3 &= 3 \\ x^2 - y + 2z^3 &= 2 \\ x^2 + y + z^3 &= 6 \end{aligned}$$

**1.21** [hint] Giải hệ phương trình

$$\begin{aligned} 3 \sin \alpha - \cos \beta + 2 \tan \gamma &= 3 \\ \sin \alpha - 3 \cos \beta + 6 \tan \gamma &= 9 \\ -2 \sin \alpha + 2 \cos \beta + 4 \tan \gamma &= 2 \end{aligned}$$

với  $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi]$ .

**1.22** [hint] Tìm điều kiện cho các tham số  $a, b, c$  để hệ phương trình có nghiệm

$$\begin{aligned} 3x + y - z &= a \\ 2x \quad \quad - 3z &= b \\ x + y + 2z &= c \end{aligned}$$

**1.23** [hint] Tìm điều kiện cho các tham số  $a, b, c$  để hệ phương trình có nghiệm

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 + x_3 &= a \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= b \\ 7x_1 + 3x_2 - x_3 &= c \end{aligned}$$

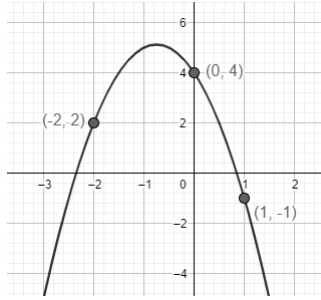
**1.24** (a) Chứng minh rằng nếu  $ad - bc \neq 0$  thì dạng bậc thang rút gọn của ma trận  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  là ma trận đơn vị  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

(b) Sử dụng kết quả trong phần (a), chứng minh rằng nếu  $ad - bc \neq 0$  thì hệ phương trình tuyến tính

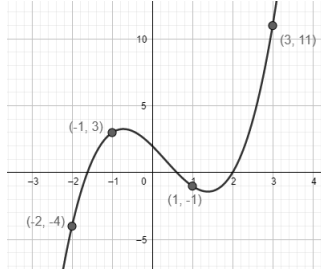
$$\begin{aligned} ax + by &= k \\ cx + dy &= l \end{aligned}$$

có nghiệm duy nhất với mọi  $k, l$ .

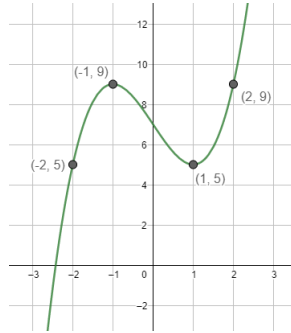
**1.25** [hint] Tìm phương trình parabol trong hình vẽ sau



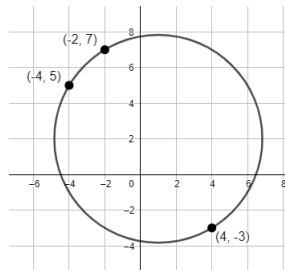
1.26 [hint] Tìm đường cong bậc ba có đồ thị trong hình vẽ



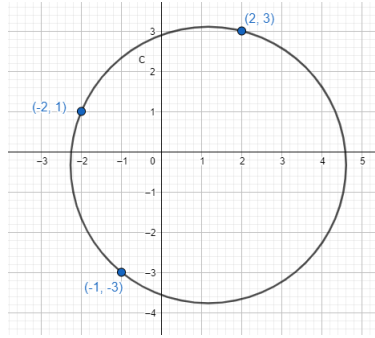
1.27 [hint] Tìm đường cong bậc ba có đồ thị trong hình vẽ



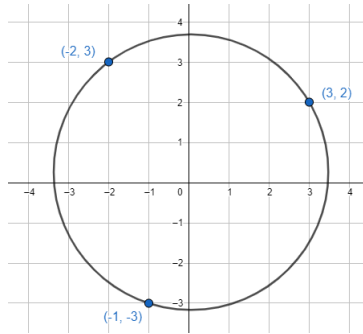
1.28 [hint] Tìm phương trình đường tròn đi qua ba điểm  $(4, -3)$ ,  $(-2, 7)$  và  $(-4, 5)$ .



**1.29** [hint] Tìm phương trình đường tròn trong hình vẽ sau.



**1.30** [hint] Tìm phương trình đường tròn trong hình vẽ sau.



**1.31** [hint] Tìm các hằng số thực  $a, b, c, d$  để ta có đẳng thức

$$\frac{3x^3 + 4x^2 - 6x}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 1)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1} + \frac{cx + d}{x^2 + 2x + 2}$$

**1.32** [hint] Sử dụng kết quả trong bài tập trên, tính tích phân

$$I = \int \frac{3x^3 + 4x^2 - 6x}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 1)},$$

biết rằng  $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan(x) + c$ , với  $c$  là một hằng số.

**1.33** [hint] Tìm các đa thức  $f(x)$  với bậc không quá 2 biết rằng đồ thị của nó đi qua hai điểm  $(-1, -3)$ ,  $(3, 1)$  và  $f'(2) = -1$ .

**1.34** [hint] Tìm các đa thức  $f(x)$  có bậc không quá 3 biết rằng đồ thị của nó đi qua ba điểm  $(-1, -6)$ ,  $(1, -2)$ ,  $(3, 10)$  và  $f'(2) = 5$ .

- 1.35** [hint] Tìm một đa thức bậc không quá 2 biết rằng đồ thị của nó đi qua ba điểm  $(-1, p)$ ,  $(1, q)$ ,  $(2, r)$  trong đó  $p, q$  và  $r$  là các hằng số bất kỳ. Phải chăng một đa thức như thế là tồn tại với mọi  $p, q, r$ ?
- 1.36** [hint] Tìm các đa thức  $f(x)$  có bậc không quá 2 biết rằng đồ thị của nó đi qua hai điểm  $(-1, -4)$ ,  $(3, 12)$  và  $\int_{-1}^3 f(x)dx = \frac{16}{3}$ .
- 1.37** [hint] Tìm một hệ phương trình tuyến tính của 3 ẩn  $x, y, z$  biết rằng các nghiệm của nó là

$$x = 2 + 3t, \quad y = -3 + t, \quad z = 4 - 2t.$$

- 1.38** [hint] Tìm một hệ phương trình tuyến tính của ba ẩn  $x, y, z$  biết rằng tập nghiệm của nó là đường thẳng đi qua hai điểm  $(6, 4, 2)$  và  $(1, 1, 1)$ .

### 1.3 MA TRẬN VÀ PHÉP TOÁN MA TRẬN

Ma trận xuất hiện trong nhiều tình huống khác nhau trong toán học và ứng dụng chứ không chỉ là ma trận hệ số mở rộng của một hệ phương trình tuyến tính.

Mục này trình bày định nghĩa của ma trận và các phép toán số học cơ bản trên ma trận.

**ĐỊNH NGHĨA 1.3.1 (Ma trận).** Một **ma trận** là một bảng hình chữ nhật của các con số. Các số xuất hiện trong ma trận được gọi là các **phần tử** của ma trận.

Ta nói một ma trận có **cỡ**, hoặc **kích thước**,  $m \times n$  nếu nó có  $m$  hàng và  $n$  cột.

**VÍ DỤ 1.3.2.** Một số ví dụ về ma trận là

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}.$$

Các ma trận này có cỡ lần lượt là  $3 \times 2$ ,  $1 \times 4$ ,  $3 \times 3$ ,  $2 \times 1$  và  $1 \times 1$ .

Ma trận chỉ có một hàng được gọi là một **véc tơ hàng**. Ma trận chỉ có một cột được gọi là một **véc tơ cột**. Ta thường đồng nhất ma trận  $\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$  cỡ  $1 \times 1$  với số  $a$ .

Phần tử ở vị trí hàng  $i$ , cột  $j$ , hay còn gọi là vị trí  $(i, j)$ , của ma trận  $A$  thường được ký hiệu là  $a_{ij}$  hoặc  $a_{i,j}$  nếu có thể gây hiểu nhầm.

Như vậy, dạng tổng quát của một ma trận vuông  $A$  cỡ  $2 \times 4$  là

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}.$$

Tổng quát hơn, dạng tổng quát của một ma trận cỡ  $m \times n$  là

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Một cách ngắn gọn, ta kí hiệu ma trận này là

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ hoặc } A = [a_{ij}].$$

Các véc tơ hàng và véc tơ cột

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

sẽ được sử dụng thường xuyên sau này.

**ĐỊNH NGHĨA 1.3.3 (Ma trận vuông).** Ma trận có số hàng bằng số cột được gọi là **ma trận vuông**. Một ma trận vuông cỡ  $n$  là một ma trận cỡ  $n \times n$ .

Với mỗi ma trận vuông  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ , các phần tử

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$$

được gọi là **đường chéo chính**, hoặc đơn giản là **đường chéo**, của ma trận, còn các phần tử

$$a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$$

được gọi là đường **chéo phụ của ma trận**.

## PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

Phép toán của ma trận được định nghĩa dựa trên các phép toán quen thuộc trên các phần tử của nó.

**ĐỊNH NGHĨA 1.3.4 (Ma trận bằng nhau).** Hai ma trận  $A = [a_{ij}]$  và  $B = [b_{ij}]$  được gọi là **bằng nhau** nếu chúng có cùng cỡ, và các phần tử tương ứng bằng nhau, tức là nếu

$$a_{ij} = b_{ij}$$

với mọi  $i, j$ .

**VÍ DỤ 1.3.5.** Xét ba ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ta thấy hai ma trận  $A$  và  $B$  có cùng cỡ  $2 \times 2$ , và ma trận  $B$  có cỡ  $2 \times 3$ . Do đó

$$A \neq C, B \neq C.$$

Nhìn vào các phần tử tương ứng của hai ma trận  $A$  và  $B$ , ta thấy rằng

$$A = B \Leftrightarrow x = 5.$$

**ĐỊNH NGHĨA 1.3.6 (Cộng và trừ ma trận).** Cho hai ma trận

$$A = [a_{ij}], B = [b_{ij}].$$

Nếu  $A$  và  $B$  có cùng cỡ thì **tổng**  $A + B$  và **hiệu**  $A - B$  cũng là các ma trận có cùng cỡ với  $A, B$ , nhận được bằng cách cộng và trừ các phần tử tương ứng của  $A$  và  $B$ :

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}], A - B = [a_{ij} - b_{ij}].$$

Nếu  $A$  và  $B$  có cỡ khác nhau thì ta không định nghĩa tổng  $A + B$  và hiệu  $A - B$ .

**VÍ DỤ 1.3.7.** Xét các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Tính  $A + B, A - B, A + C, B - C$ .

**GIẢI.** Vì cỡ của các ma trận  $A, B, C$  lần lượt là  $3 \times 3, 3 \times 3$  và  $2 \times 2$  nên ta có thể thực hiện phép tính  $A + B$  và  $A - B$  nhưng không thể thực hiện các phép tính  $A + C$  và  $B - C$ . Ta có

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 0 & 3 \end{bmatrix}, A - B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 \\ -3 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 11 \end{bmatrix}.$$



Tiếp theo, ta định nghĩa phép toán nhân trên ma trận. Có hai kiểu nhân, một là nhân của số với ma trận, và hai là nhân của hai ma trận.

**ĐỊNH NGHĨA 1.3.8 (Tích của số và ma trận).** Cho  $A = [a_{ij}]$  là một ma trận và  $c$  là một vô hướng. **Tích** của  $c$  với  $A$ , kí hiệu  $cA$ , là ma trận có cùng cỡ với  $A$ , nhận được bằng cách nhân  $c$  với mỗi phần tử của ma trận  $A$ :

$$cA = [ca_{ij}].$$

Phép nhân của số và ma trận luôn thực hiện được. Lưu ý rằng khi viết tích của số  $c$  với ma trận  $A$ , ta luôn viết số trước, ma trận sau.

**VÍ DỤ 1.3.9.** Ta có

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -6 & 8 & 14 \end{bmatrix}.$$

**ĐỊNH NGHĨA 1.3.10 (Tích của hai ma trận).** Cho hai ma trận

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad B = [b_{ij}]_{r \times s}.$$

Nếu  $n = r$  thì **tích**  $AB$  của ma trận  $A$  với ma trận  $B$ , là ma trận cỡ  $m \times s$ , với phần tử ở vị trí hàng  $i$  cột  $j$  là tổng của các tích các phần tử ở hàng  $i$  của ma trận  $A$  với cột  $j$  của ma trận  $B$ :

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

$$A = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{bmatrix}.$$

Nếu  $n \neq r$  thì tích  $AB$  không được định nghĩa.

Theo định nghĩa, để nhân ma trận  $A$  với ma trận  $B$  ta lấy lần lượt từng hàng của ma trận  $A$  nhân với lần lượt từng cột của ma trận  $B$ . Quy tắc tính toán này gọi là quy tắc hàng-cột.

Vì cách định nghĩa của tích  $AB$  không đối xứng (sử dụng hàng của  $A$  và cột của  $B$ ) nên ta có thể nghi ngờ sự bằng nhau của tích  $AB$  và tích  $BA$ . Ta sẽ xem xét vấn đề này bên dưới.

**Ví dụ 1.3.11.** Cho hai ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tính phần tử ở vị trí  $(2, 3)$  của tích  $AB$ .

**GIẢI.** Vì cỡ của hai ma trận  $A$  và  $B$  lần lượt là  $2 \times 3$  và  $3 \times 4$  nên ta có thể thực hiện phép nhân  $A$  với  $B$ . Tích  $AB$  là một ma trận cỡ  $2 \times 4$ .

Để tính phần tử ở vị trí  $(2, 3)$  của tích  $AB$ , ta cần lấy lần lượt các phần tử ở hàng 2 của ma trận  $A$  nhân với các phần tử ở cột 3 của ma trận  $B$  rồi cộng các tích nhận được. Hàng 2 của  $A$  và cột 3 của  $B$  lần lượt là

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Do đó, phần tử ở vị trí  $(2, 3)$  của tích  $AB$  là

$$(2)(4) + (6)(3) + (0)(5) = 26.$$

□

**Ví dụ 1.3.12.** Cho ba ma trận  $A, B$  và  $C$  có cỡ lần lượt là  $3 \times 4, 4 \times 7$  và  $7 \times 3$ . Tìm các cặp ma trận  $(M, N)$  trong số ba ma trận này sao cho ta có thể thực hiện phép nhân  $MN$ .

**GIẢI.** Từ thông tin về cỡ của các ma trận  $A, B, C$ , ta thấy rằng các cặp ma trận  $(M, N)$  trong số các ma trận này có thể thực hiện phép toán nhân  $MN$  là

$$(A, B), (B, C), (C, A).$$

Hơn nữa, ma trận  $AB$  có cỡ  $3 \times 7$ , ma trận  $BC$  có cỡ  $4 \times 3$  và ma trận  $CA$  có cỡ  $7 \times 4$ . □

## PHÂN HOẠCH MA TRẬN

Một phép phân hoạch của một ma trận là một cách phân chia ma trận thành các ma trận cỡ nhỏ hơn sử dụng các đường thẳng nằm ngang hoặc thẳng đứng. Phân hoạch thường xuyên được sử dụng nhất là phân hoạch ma trận thành các véc tơ hàng, hoặc thành các véc tơ cột.

**Ví dụ 1.3.13.** Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}.$$

Phân hoạch ma trận  $A$  thành các véc tơ cột, ta nhận được 4 cột lần lượt là

$$C_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}, C_4 = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}.$$

Phân hoạch ma trận  $A$  thành các véc tơ hàng, ta nhận được 3 hàng lần lượt là

$$H_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}, \\ H_3 = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}.$$

Một phép nhân hoạch khác của ma trận  $A$  là

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

với

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{bmatrix}, \\ A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} a_{34} \end{bmatrix}.$$

Cho hai ma trận  $A$  và  $B$  sao cho ta có thể thực hiện phép nhân  $AB$ . Khi đó

▷ Để có véc tơ cột thứ  $j$  của ma trận tích  $AB$ , ta lấy ma trận  $A$  nhân

với véc tơ cột thứ  $j$  của ma trận  $B$ :

$$AB = A \begin{bmatrix} C_1 & C_1 & \dots & C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AC_1 & AC_1 & \dots & AC_n \end{bmatrix}.$$

▷ Để có véc tơ cột thứ  $i$  của ma trận tích  $AB$ , ta lấy hàng thứ  $i$  của ma trận  $A$  nhân với ma trận  $B$ :

$$AB = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} H_1 B \\ H_2 B \\ \vdots \\ H_m B \end{bmatrix}.$$

**Ví dụ 1.3.14.** Cho hai ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Tính véc tơ cột thứ 3 của ma trận  $AB$ .
2. Tính véc tơ hàng thứ 2 của ma trận  $AB$ .

**GIẢI.** (a) Véc tơ cột thứ 3 của tích  $AB$  là

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

Véc tơ hàng thứ 2 của ma trận tích  $AB$  là

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}.$$

□

Để thực hiện phép nhân  $AB$ , ta sử dụng quy tắc hàng-cột để nhân lần lượt từng hàng của ma trận  $A$  với từng cột của ma trận  $B$ . Một cách nhân khác có thể thực hiện gọi là quy tắc cột-hàng như sau.

$$AB = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_r \end{bmatrix} = C_1 H_1 + C_2 H_2 + \dots + C_r H_r.$$

Lưu ý rằng các tích  $C_i H_i$  là các ma trận cùng cỡ với nhau.

**VÍ DỤ 1.3.15.** Sử dụng quy tắc cột-hàng để tính tích

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

**GIẢI.** Ta có

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 & 15 & 3 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -7 & 15 & 7 \\ 7 & -5 & 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

### MA TRẬN CHUYỂN VỊ

Khi làm việc với ma trận, chúng ta phân biệt hàng và cột của một ma trận.

**ĐỊNH NGHĨA 1.3.16 (Chuyển vị).** Cho  $A$  là một ma trận cỡ  $m \times n$ . **Ma trận chuyển vị** của  $A$ , ký hiệu  $A^T$ , là ma trận nhận được từ  $A$  sau khi viết lại các véc tơ hàng của ma trận  $A$  thành các véc tơ cột

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}}_{\text{hàng thứ } i \text{ của } A} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix}}_{\text{cột thứ } i \text{ của } A^T}.$$

Trên từng phần tử, ta có

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji}.$$

**VÍ DỤ 1.3.17.** Tìm chuyển vị của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

**CHỨNG MINH.** Ta có

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

□

### VẾT CỦA MA TRẬN

**ĐỊNH NGHĨA 1.3.18 (Vết).** **Vết** của một ma trận vuông  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  là tổng của tất cả các phần tử trên đường chéo của nó

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Ta không định nghĩa vết của một ma trận không vuông.

Với mọi ma trận vuông  $A$ , ta có

$$\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A).$$

**VÍ DỤ 1.3.19.** Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 6 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Tính phần tử ở vị trí  $(1, 2)$  của  $AB$ .
- Tính hàng thứ hai của  $AB$ .
- Tính cột thứ nhất của  $BC$ .
- Tính  $2A - C^T$ .

**GIẢI.** a. Phần tử ở vị trí  $(1, 2)$  của  $AB$  là

$$1.3 + 2.0 + 3.3 = 12.$$

b. Hàng thứ hai của  $AB$  là

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 6 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 30 & 44 \end{bmatrix}.$$

c. Cột thứ nhất của  $BC$  là

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 6 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

d. Ta có

$$\begin{aligned} 2A - C^T &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

## BÀI TẬP

**1.39** [hint] Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & -7 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -9 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & -5 \\ 7 & 0 & 1 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Tích  $AB$  có tồn tại hay không? Nếu có, tính hàng thứ hai của nó.
- Tích  $ABC$  có tồn tại hay không? Nếu có, tính phần tử ở vị trí  $(2, 2)$  của nó.
- Tính cột thứ ba của  $C^T B$ .
- Tính  $A + 3C^T$ .

**1.40** [hint] Cho các ma trận vuông  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_{ij}]$ ,  $C = [c_{ij}]$  cỡ  $3 \times 3$ , trong đó

$$a_j = i + j, \quad b_{ij} = j^{i-1}, \quad c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } |i - j| > 1, \\ -1 & \text{nếu } |i - j| \leq 1. \end{cases}$$

- (a) Viết tường minh các ma trận  $A, B$  và  $C$ .
- (b) Tính hàng thứ hai của  $A^2$ .
- (c) Tính phần tử ở vị trí  $(2, 3)$  của  $A + B^T C$ .

**1.41** [hint] Cho hai ma trận  $A$  và  $B$ . Chứng minh rằng các khẳng định sau

- (a) Nếu hai tích  $AB$  và  $BA$  cùng tồn tại thì  $AB$  và  $BA$  là các ma trận vuông.
- (b) Nếu  $A$  có cỡ  $m \times n$  và tích  $A(BA)$  tồn tại thì  $B$  có cỡ  $n \times m$ .

## HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH, PHƯƠNG TRÌNH MA TRẬN, PHƯƠNG TRÌNH VÉCTƠ

Sử dụng phép toán ma trận, ta có thể viết lại mỗi hệ phương trình tuyến tính thành một phương trình ma trận. Ta thấy được mối liên hệ giữa hệ phương trình tuyến tính và ma trận, không chỉ là ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính.

**ĐỊNH NGHĨA 1.3.20 (Tổ hợp tuyến tính).** Một **tổ hợp tuyến tính** của các ma trận cùng cỡ  $A_1, A_2, \dots, A_r$  là một tổng

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + \dots + c_r A_r$$

trong đó  $c_1, c_2, \dots, c_r$  là các vô hướng, gọi là các **hệ số** của tổ hợp tuyến tính.

**VÍ DỤ 1.3.21.** Viết tích của ma trận  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  với véc tơ cột  $x = [x_i]_{n \times 1}$  như là một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ cột của ma trận  $A$ .

**GIẢI.** Ta sử dụng quy tắc cột-hàng để thực hiện phép nhân  $Ax$ :

$$\begin{aligned}
Ax &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= C_1[x_1] + C_2[x_2] + \dots + C_n[x_n] \\
&= x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_n C_n \\
&= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Như vậy, tích  $Ax$  là tổ hợp của hệ véc tơ cột của ma trận  $A$  với dãy hệ số tương ứng chính là các phần tử của véc tơ cột  $x$ .  $\square$

**Ví dụ 1.3.22.** Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m.
\end{aligned}$$

Ta có thể viết lại phương trình này dưới dạng đẳng thức véc tơ

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

rồi chuyển thành phương trình véc tơ

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Phương trình véc tơ này có thể biến đổi thành phương trình ma trận

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Các hệ phương trình tuyến tính đều có thể viết lại một cách ngắn gọn như là phương trình ma trận

$$Ax = b.$$

Ma trận  $A$  được gọi là **ma trận hệ số** của hệ phương trình tuyến tính. Ma trận hệ số mở rộng là

$$\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}.$$

**VÍ DỤ 1.3.23.** Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 7x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 2. \end{aligned}$$

- Viết hệ phương trình tuyến tính trên thành một phương trình ma trận  $Ax = b$ .
- Viết phương trình ma trận  $Ax = b$  thành một phương trình vectơ.

**GIẢI.** a. Hệ phương trình đã cho tương đương với phương trình ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- b. Phương trình ma trận trên tương đương với phương trình vectơ

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

□

## BÀI TẬP

**1.42 [hint]** Cho phương trình vectơ

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Viết phương trình vectơ trên thành một phương trình ma trận  $Ax = b$ .
- Viết phương trình ma trận  $Ax = b$  thành một hệ phương trình tuyến tính.

### CÁC TÍNH CHẤT ĐẠI SỐ CỦA MA TRẬN

Các phép toán cộng, trừ và nhân trên ma trận được định nghĩa từ các phép toán cộng, trừ và nhân trên các số, do đó, chúng có nhiều tính chất tương tự như các con số. Tuy nhiên, cũng có một số tính chất không giống.

**ĐỊNH LÝ 1.3.24 (Tính chất đại số của phép toán ma trận).** Cho các ma trận  $A, B, C$  và các vô hướng  $a, b$ . Khi đó

- (a)  $A + B = B + A$
- (b)  $A + (B + C) = (A + B) + C$
- (c)  $A(BC) = (AB)C$
- (d)  $A(B + C) = AB + AC$
- (e)  $(A + B)C = AC + BC$
- (f)  $A(B - C) = AB - AC$
- (g)  $(A - B)C = AC - BC$
- (h)  $a(B + C) = aB + aC$
- (i)  $(a + b)C = aC + bC$
- (j)  $a(B - C) = aB - aC$
- (k)  $(a - b)C = aC - bC$
- (l)  $a(bC) = (ab)C$
- (m)  $a(BC) = (aB)C$ .

Các tính chất này được chứng minh trực tiếp sử dụng định nghĩa của các phép toán ma trận đã định nghĩa bên trên.

**CHỨNG MINH (A).** Sử dụng tính chất giao hoán của phép cộng các con số, ta có

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = (B + A)_{ij}.$$

Suy ra  $A + B = B + A$ . □

### PHÉP NHÂN MA TRẬN KHÔNG GIAO HOÁN

**VÍ DỤ 1.3.25.** Cho hai ma trận vuông

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tính  $AB$  và  $BA$ . Hai ma trận tích này có bằng nhau hay không?

**GIẢI.** Ta có

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Do đó  $AB \neq BA$ . □

Với hầu hết các ma trận  $A$  và  $B$ , ta có  $AB$  khác  $BA$ . Do đó, khi thực hiện phép toán nhân trên các ma trận, phải đảm bảo giữ nguyên thứ tự của các ma trận.

**ĐỊNH NGHĨA 1.3.26 (Giao hoán).** Ta nói ma trận  $A$  *giao hoán* với ma trận  $B$  nếu

$$AB = BA.$$

## MA TRẬN KHÔNG

Số 0 đóng vai trò đặc biệt đối với phép toán cộng các con số:

$$a + 0 = a$$

với mọi số  $a$ . Ma trận không đóng vai trò tương tự đối với phép toán cộng các ma trận.

**ĐỊNH NGHĨA 1.3.27 (Ma trận không).** **Ma trận không** cỡ  $m \times n$  là ma trận cỡ  $m \times n$  với tất cả các phần tử đều bằng không

$$0_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

Ta thường ký hiệu ma trận không  $0_{m \times n}$  một cách đơn giản là 0.

**MỆNH ĐỀ 1.3.28 (Tính chất của ma trận không).** Cho  $A$  là một ma trận và  $c$  là một vô hướng. Ta có

(a)  $A + 0 = A = 0 + A$

- (b)  $A - 0 = A$
- (c)  $A - A = A + (-A) = 0$
- (d)  $0A = 0$
- (e) Nếu  $cA = 0$  thì  $c = 0$  hoặc  $A = 0$ .

Số không có các tính chất sau đây đối với phép toán nhân của các số.

- ▷ Nếu  $ab = ac$  và  $a \neq 0$  thì  $b = c$ .
- ▷ Nếu  $ab = 0$  thì  $a = 0$  hoặc  $b = 0$ .

Hai ví dụ sau chỉ ra rằng các tính chất này không còn đúng đối với ma trận không.

**Ví dụ 1.3.29.** Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & x \end{bmatrix}.$$

Tìm  $x$  để  $AB = AC$ .

**GIẢI.** Ta có

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & x \\ 6 & 2x \end{bmatrix}.$$

Do đó  $AB = AC$  khi và chỉ khi  $x = 4$ . □

**Ví dụ 1.3.30.** Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tìm hai ma trận vuông khác không  $B$  cỡ  $2 \times 2$  sao cho  $AB = 0$ .

**GIẢI.** Đặt  $B = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ . Khi đó

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} \\ 2x_{21} & 2x_{22} \end{bmatrix}.$$

Do đó

$$AB = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_{21} = 0 \\ x_{22} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow B = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

với  $x_{11}, x_{12}$  là các vô hướng bất kỳ. Như vậy, hai ma trận vuông  $B$  cần tìm là

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

### MA TRẬN ĐƠN VỊ

Số 1 đóng vai trò đặc biệt đối với phép toán nhân các con số:

$$a1 = a$$

với mọi số  $a$ . Ma trận đơn vị đóng vai trò tương tự đối với phép toán nhân các ma trận.

**ĐỊNH NGHĨA 1.3.31 (Ma trận đơn vị).** *Ma trận đơn vị* cỡ  $n \times n$ , kí hiệu  $I_n$  hoặc đơn giản là  $I$ , là ma trận vuông cỡ  $n \times n$  với các phần tử trên đường chéo chính là 1 còn các phần tử còn lại bằng 0

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Các ma trận đơn vị cỡ  $1 \times 1, 2 \times 2$  và  $3 \times 3$  là

$$[1], \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**VÍ DỤ 1.3.32.** Tìm ma trận vuông  $X$  cỡ  $2 \times 2$  sao cho  $AX = A$  với mọi ma trận vuông  $A$ .

**GIẢI.** Giả sử

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}.$$

Ta có

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} & a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} \end{bmatrix}.$$

Do đó, đẳng thức  $AX = I$  trở thành các đẳng thức

$$\begin{aligned} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} &= a_{11} \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} &= a_{12} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} &= a_{21} \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} &= a_{22}. \end{aligned}$$

Vì  $a_{ij}$  là các vô hướng bất kỳ nên

$$x_{11} = 1, \quad x_{12} = 0, \quad x_{21} = 0, \quad x_{22} = 1.$$

Vậy

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

**MỆNH ĐỀ 1.3.33 (Tính chất của ma trận đơn vị).** Với mọi ma trận  $A$  cỡ  $m \times n$ , ta có

1.  $AI_n = A$ .
2.  $I_m A = A$ .

Ta định nghĩa nghịch đảo của ma trận tương tự như nghịch đảo của số.

**ĐỊNH NGHĨA 1.3.34 (Khả nghịch).** Ta nói ma trận vuông  $A$  là **khả nghịch** nếu tồn tại ma trận vuông  $B$  cùng cỡ với  $A$  thỏa mãn

$$AB = BA = I.$$

Ma trận vuông  $B$  này được gọi là một **nghịch đảo** của  $A$ .

## LŨY THỪA CỦA MA TRẬN

Ta định nghĩa lũy thừa của ma trận vuông giống như lũy thừa của các số.

**ĐỊNH NGHĨA 1.3.35 (Lũy thừa của ma trận).** *Lũy thừa*  $A^n$  của một ma trận vuông  $A$  được định nghĩa như sau.

$$\triangleright A^0 = I.$$

$$\triangleright A^n = \underbrace{AA \cdots A}_{n \text{ lần } A} \text{ nếu } n \text{ là một số nguyên dương.}$$

$$\triangleright A^n = (A^{-1})^{-n} \text{ nếu } n \text{ là một số nguyên âm. Trong trường hợp này, ma trận } A \text{ cần khả nghịch.}$$

Lũy thừa ma trận có tính chất cơ bản sau giống như lũy thừa các số

$$A^r A^s = A^{r+s}, \quad (A^r)^s = A^{rs}$$

với mọi số nguyên dương  $r, s$ .

Tính lũy thừa  $A^n$  với  $A$  là một ma trận vuông cỡ lớn và  $n$  lớn là một bài toán khó. Ta sẽ đề cập đến bài toán này nhiều lần trong cuốn sách.

**VÍ DỤ 1.3.36.** Cho ma trận vuông

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tính  $A^2, A^4, A^{10}$  và  $A^{-10}$ .

**GIẢI.**

□

Vì ta có thể cộng, trừ và nhân các ma trận, nên ta có thể tính giá trị của một đa thức tại một ma trận vuông tương tự như cách tính giá trị tại một số.

**ĐỊNH NGHĨA 1.3.37 (Đa thức ma trận).** Cho đa thức

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m.$$

Giá trị của  $p(x)$  tại một ma trận vuông  $A$  là

$$p(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_mA^m.$$

**VÍ DỤ 1.3.38.** Tính  $p(A)$  với

$$p(x) = 2 - x + 3x^2, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

GIẢI.



## BÀI TẬP TỔNG HỢP

**1.43** [hint] Cho ma trận  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

- (a) Tính  $A^2, A^3, A^4$ .
- (b) Dự đoán công thức của  $A^n$  và chứng minh dự đoán bằng phương pháp quy nạp.

**1.44** [hint] Cho ma trận  $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$ .

- (a) Tính  $A^2, A^3, A^4$ .
- (b) Dự đoán công thức của  $A^n$  và chứng minh dự đoán bằng phương pháp quy nạp.

**1.45** [hint] Cho ma trận  $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ .

- (a) Tính  $A^2, A^3, A^4$ .
- (b) Dự đoán công thức của  $A^n$  và chứng minh dự đoán bằng phương pháp quy nạp.

**1.46** [hint] Cho ma trận  $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ . Cho  $v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  là một vectơ khác không.

- (a) Chứng minh rằng hai vectơ  $v$  và  $Av$  có cùng độ dài.
- (b) Giả sử  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Chứng minh rằng góc giữa hai vectơ  $v$  và  $Av$  là  $\theta$ .

Với mỗi số nguyên dương  $n$ , ta định nghĩa **căn bậc  $n$**  của một ma trận vuông tương tự như định nghĩa căn bậc  $n$  của các số. Cụ thể hơn, căn bậc  $n$  của một ma trận vuông  $A$  là các ma trận vuông  $B$  thỏa mãn  $B^n = A$ .

**1.47 [hint]** Tìm các số  $a, b$  sao cho  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$  là một căn bậc hai của  $-I$ .

**1.48 [hint]** Tìm hai căn bậc hai của ma trận  $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ .

**1.49 [hint]** Tìm tất cả các căn bậc hai của ma trận  $\begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ .

**1.50 [hint]** Có hay không một ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$  không có căn bậc hai ?

**1.51 [hint]** Tồn tại hay không một ma trận vuông  $A$  cỡ  $2 \times 2$  thỏa mãn  $A \neq 0$  và  $A^2 = 0$  ?

**1.52 [hint]** Tồn tại hay không một ma trận vuông  $A$  cỡ  $2 \times 2$  sao cho  $A \neq 0, A \neq I$  và  $A^2 = A$ ?

**1.53 [hint]** Một sinh viên đã giải phương trình  $x^2 = I$  trong  $M_2$  như sau

$$x^2 = I \xLeftrightarrow{(1)} x^2 - I = 0 \xLeftrightarrow{(2)} (x - I)(x + I) = 0 \xLeftrightarrow{(1)} x = I \text{ hoặc } x = -I.$$

Lời giải trên đúng hay sai? Nếu nó sai, trong ba biến đổi tương đương (1), (2) và (3), biến đổi nào sai? Vì sao?

**1.54 [hint]** Cho  $A$  và  $B$  là các ma trận vuông cỡ  $n \times n$ . Chứng minh đẳng thức

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B).$$

**1.55 [hint]** Cho  $A$  và  $B$  là các ma trận vuông cỡ  $n \times n$ . Chứng minh rằng

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

**1.56** [hint] Cho  $A$  và  $B$  là các ma trận vuông cùng cỡ. Các khẳng định sau đây về vết của ma trận là đúng hay sai? Vì sao? Nếu khẳng định sai, hãy bổ sung thêm giả thiết hoặc sửa lại kết luận để nó trở thành đúng.

- $(A^T)^T = A$ .
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$ .
- $(AB)^T = A^T B^T$ .
- $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$ .
- $\text{tr}(kA) = k\text{tr}(A)$ , với mọi vô hướng  $k$ .

**1.57** [hint] Cho  $A$  và  $B$  là các ma trận đối xứng cỡ  $n \times n$ . Chứng minh rằng tích  $AB$  đối xứng khi và chỉ khi  $A$  giao hoán với  $B$ .

**1.58** [hint] Cho  $A$  và  $B$  là hai ma trận vuông cùng cỡ. Chứng minh rằng  $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$  khi và chỉ khi  $A$  và  $B$  giao hoán với nhau.

**1.59** [hint] Cho ma trận vuông

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

- Tính  $A^2, A^3, A^4$ .
- Dự đoán công thức của  $A^n, n$  là một số nguyên dương.
- Chứng minh dự đoán bằng phương pháp quy nạp toán học.

Nếu hai ma trận vuông  $A$  và  $B$  giao hoán với nhau thì ta có các đẳng thức sau, tương tự như các đẳng thức quen thuộc trên các số thực,

$$\begin{aligned} (A + B)^n &= A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} B + \binom{n}{2} A^{n-2} B^2 + \cdots + B^n \\ (A - B)^n &= A^n - \binom{n}{1} A^{n-1} B + \binom{n}{2} A^{n-2} B^2 - \cdots + (-1)^n B^n \\ A^n - B^n &= (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2} B + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1}). \end{aligned}$$

Với  $n$  lẻ thì

$$A^n + B^n = (A + B)(A^{n-1} - A^{n-2} B + \cdots - AB^{n-2} + B^{n-1}).$$

**1.60** [hint] Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ta thấy

$$A = \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_I + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_N$$

- (a) Tính  $N^2$ ,  $N^3$ .
- (b) Tính  $N^n$ ,  $n$  là một số nguyên dương.
- (c) Sử dụng phân tích  $A = \lambda I + N$ , tính  $A^n$ .

**1.61** [hint] Dự đoán công thức của  $A^n$  với

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix} \in M_{p \times p}.$$

## 1.4 NGHỊCH ĐẢO CỦA MA TRẬN. THUẬT TOÁN GAUSS-JORDAN

### NGHỊCH ĐẢO CỦA MA TRẬN

Ta định nghĩa nghịch đảo của ma trận tương tự như nghịch đảo của số.

**ĐỊNH NGHĨA 1.4.1.** Ta nói ma trận vuông  $A$  là **khả nghịch** nếu tồn tại ma trận vuông  $B$  cùng cỡ với  $A$  thỏa mãn

$$AB = BA = I.$$

Ma trận vuông  $B$  này được gọi là một **nghịch đảo** của  $A$ .

Từ định nghĩa ta thấy rằng nếu ma trận  $A$  khả nghịch với một nghịch đảo là  $B$  thì ma trận  $B$  cũng khả nghịch và một nghịch đảo của nó là  $A$ .

**VÍ DỤ 1.4.2.** Cho ma trận vuông

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Tìm ma trận vuông  $B$  cỡ  $2 \times 2$  sao cho  $AB = I$ .
- (b) Tìm ma trận vuông  $C$  cỡ  $2 \times 2$  sao cho  $CA = I$ .
- (c) Ma trận  $A$  có khả nghịch hay không?

**GIẢI.** (a) Đặt  $B = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ . Ta có

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_{11} + 5x_{21} & 3x_{12} + 5x_{22} \\ x_{11} + 2x_{21} & x_{12} + 2x_{22} \end{bmatrix}.$$

Do đó, đẳng thức  $AB = I$  tương đương với hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} 3x_{11} + 5x_{21} &= 1 \\ 3x_{12} + 5x_{22} &= 0 \\ x_{11} + 2x_{21} &= 0 \\ x_{12} + 2x_{22} &= 1. \end{aligned}$$

Trong bốn phương trình của hệ này:

- ▷ hai phương trình thứ nhất và thứ ba chỉ liên quan đến  $x_{11}, x_{21}$ , giải hệ hai phương trình này, ta nhận được  $x_{11} = 2, x_{21} = -1$ ,
- ▷ hai phương trình thứ hai và thứ tư chỉ liên quan đến  $x_{12}, x_{22}$ , giải hệ hai phương trình này ta nhận được  $x_{12} = -5, x_{22} = 3$ .

Vậy  $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ .

(b) Đặt  $C = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ . Giải phương trình  $CA = I$  tương tự như trên, ta được  $C = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ .

(c) Từ hai kết quả trên, ta thấy rằng

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} A = I = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} A.$$

Do đó, ma trận  $A$  khả nghịch với nghịch đảo duy nhất của nó là  $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ . □

**MỆNH ĐỀ 1.4.3.** Nghịch đảo của một ma trận khả nghịch là duy nhất.

**CHỨNG MINH.** Gọi  $B$  và  $C$  là các nghịch đảo của ma trận khả nghịch  $A$ . Ta cần chứng minh  $B = C$ .

Theo định nghĩa của ma trận nghịch đảo, ta có

$$AB = BA = I, \quad AC = CA = I.$$

Theo tính chất kết hợp của phép toán nhân ma trận, ta có  $(BA)C = B(AC)$ . Mặt khác, ta có

$$(BA)C = IC = C, \quad B(AC) = BI = B.$$

Suy ra,  $B = C$ . Vậy nghịch đảo của một ma trận khả nghịch là duy nhất. □

Nghịch đảo của ma trận khả nghịch  $A$  được kí hiệu là  $A^{-1}$ . Như vậy

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Các đẳng thức trên cũng cho thấy rằng nghịch đảo của ma trận khả nghịch  $A^{-1}$  chính là ma trận  $A$ :

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Khi nào một ma trận vuông khả nghịch và công thức nghịch đảo của một ma trận khả nghịch là một bài toán phức tạp, và sẽ được đề cập đến sau. Theo định nghĩa, ma trận vuông  $A = [a]$  cỡ  $1 \times 1$  là khả nghịch khi và chỉ khi  $a \neq 0$ , hơn nữa, nếu  $a \neq 0$  thì nghịch đảo của ma trận  $A$  là  $A^{-1} = \left[\frac{1}{a}\right]$ . Mệnh đề sau cho điều kiện cần và đủ để một ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$  khả nghịch, và công thức của ma trận nghịch đảo trong trường hợp ma trận khả nghịch.

**ĐỊNH LÝ 1.4.4** (Nghịch đảo của ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$ ). *Ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

*khả nghịch nếu và chỉ nếu  $\det(A) = ad - bc$  khác không. Trong trường hợp  $A$  khả nghịch, nghịch đảo của ma trận  $A$  là*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Định thức của ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$  đã được học trong chương trình toán học trung học phổ thông. Khi đó, nó được sử dụng để giải các hệ phương trình tuyến tính 2 phương trình 2 ẩn.

**VÍ DỤ 1.4.5.** Chứng minh rằng ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

khả nghịch, và tìm nghịch đảo của  $A$ .

**CHỨNG MINH.** Định thức của ma trận  $A$  là

$$\det(A) = (6)(2) - (1)(5) = 7.$$

Vì  $\det(A) \neq 0$  nên  $A$  khả nghịch. Nghịch đảo của  $A$  là

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix}.$$

□

**Ví dụ 1.4.6.** Tìm  $x$  sao cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & x \end{bmatrix}$$

không khả nghịch.

**Giải.** Ma trận  $A$  không khả nghịch nếu và chỉ nếu định thức của nó bằng không. Ta có

$$\det(A) = (6)(x) - (1)(5) = 6x - 5.$$

Do đó,  $A$  không khả nghịch khi và chỉ khi  $x = \frac{5}{6}$ .

□

**Ví dụ 1.4.7.**

(a) Tìm nghịch đảo của ma trận  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ .

(b) Tìm ma trận  $A$  thỏa mãn  $(3A + I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ .

**Giải.** (a) Ma trận  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  có định thức là  $(1)(4) - (2)(3) = -2 \neq 0$  nên ma trận này khả nghịch. Hơn nữa, nghịch đảo của nó là

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(b) Ta có

$$(3A + I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 3A + I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow A = \frac{1}{3} \left( \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
&\Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Vậy ma trận cần tìm là  $A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ . □

Ta biết rằng hệ phương trình tuyến tính có thể viết lại thành phương trình ma trận. Trong trường hợp ma trận hệ số khả nghịch, ta có thể giải phương trình tuyến tính như sau.

**MỆNH ĐỀ 1.4.8.** Cho hệ phương trình tuyến tính

$$Ax = b.$$

Nếu ma trận hệ số  $A$  khả nghịch thì phương trình có nghiệm duy nhất  $x = A^{-1}b$ .

**CHỨNG MINH.** Với  $x = A^{-1}b$ , ta có

$$Ax = A(A^{-1}b) = AA^{-1}b = Ib = b.$$

Do đó,  $x = A^{-1}b$  là một nghiệm của phương trình  $Ax = b$ .

Để thấy rằng phương trình  $Ax = b$  không có nghiệm nào khác, nhân vào cả hai vế của phương trình này, về phía bên trái, với ma trận  $A^{-1}$ , ta được

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b.$$

Suy ra  $x = A^{-1}b$ . □

**VÍ DỤ 1.4.9.** Giải hệ phương trình

$$\begin{aligned}
6x_1 + x_2 &= 3 \\
5x_1 + 2x_2 &= -4
\end{aligned}$$

bằng cách nghịch đảo ma trận hệ số.

**GIẢI.** Hệ phương trình tuyến tính đã cho tương đương với phương trình

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ma trận hệ số  $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$  khả nghịch, với nghịch đảo là  $\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$ . Do đó, phương trình này có nghiệm duy nhất

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{7} \\ -\frac{39}{7} \end{bmatrix}.$$

Vậy hệ phương trình tuyến tính đã cho có nghiệm duy nhất  $(x_1, x_2) = \left(\frac{10}{7}, -\frac{39}{7}\right)$ . □

**MỆNH ĐỀ 1.4.10.** Nếu hai ma trận vuông cùng cỡ  $A$  và  $B$  khả nghịch thì tích  $AB$  cũng khả nghịch và

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

**GIẢI.** Để chứng minh  $AB$  khả nghịch và  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  ta cần chỉ ra rằng

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I.$$

Ta có

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}AA^{-1} = I.$$

□

## BÀI TẬP

**1.62** [hint] Tìm ma trận  $A$ .

(a)  $(2A^T - I)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

(b)  $\left(\frac{1}{2}A + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$

- 1.63** [hint] Tìm 8 căn bậc hai của ma trận đơn vị  $I \in M_{3 \times 3}$ .
- 1.64** [hint] Cho  $A$  là một ma trận vuông thỏa mãn  $2A^3 - A + I = 0$ . Chứng minh  $A$  khả nghịch.
- 1.65** [hint] Cho  $A$  là một ma trận vuông. Giả sử  $f(A) = 0$  trong đó  $f(x)$  là một đa thức hệ số thực với hệ số tự do khác không. Chứng minh rằng  $A$  khả nghịch.
- 1.66** [hint] Tồn tại hay không ma trận  $A$  thỏa mãn  $A \neq I$  và  $A^3 = I$ ?
- 1.67** [hint] Giả sử  $AB = AC$  trong đó ma trận  $A$  khả nghịch. Chứng minh rằng  $B = C$ .
- 1.68** [hint] Cho ma trận  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ .
- Tìm các ma trận vuông  $M$  sao cho  $AM = 0$ .
  - Tìm hai ma trận  $B, C$  khác nhau sao cho  $AB = AC$ .

Ma trận vuông  $A$  được gọi là **lũy đẳng** nếu  $A^2 = A$ .

- 1.69** [hint] Cho  $A$  là một ma trận lũy đẳng. Chứng minh các khẳng định sau.
- $I - A$  là lũy đẳng.
  - $2A - I$  khả nghịch, với nghịch đảo chính  $2A - I$ .

Một ma trận vuông  $A$  được gọi là **lũy linh** nếu  $A^p = 0$  với một số nguyên dương  $p$  nào đó.

- 1.70** [hint] Cho  $A$  là một ma trận lũy linh. Chứng minh rằng  $I - A$  khả nghịch.

## MA TRẬN SƠ CẤP

Trong mục 1.1, chúng ta đã định nghĩa ba phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của một ma trận:

- Nhân một hàng với một hằng số khác không.

2. Đổi chỗ hai hàng.
3. Cộng một bội của một hàng vào một hàng khác.

Các phép biến đổi sơ cấp trên hàng của ma trận tương ứng với các phép biến đổi tương đương trên các phương trình của hệ phương trình tuyến tính. Biến đổi tương đương có tính chất hai chiều: ta có thể tiến hành biến đổi ngược lại. Do đó, các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận cũng có thể biến đổi ngược lại.

Cụ thể hơn, nếu ma trận  $B$  thu được từ ma trận  $A$  sau khi thực hiện một trong các phép biến đổi sơ cấp trên hàng thì ma trận  $A$  sẽ thu được từ  $B$  sau khi ta thực hiện phép biến đổi sơ cấp trên hàng ngược lại tương ứng.

- ▷ Nếu  $A \xrightarrow{cH_i \rightarrow H_i} B$  thì  $B \xrightarrow{\frac{1}{c}H_i \rightarrow H_i} A$ .
- ▷ Nếu  $A \xrightarrow{H_i \leftrightarrow H_j} B$  thì  $B \xrightarrow{H_i \leftrightarrow H_j} A$ .
- ▷ Nếu  $A \xrightarrow{cH_i + H_j \rightarrow H_j} B$  thì  $B \xrightarrow{-cH_i + H_j \rightarrow H_j} A$ .

Tổng quát hơn, nếu  $B$  thu được từ  $A$  sau khi thực hiện một dãy các phép biến đổi sơ cấp trên hàng thì ta có thể thực hiện dãy các phép biến đổi sơ cấp trên hàng ngược lại để biến đổi  $B$  trở về  $A$ .

**ĐỊNH NGHĨA 1.4.11.** Ta nói ma trận  $A$  **tương đương hàng** với ma trận  $B$  nếu  $B$  có thể thu được từ  $A$  sau một dãy các phép biến đổi sơ cấp trên hàng.

Từ phân tích trước định nghĩa: nếu  $A$  tương đương hàng với  $B$  thì  $B$  cũng tương đương hàng với  $A$ .

**ĐỊNH NGHĨA 1.4.12.** Một ma trận  $E$  được gọi là **ma trận sơ cấp** nếu  $E$  thu được từ một ma trận đơn vị sau khi thực hiện đúng một phép biến đổi sơ cấp trên hàng.

**VÍ DỤ 1.4.13.** Một số ví dụ về ma trận sơ cấp là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cụ thể hơn:

- ▷ Ma trận đầu tiên thu được từ ma trận đơn vị  $I_2$  sau khi nhân hàng 2 với  $-3$ .
- ▷ Ma trận thứ hai thu được từ ma trận đơn vị  $I_4$  sau khi đổi chỗ hàng 2 và hàng 4.
- ▷ Ma trận thứ ba thu được từ ma trận đơn vị  $I_3$  sau khi cộng 3 lần hàng 3 và hàng 1.
- ▷ Ma trận thứ tư thu được từ ma trận  $I_3$  sau khi nhân hàng 1 với 1.

Kết quả sau giải thích mối liên hệ giữa ma trận sơ cấp, phép biến đổi sơ cấp và phép nhân ma trận.

**ĐỊNH LÝ 1.4.14.** Nếu ma trận sơ cấp  $E$  thu được từ một ma trận đơn vị  $I_m$  sau khi thực hiện một phép biến đổi sơ cấp trên hàng thì tích  $EA$  là kết quả khi thực hiện cùng phép biến đổi sơ cấp trên hàng này trên các hàng của ma trận  $A$ .

- ▷ Nếu  $I \xrightarrow{cH_i \rightarrow H_i} E$  thì  $A \xrightarrow{cH_i \rightarrow H_i} EA$ .
- ▷ Nếu  $I \xrightarrow{H_i \leftrightarrow H_j} E$  thì  $A \xrightarrow{H_i \leftrightarrow H_j} EA$ .
- ▷ Nếu  $I \xrightarrow{cH_i + H_j \rightarrow H_j} E$  thì  $A \xrightarrow{cH_i + H_j \rightarrow H_j} EA$ .

**VÍ DỤ 1.4.15.** Xét ma trận  $A$  và ma trận sơ cấp  $E$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tích  $EA$  là

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}.$$

Ta thấy rằng

$$I_3 \xrightarrow{3H_1 + H_3 \rightarrow H_3} E, \quad A \xrightarrow{3H_1 + H_3 \rightarrow H_3} EA.$$

**VÍ DỤ 1.4.16.** Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ -6 & 21 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 8 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tìm ma trận sơ cấp  $E$  thỏa mãn

- (a)  $EA = B$
- (b)  $EA = C$
- (c)  $EB = D$
- (d)  $EF = B$ .

**GIẢI.** (a) Ta thấy  $B$  là kết quả khi ta đổi chỗ hàng 1 và hàng 3 của  $A$ . Do đó, để nhận được  $E$ , ta đổi chỗ hàng 1 và hàng 3 của ma trận đơn vị,

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Để có  $B$  từ  $A$ , ta lấy  $(-2)$  lần hàng 1 cộng vào hàng 3. Do đó, ta lấy  $(-2)$  lần hàng 1 của  $I$  cộng vào hàng 3 của nó để nhận được ma trận sơ cấp  $E$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(c) E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(d) E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

**MỆNH ĐỀ 1.4.17.** Mọi ma trận sơ cấp đều khả nghịch và nghịch đảo của nó cũng là một ma trận sơ cấp.

**CHỨNG MINH.** Cho  $E$  là một ma trận sơ cấp. Theo định nghĩa,  $E$  thu được từ  $I$  sau một phép biến đổi sơ cấp trên hàng.

Gọi  $E'$  là ma trận thu được từ  $I$  sau khi thực hiện phép biến đổi sơ cấp trên hàng ngược lại. Khi đó

$$EE' = I, E'E = I.$$

Như vậy, ma trận sơ cấp  $E$  khả nghịch và nghịch đảo của nó là ma trận sơ cấp  $E'$ .  $\square$

**ĐỊNH LÝ 1.4.18.** Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n$ . Các khẳng định sau đây tương đương với nhau.

- (a) Ma trận  $A$  khả nghịch.
- (b) Phương trình  $Ax = 0$  chỉ có nghiệm tầm thường  $x = 0$ .
- (c) Dạng bậc thang rút gọn của ma trận  $A$  là ma trận đơn vị  $I_n$ .
- (d) Ma trận  $A$  có thể viết thành tích của các ma trận sơ cấp.

Ba kiểu ma trận sơ cấp ứng với ba kiểu biến đổi hàng sơ cấp  $T_{ij}$ ,  $D_i(a)$ ,  $L_{ij}(b)$  trong đó

$$I \xrightarrow{H_i \leftrightarrow H_j} T_{ij}, \quad I \xrightarrow{aH_i \rightarrow H_i} D_i(a), \quad I \xrightarrow{bH_j + H_i \rightarrow H_i} L_{ij}(b),$$

với  $i \neq j$ ,  $a \neq 0$ . Các ma trận sơ cấp đều khả nghịch với nghịch đảo là một ma trận sơ cấp cùng kiểu:

$$T_{ij}^{-1} = T_{ij}, \quad [D_i(a)]^{-1} = D_i\left(\frac{1}{a}\right), \quad [L_{ij}(b)]^{-1} = L_{ij}(-b).$$

Ta có

$$A \xrightarrow{H_i \leftrightarrow H_j} T_{ij}A, \quad A \xrightarrow{aH_i \rightarrow H_i} D_i(a)A, \quad A \xrightarrow{bH_j + H_i \rightarrow H_i} L_{ij}(b)A.$$

**VÍ DỤ 1.4.19.** Viết ma trận sau thành tích các ma trận sơ cấp

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 11 \end{bmatrix}.$$

**GIẢI.** Khử Gauss-Jordan ma trận  $A$

$$\begin{aligned} & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 11 \end{bmatrix} & \left( \begin{array}{l} -2H_1 + H_2 \rightarrow H_2 \\ -H_1 + H_3 \rightarrow H_3 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} & \left( \begin{array}{l} -2H_2 + H_1 \rightarrow H_1 \\ 2H_2 + H_3 \rightarrow H_3 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \left( \frac{1}{2}H_3 \rightarrow H_3 \right) \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \left( \begin{array}{l} 3H_3 + H_2 \rightarrow H_2 \\ -9H_3 + H_1 \rightarrow H_1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Do đó

$$L_{1,3}(-9)L_{2,3}(3)D_3\left(\frac{1}{2}\right)L_{3,2}(2)L_{1,2}(-2)L_{3,1}(-1)L_{2,1}(-2)A = I.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} A &= [L_{2,1}(-2)]^{-1}[L_{3,1}(-1)]^{-1}[L_{1,2}(-2)]^{-1}[L_{3,2}(2)]^{-1} \\ &\quad \left[D_3\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}[L_{2,3}(3)]^{-1}[L_{1,3}(-9)]^{-1} \\ &= L_{2,1}(2)L_{3,1}(1)L_{1,2}(2)L_{3,2}(-2)D_3(2)L_{2,3}(-3)L_{1,3}(9). \end{aligned}$$

Ta nhận được phân tích của ma trận  $A$  thành tích các ma trận sơ cấp.  $\square$

## BÀI TẬP

**1.71** [hint] Tìm điều kiện đối với các tham số  $a, b, c$  để ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

là một ma trận sơ cấp.

**1.72** [hint] Viết ma trận sau và nghịch đảo của chúng thành tích các ma trận sơ cấp.

(a)  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

## THUẬT TOÁN GAUSS-JORDAN

**MỆNH ĐỀ 1.4.20.** Cho  $A$  là một ma trận khả nghịch cỡ  $n \times n$ . Khi đó, dãy biến đổi sơ cấp trên hàng đưa ma trận  $A$  về ma trận đơn vị  $I_n$  sẽ đưa ma trận đơn vị  $I_n$  về ma trận nghịch đảo  $A^{-1}$ .

**CHỨNG MINH.** Giả sử

$$A \xrightarrow{E_1} * \xrightarrow{E_2} * \xrightarrow{E_3} \dots \xrightarrow{E_k} I_n$$

là dãy các phép biến đổi sơ cấp trên hàng đưa ma trận  $A$  về ma trận đơn vị  $I_n$ . Khi đó

$$I_n = E_k \cdots E_3 E_2 E_1 A.$$

Suy ra

$$A^{-1} = E_k \cdots E_3 E_2 E_1 I_n.$$

Do đó

$$I_n \xrightarrow{E_1} * \xrightarrow{E_2} * \xrightarrow{E_3} \dots \xrightarrow{E_k} A^{-1}.$$

Ta có được điều phải chứng minh. □

Từ kết quả này, ta thấy rằng để tìm nghịch đảo của một ma trận khả nghịch  $A$  cỡ  $n \times n$ , ta sẽ biến đổi sơ cấp trên các hàng của đồng thời hai ma trận  $A$  và  $I$ . Cụ thể hơn, ta có mệnh đề sau.

**MỆNH ĐỀ 1.4.21.** Cho  $A$  là một ma trận khả nghịch cỡ  $n \times n$ . Khi đó, dạng bậc thang rút gọn của ma trận

$$\left[ A \mid I_n \right]$$

là ma trận

$$\left[ I_n \mid A^{-1} \right]$$

### Thuật toán Gauss-Jordan tìm nghịch đảo ma trận

Cho ma trận vuông  $A$  cỡ  $n \times n$ . Để tìm ma trận nghịch đảo  $A^{-1}$ , ta tiến hành như sau.

1. Thành lập ma trận cỡ  $n \times (2n)$

$$\left[ A \mid I_n \right].$$

2. Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng biến đổi ma trận này về dạng bậc thang rút gọn.

▷ Nếu nửa bên trái của ma trận bậc thang rút gọn là ma trận đơn vị  $I_n$ , thì nửa bên phải của nó chính là ma trận nghịch đảo  $A^{-1}$ . Trong trường hợp này, dạng bậc thang rút gọn là

$$\left[ I_n \mid A^{-1} \right].$$

▷ Nếu nửa bên trái của ma trận bậc thang rút gọn không phải ma trận đơn vị thì ma trận  $A$  không khả nghịch.

**VÍ DỤ 1.4.22.** Sử dụng thuật toán Gauss-Jordan, tìm nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

**CHỨNG MINH.** Để tìm ma trận nghịch đảo  $A^{-1}$  của ma trận  $A$ , ta khử

Gauss-Jordan ma trận  $\left[ A \mid I_3 \right]$ :

$$\begin{aligned}
 \left[ A \mid I_3 \right] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] && \begin{pmatrix} -2H_1 + H_2 \rightarrow H_2 \\ -H_1 + H_3 \rightarrow H_3 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right] && (2H_2 + H_3 \rightarrow H_3) \\
 &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] && (-H_3 \rightarrow H_3) \\
 &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] && \begin{pmatrix} 3H_3 + H_2 \rightarrow H_2 \\ -3H_3 + H_1 \rightarrow H_1 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] && (-2H_2 + H_1 \rightarrow H_1)
 \end{aligned}$$

Do đó, ma trận  $A$  khả nghịch với nghịch đảo của ma trận  $A$  là

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

□

**VÍ DỤ 1.4.23.** Sử dụng thuật toán Gauss-Jordan, tìm nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

**CHỨNG MINH.** Để tìm nghịch đảo của ma trận  $A$ , ta khử Gauss-Jordan ma trận  $\left[ A \mid I_3 \right]$

$$\begin{aligned}
 \left[ A \mid I_3 \right] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Vì nửa bên trái của ma trận cuối cùng có một hàng gồm toàn không nên ta không, nửa bên trái của dạng bậc thang rút gọn của ma trận  $\left[ A \mid I_3 \right]$  không thể là ma trận đơn vị  $I_3$ . Do đó, ma trận  $A$  không khả nghịch.  $\square$

**Ví dụ 1.4.24.** Tìm nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

sử dụng phương pháp khử Gauss-Jordan.

**Giải.** Khử Gauss-Jordan ma trận  $[A \mid I]$

$$\begin{aligned}
 [A \mid I] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -6 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 5 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Đến đây, ta thấy rằng ma trận  $A$  khả nghịch. Để biết nghịch đảo của  $A$ , ta tiếp tục thuật toán Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} & \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -6 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 5 \end{array} \right] \\ & \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -6 & -10 & 26 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 16 & -40 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 5 \end{array} \right] \\ & \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -5 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 16 & -40 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 5 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Do đó, ma trận  $A$  khả nghịch với nghịch đảo là

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 13 \\ 9 & 16 & -40 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

□

## BÀI TẬP

**1.73** [hint] Sử dụng thuật toán Gauss-Jordan, tìm nghịch đảo của các ma trận sau.

$$\begin{aligned} \text{(a)} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -4 & 3 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix} \\ \text{(b)} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**1.74** [hint] Sử dụng thuật toán Gauss-Jordan, tìm nghịch đảo của các ma trận sau.

$$\begin{aligned} \text{(a)} & \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{5}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \\ \text{(b)} & \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -4\sqrt{2} & 0 \\ 3\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**1.75** [hint] Cho  $k, k_1, k_2, k_3$  là các số thực khác không. Tìm nghịch đảo của các ma trận sau

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_1 \\ 0 & k_2 & 0 \\ k_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k \end{bmatrix}.$$

**1.76** [hint] Tìm  $a$  để ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & a & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

không khả nghịch.

**1.77** [hint] Tìm  $c$  để ma trận khả nghịch.

$$(a) \begin{bmatrix} c & c & c \\ 1 & c & c \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix}.$$

$$(b) \begin{bmatrix} c & 1 & 0 \\ 1 & c & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}.$$

## BÀI TẬP TỔNG HỢP ---

**1.78** [hint] Sử dụng thuật toán Gauss-Jordan, tìm nghịch đảo của các ma trận sau.

$$(a) \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(e) \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

**1.79** [hint] Sử dụng thuật toán Gauss-Jordan, tìm nghịch đảo của các ma trận sau.

$$(a) \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(d) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(e) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

**1.80** [hint] Cho  $k_1, k_2, k_3, k_4$  là các số thực khác không. Tìm nghịch đảo của các ma trận

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & k_1 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**1.81** [hint] Cho  $k_1, k_2, \dots, k_n$  là các số thực khác không. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & k_1 \\ 0 & \cdots & k_2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Dự đoán công thức của ma trận nghịch đảo  $A^{-1}$ .  
 (b) Chứng minh dự đoán trên.

**1.82** [hint] Cho  $k$  là một số thực khác không. Tìm nghịch đảo của các ma trận

(a)  $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 1 & k \end{bmatrix}$   
 (b)  $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$

**1.83** [hint] Cho  $k$  là một số thực khác không. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & k \end{bmatrix}$$

- (a) Dự đoán công thức của  $A^{-1}$ .  
 (b) Chứng minh công thức dự đoán trên.

**1.84** [hint] Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm  $A^{-1}$  bằng cách khử Gauss-Jordan ma trận  $[A \mid I]$  theo hướng dẫn sau

$$\begin{array}{ll}
[A \mid I] & \\
\rightarrow B & \left( H_1 + H_2 + H_3 \rightarrow H_1 \right) \\
\rightarrow C & \left( \begin{array}{l} H_1 - 2H_2 \rightarrow H_2 \\ H_1 - 2H_3 \rightarrow H_3 \end{array} \right) \\
\rightarrow D & \left( H_1 - H_2 - H_3 \rightarrow H_1 \right) \\
\rightarrow [I \mid A^{-1}] & \left( \frac{1}{2}H_i \rightarrow H_i \right)
\end{array}$$

**1.85** [hint] Tìm nghịch đảo của các ma trận sau

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\text{(b)} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}$$

**1.86** [hint] Cho ma trận vuông cỡ  $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Dự đoán công thức của ma trận  $A^{-1}$ .
- (b) Chứng minh dự đoán trên.

**1.87** [hint] Bài tập này đưa ra một cách tính ma trận nghịch đảo  $A^{-1}$  của ma trận  $A \in M_{n \times n}$  trong bài tập trên. Cách tiếp cận này chỉ ra trực tiếp nghịch đảo của ma trận  $A$  như là một đa thức của  $A$ , không sử dụng thuật toán Gauss-Jordan. Đặt  $J = A + I$ .

- (a) Chứng minh  $J^2 = nJ$ .
- (b) Chứng minh  $A^2 + (2 - n)A + (1 - n)I = 0$ .
- (c) Tìm  $A^{-1}$ .

## ÔN TẬP CHƯƠNG 1

**1.88** [hint] Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & 1 & 6 \\ -4 & 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

- (a) Khử Gauss ma trận  $A$ .  
 (b) Khử Gauss-Jordan ma trận  $A$ .

**1.89** [hint] Sử dụng kết quả của bài tập trên, giải các hệ phương trình tuyến tính sau

$$\begin{array}{rclclcl} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ \text{(a)} & -4x_1 & & & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & -1 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ \text{(b)} & -4x_1 & & & + & 4x_3 & = & 3 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl} 2x_1 & - & 4x_2 & = & 2 \\ \text{(c)} & -4x_1 & & = & 4 \\ & & x_2 & = & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl} 2x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ \text{(d)} & -4x_1 & & & + & 3x_3 & = & -1 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array}$$

**1.90** [hint] Tìm các nghiệm nguyên dương của hệ phương trình

$$\begin{array}{rclclcl} x & + & y & + & 2z & = & 8 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 7 \end{array}$$

**1.91** [hint] Giải biện luận theo các tham số  $a$  và  $b$  hệ phương trình tuyến tính có ma trận hệ số mở rộng là

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a & b \\ a & 4 & a & 4 \end{bmatrix}$$

**1.92** [hint] Tìm các ma trận  $K$  thỏa mãn  $AKB = C$  trong đó

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 36 & 13 & -13 \\ 16 & 7 & -7 \\ -12 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

**1.93** [hint] Giải các phương trình ma trận sau

$$(a) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(b) X \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

**1.94** [hint] Giải phương trình ma trận

$$X \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

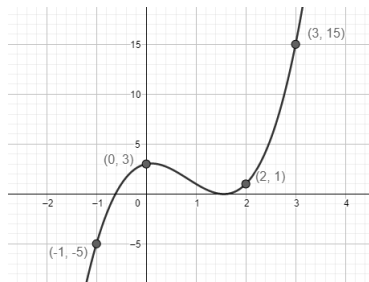
**1.95** [hint] Cho  $A$  và  $B$  là các ma trận vuông cỡ  $n \times n$ . Giả sử  $A$  khả nghịch. Chứng minh rằng  $A + B$  khả nghịch khi và chỉ khi  $I + BA^{-1}$  khả nghịch.

**1.96** [hint] Tìm các hằng số thực  $a, b, c, d$  sao cho

$$\frac{4x^3 - 22x^2 + 26x - 18}{(x-3)^2(x^2+1)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{(x-3)^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}.$$

**1.97** [hint] Tìm đa thức  $g(x) \in \mathcal{P}_3$  sao cho

$$g(-1) = -5, \quad g(0) = 3, \quad g(2) = 1, \quad g(3) = 15.$$



**1.98** [hint] Tìm các số thực  $a, b, c$  sao cho hàm  $f(x) = ae^x + be^{-3x} + cxe^{2x}$  thỏa mãn

$$f(0) = 3, \quad f'(0) = -6, \quad f''(0) = -9.$$

**1.99** [hint] Cho các ma trận  $A, B$  cỡ  $n \times n$ . Giả sử  $B$  khả nghịch. Chứng minh rằng  $A$  giao hoán với  $B$  khi và chỉ khi  $A$  giao hoán với  $B^{-1}$ .

$$B^{-1}(AB)B^{-1} = B^{-1}(BA)B^{-1}$$

Rút gọn 2 vế ta được  $B^{-1}A = AB^{-1}$ . Vậy ta đã chứng minh được khẳng định ( $\Rightarrow$ ). Khẳng định ( $\Leftarrow$ ) được chứng minh tương tự.

**1.100** [hint] Giả sử ma trận vuông  $A$  thỏa mãn

$$A^3 - 2A^2 + 3A + 5I = 0.$$

Chứng minh ma trận  $A$  khả nghịch và biểu thị  $A^{-1}$  như một đa thức của  $A$ .

## GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 1

---

**1.5.** Một điểm  $(x_0, y_0)$  thuộc đồ thị hàm số  $y = f(x)$  khi và chỉ khi tọa độ  $(x_0, y_0)$  thỏa mãn phương trình  $y = f(x)$ , tức là

$$f(x_0) = y_0.$$

**1.11.** Xác định tập hợp các vị trí dẫn đầu các hàng của các ma trận bậc thang cỡ  $3 \times 3$ . Với mỗi tập hợp này, ta có một dạng ma trận bậc thang và một dạng ma trận bậc thang rút gọn.

**1.20.** Thực hiện biến đổi một cách thích hợp để hệ phương trình đã cho trở thành một hệ phương trình tuyến tính.

**1.2.** Phương trình tổng quát của parabol là  $y = ax^2 + bx + c$ . Từ giả thiết, tạo ra một hệ phương trình tuyến tính với các ẩn là  $a, b$  và  $c$ . Gọi phương trình của parabol là  $y = ax^2 + bx + c$ . Theo hình vẽ, parabol đi qua ba điểm  $(-2, 2)$ ,  $(0, 4)$  và  $(1, -1)$ . Do đó, ta có hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{array}{rclcl} 4a & - & 2b & + & c & = & 2 \\ & & & & c & = & 4 \\ a & + & b & + & c & = & -1 \end{array}$$

Hệ này có nghiệm duy nhất  $a = -2, b = -3, c = 4$ . Vậy phương trình của parabol đã cho là  $y = -2x^2 - 3x + 4$ .

**1.2.** Phương trình tổng quát của đường tròn là

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Để xác định phương trình đường tròn, ta cần tìm ba tham số  $a, b$  và  $c$ . Từ dữ kiện của đề bài, ta sẽ thiết lập được hệ phương trình để giải  $a, b, c$ . Gọi phương trình đường tròn đi qua 3 điểm  $(4, -3), (-2, 7)$  và  $(-4, 5)$  là

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Thay tọa độ ba điểm này vào phương trình đường tròn, ta được hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} 4a - 3b + c &= -25 \\ -2a + 7b + c &= -53 \\ -4a + 5b + c &= -41 \end{aligned}$$

Hệ này có nghiệm duy nhất  $a = -2, b = -4, c = -29$ . Vậy phương trình đường tròn cần tìm là  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 29 = 0$ .

**1.31.** Viết vế phải thành một phân thức sau đó so sánh với vế trái.

**1.48.** Chỉ cần tìm căn bậc hai có dạng đặc biệt.

**1.49.** Các ma trận căn bậc hai cần tìm đều là các ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$ :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \text{ Tính } A^2 \text{ rồi giải phương trình } A^2 = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

**1.50.** Xét các ma trận có dạng đặc biệt chẳng hạn, ma trận chéo. Sử dụng lời giải của bài tập trên.

**1.51.** Tìm  $A$  trong số các ma trận có hầu hết phần tử bằng không.

**1.52.** Tìm kiếm  $A$  trong một lớp ma trận đơn giản nhất nào đó, ví dụ ma trận chéo, ma trận tam giác.

**1.57.**  $A$  đối xứng khi và chỉ khi  $A^T = A$ . Sử dụng các tính chất của phép toán chuyển vị.

**1.58.** Sử dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng cho  $(A - B)(A + B)$ .

**1.64.** Chỉ ra tường minh một ma trận  $B$  để  $AB = I$ .

**1.65.** Làm tương tự bài tập trên, chỉ ra tường minh một ma trận  $B$  để  $AB = I$ . Giả sử  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_px^p$ . Theo giả thiết  $a_0 \neq 0$ . Giống như bài tập, từ đẳng thức  $f(A) = 0$ , ta sẽ tạo ra một ma trận  $B$  sao cho  $AB = I$ . Ta có

$$\begin{aligned} f(A) &= 0 \\ \Rightarrow a_0 + a_1A + \dots + a_pA^p &= 0 \\ \Rightarrow a_1A + \dots + a_pA^p &= -a_0I \\ \Rightarrow A(a_1I + \dots + a_pA^{p-1}) &= -a_0I \\ \Rightarrow A\left(-\frac{a_1}{a_0}I - \dots - \frac{a_p}{a_0}A^{p-1}\right) &= I. \end{aligned}$$

Do đó,  $A$  khả nghịch với  $A^{-1} = -\frac{a_1}{a_0}I - \dots - \frac{a_p}{a_0}A^{p-1}$ .

**1.66.** Tìm ma trận  $A$  trong các kiểu ma trận mà ta đã biết cách tính lũy thừa như ma trận chéo hoặc các ma trận có dạng

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

**1.67.** Nhân hai vế của đẳng thức đã cho với  $A^{-1}$  một cách thích hợp.

**1.68.**  $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$

**1.70.** Nghịch đảo của  $I - A$  là một tổng của có dạng  $I + A + \dots + A^k$ .

**1.76.** Một ma trận  $A$  là khả nghịch khi và chỉ khi ma trận bậc thang không có hàng nào gồm toàn phần tử không.

**1.80.** Sử dụng phương pháp khử Gauss-Jordan tương tự như đối với trường hợp ma trận cùng kiểu cỡ  $3 \times 3$ .

**1.89.** Ma trận hệ số mở rộng của các hệ phương trình tuyến tính này đều là ma trận con bao gồm một số cột của ma trận  $A$  trong bài tập trên. Do vậy, ta có dạng bậc thang của các ma trận hệ số mở rộng này từ kết quả trong bài trên.

**1.92.** Ma trận  $K$  có cỡ  $2 \times 2$ ,  $K = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . Biến đổi tương đương phương trình ma trận đã cho thành một hệ phương trình tuyến tính.

**1.94.** Xác định cỡ của ma trận  $X$ , rồi biến đổi phương trình ma trận trên thành hệ phương trình tuyến tính.





# 2

## Định thức

Trong chương này, chúng ta sẽ định nghĩa định thức của một ma trận vuông. Định thức là một đặc trưng quan trọng của ma trận. Một ma trận  $A$  khả nghịch khi và chỉ khi định thức của nó khác không. Sử dụng định thức, ta xây dựng được công thức nghịch đảo của một ma trận khả nghịch, và công thức nghiệm Cramer của các hệ phương trình tuyến tính có nghiệm duy nhất.

### 2.1 KHAI TRIỂN LAPLACE CỦA ĐỊNH THỨC

---

Trong chương 1, ta đã cho điều kiện cần và đủ để một ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$  khả nghịch sử dụng định thức của ma trận, và cho công thức của ma trận nghịch đảo sử dụng định thức. Ngoài ra, hệ phương trình tuyến tính cỡ  $2 \times 2$  trong trường hợp có nghiệm duy nhất cũng giải được bằng cách sử dụng định thức. Trong mục này, chúng ta sẽ tổng quát hóa khái niệm định thức, và trong các mục sau, ta sẽ cho phiên bản tổng quát của các kết quả đã biết trong trường hợp ma trận cỡ  $2 \times 2$  này.

Nhắc lại công thức định thức của một ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$ : định thức của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

là

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ta định nghĩa định thức của một ma trận vuông cỡ  $1 \times 1$  như sau

$$\det [a_{11}] = a_{11}.$$

Sử dụng định thức của ma trận vuông cỡ  $1 \times 1$ , định thức của ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$  có thể viết lại là

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \det [a_{22}] + a_{12} (-\det [a_{21}]).$$

Như vậy,  $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  là một tổng của hai số hạng, mỗi số hạng liên quan đến một phần tử ở hàng 1 của ma trận với một định thức con của ma trận  $A$  nhận được sau khi ta xóa bỏ hàng và cột chứa phần tử này.

Điều này gợi ý ta cách định nghĩa của định thức cỡ bất kỳ một cách quy nạp.

**ĐỊNH NGHĨA 2.1.1.** Cho  $A$  là một ma trận vuông.

- ▷ **Định thức con**  $M_{ij}$  của  $A$  ứng với vị trí  $(i, j)$ , là định thức của ma trận con của  $A$  nhận được sau khi xóa bỏ hàng  $i$  và cột  $j$ .
- ▷ **Phần phụ đại số**  $C_{ij}$  của  $A$  ứng với vị trí  $(i, j)$ , là  $(-1)^{i+j} M_{ij}$ .

**VÍ DỤ 2.1.2.** Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Tính định thức con và phần bù đại số ứng với vị trí  $(2, 3)$ .

**CHỨNG MINH.** Định thức con ứng với vị trí  $(2, 3)$ , theo định nghĩa, là định thức của ma trận con của ma trận  $A$  thu được sau khi bỏ đi hàng 2 và cột 3:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 11.$$

Phần bù đại số ứng với vị trí  $(2, 3)$  là

$$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -11.$$

□

**Ví dụ 2.1.3.** Cho

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 6 & 7 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Tìm  $M_{13}$  và  $C_{13}$ .  
 (b) Tìm  $M_{21}$  và  $C_{21}$ .

**GIẢI.** (a) Ta có

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -15,$$

và

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = -15.$$

(b) Ta có

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

và

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -1.$$

□

Định thức của ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$  có thể viết lại sử dụng khái niệm phần bù đại số như trong ví dụ sau.

**Ví dụ 2.1.4.** Cho ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Chứng minh rằng

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12}.$$

**CHỨNG MINH.** Ta thấy

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \det[a_{22}] = a_{22}, \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \det[a_{21}] = -a_{21}.$$

Do đó

$$a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} = a_{11}a_{22} + a_{12}(-a_{21}) = \det(A).$$

□

Sử dụng khái niệm phần phụ đại số, ta định nghĩa định thức của một ma trận vuông một cách quy nạp.

**ĐỊNH NGHĨA 2.1.5.** *Định thức* của một ma trận vuông  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  cỡ  $n \times n$ , kí hiệu  $\det(A)$  hoặc  $|A|$ , được định nghĩa thông qua các định thức cỡ  $(n-1) \times (n-1)$  bởi công thức

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}.$$

Định nghĩa này là cách tính định thức của một ma trận vuông bằng cách **khai triển phần phụ đại số**, hoặc **khai triển Laplace**, theo hàng đầu tiên. Với ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$ , ví dụ sau chỉ ra rằng ta có thể tính định thức bằng cách khai triển theo một hàng hoặc một cột bất kỳ của ma trận này.

**VÍ DỤ 2.1.6.** Cho ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Chúng minh rằng

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} && \text{(Khai triển theo hàng 1)} \\ &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} && \text{(Khai triển theo hàng 2)} \\ &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} && \text{(Khai triển theo cột 1)} \\ &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} && \text{(Khai triển theo cột 2).} \end{aligned}$$

**CHỨNG MINH.** Đẳng thức đầu tiên đã được thiết lập trong ví dụ trên. Các đẳng thức sau cũng được chứng minh tương tự.

Thật vậy, các phần phụ đại số của ma trận  $A$  là

$$C_{11} = a_{22}, \quad C_{12} = -a_{21}, \quad C_{21} = -a_{12}, \quad C_{22} = a_{11}.$$

Do đó

$$a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} = a_{21}(-a_{12}) + a_{22}a_{11} = \det(A).$$

Tương tự, ta cũng có

$$a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} = a_{11}a_{22} + a_{21}(-a_{12}) = \det(A)$$

và

$$a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} = a_{12}(-a_{21}) + a_{22}C_{22} = \det(A).$$

□

Định lý quan trọng sau đây nói rằng để tính định thức của một ma trận vuông bất kỳ, ta có thể khai triển Laplace theo một hàng hoặc một cột bất kỳ của ma trận.

**ĐỊNH LÝ 2.1.7.** Cho  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$ . Khi đó với mọi  $1 \leq i, j \leq n$ , ta có thể tính định thức  $\det(A)$  bằng cách khai triển theo hàng  $i$

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

hoặc khai triển theo cột  $j$

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}.$$

**VÍ DỤ 2.1.8.** Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Tính định thức của  $A$  bằng cách khai triển Laplace theo hàng 1 và theo cột 2.

**CHỨNG MINH.** Các phần bù đại số ứng với các vị trí trên hàng 1 của ma trận  $A$  là

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4, \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 11$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -12.$$

Khai triển Laplace theo hàng 1, ta được

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= 3(-4) + 1 \cdot 11 + 0 \cdot 12 \\ &= -1.\end{aligned}$$

Lưu ý rằng vì  $a_{13} = 0$  nên ta không cần tính  $C_{13}$ .

Tiếp theo, các phần bù đại số ứng với các vị trí trên cột 2 của ma trận  $A$  là

$$\begin{aligned}C_{12} &= 11, \quad C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -6, \\ C_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -9.\end{aligned}$$

Khai triển Laplace theo cột 2, ta được

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} \\ &= 1 \cdot 11 + (-4)(-6) + 4(-9) \\ &= -1.\end{aligned}$$

□

Để tính định thức của ma trận, ta có thể khai triển Laplace theo một hàng hoặc một cột bất kỳ. Trong mọi trường hợp, để tính một định thức cỡ  $n \times n$  ta đều phải tính một tổng của  $n$  số hạng trong đó mỗi số hạng là tích của một phần tử của ma trận với một định thức cỡ  $(n-1) \times (n-1)$ . Nếu một phần tử này của ma trận bằng 0 thì tất nhiên ta không cần phải tính định thức cỡ  $(n-1) \times (n-1)$  tương ứng. Do đó, để tính định thức, ta thường chọn khai triển Laplace theo hàng hoặc cột của ma trận có nhiều phần tử không nhất có thể.

**Ví dụ 2.1.9.** Tính định thức của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**CHỨNG MINH.** Cột 2 của ma trận  $A$  có 3 trong 4 phần tử bằng không, do ta, ta lựa chọn tính  $\det(A)$  bằng cách khai triển Laplace theo cột 2:

$$\det(A) = (-1)^{2+2} (1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Với định thức cỡ  $3 \times 3$  cần tính, ta thấy rằng cột 2 của nó có 2 trong 3 phần tử bằng không, do đó, ta tính định thức này bằng cách khai triển Laplace theo cột 2, và nhận được

$$\det(A) = (-1)^{2+2} (-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Do đó

$$\det(A) = (-2) 3 = -6.$$

□

**VÍ DỤ 2.1.10.** Tính định thức bằng phương pháp khai triển Laplace theo một hàng hoặc một cột thích hợp

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

**GIẢI.** Cột 2 có nhiều phần tử bằng không nhất trong các hàng và cột của ma trận nên ta khai triển Laplace theo cột 2:

$$D = (-1)^{2+3} (4) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}}_{M_{23}} + (-1)^{4+3} (1) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}}_{M_{43}}$$

Vì định thức  $M_{23}$  không chứa phần tử bằng không, nên ta tính định thức bằng cách khai triển Laplace theo hàng hoặc cột bất kỳ, chẳng hạn theo cột 1:

$$\begin{aligned} M_{23} &= (-1)^{1+1} (1) \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} (2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{1+3} (1) \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 8 - 2(-5) + 9 \\ &= 27. \end{aligned}$$

Ta tính định thức  $M_{43}$  bằng cách khai triển phần bù đại số theo hàng 2 hoặc cột 2 vì ma trận này có phần tử 0 ở vị trí  $(2, 2)$ , chẳng hạn theo cột 2:

$$\begin{aligned} M_{43} &= (-1)^{1+2}(2) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}(-5) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -2(-1) + 5(-1) \\ &= -3 \end{aligned}$$

Vậy định thức cần tính là

$$D = -4(27) - (-3) = -105.$$

□

## BÀI TẬP

**2.1** [hint] Tính định thức của ma trận. Nếu ma trận khả nghịch, tìm nghịch đảo của nó.

(a)  $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$

(b)  $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix},$

(c)  $C = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 4 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$

**2.2** [hint] Tính định thức của các ma trận sau bằng phương pháp khai triển Laplace.

(a)  $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix},$

(b)  $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$

## ĐỊNH THỨC CỦA MA TRẬN TAM GIÁC

Định thức của các ma trận tam giác trên hoặc dưới rất dễ tính, như minh họa trong ví dụ sau.

**VÍ DỤ 2.1.11.** Tính định thức của ma trận tam giác

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

**GIẢI.** Tính định thức của  $A$  bằng cách khai triển Laplace theo cột 4, ta được

$$\det(A) = (-1)^{4+4} a_{44} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{44} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Tiếp tục khai triển Laplace định thức cỡ  $3 \times 3$  theo cột 3, ta được

$$\det(A) = a_{44}(-1)^{3+3} a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{33} a_{44} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Vậy

$$\det(A) = a_{33} a_{44} (a_{11} a_{22}) = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}.$$

□

Ta có kết quả tổng quát sau.

**ĐỊNH LÝ 2.1.12.** Định thức của một ma trận tam giác  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  là tích các phần tử trên đường chéo của nó

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

**CHỨNG MINH.** Ta chứng minh kết quả này bằng cách quy nạp theo cỡ của ma trận.

Khi  $n = 1$ , ta có

$$\det[a_{11}] = a_{11}.$$

Suy ra, công thức đúng với  $n = 1$ .

Giả sử công thức đúng với  $n - 1$  với  $n \geq 2$ . Khai triển Laplace theo cột  $n$  nếu  $A$  là ma trận tam giác dưới, và theo hàng  $n$  nếu  $A$  là ma trận tam giác trên, ta được

$$\det(A) = (-1)^{n+n} a_{nn} \det([a_{ij}]_{(n-1) \times (n-1)}) = a_{nn} \det([a_{ij}]_{(n-1) \times (n-1)}).$$

Vì ma trận con  $[a_{ij}]_{(n-1) \times (n-1)}$  của  $A$  cũng là một ma trận tam giác, nên theo giả thiết quy nạp, ta có

$$\det \left( [a_{ij}]_{(n-1) \times (n-1)} \right) = a_{11}a_{22} \cdots a_{n-1,n-1}.$$

Do đó

$$\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$$

tức là công thức đúng với  $n$ . Theo nguyên lý quy nạp toán học, công thức cần phải chứng minh đúng với mọi số nguyên dương  $n$ .  $\square$

### QUY TẮC SARRUS TÍNH ĐỊNH THỨC CỖ $3 \times 3$

Ta đã định nghĩa định thức của ma trận vuông cỡ  $3 \times 3$  một cách quy nạp, thông qua định thức của các ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$ . Tính tường minh các định thức cỡ  $2 \times 2$  này, ta sẽ nhận được công thức của định thức cỡ 3 theo các phần tử của nó.

**VÍ DỤ 2.1.13.** Tính tường minh định thức của ma trận vuông cỡ  $3 \times 3$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

qua các phần tử của nó.

**GIẢI.** Khai triển Laplace theo cột đầu tiên, ta được

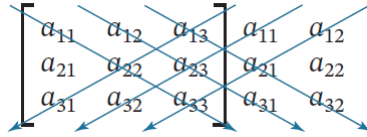
$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12} (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ &\quad + a_{13} (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &= -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \quad (1)$$

□

Theo công thức (1) định thức cỡ  $3 \times 3$  là một tổng của 6 số hạng, mỗi số hạng là tích ba phần tử thích hợp của ma trận. Khó khăn khi sử dụng trực tiếp công thức này để tính định thức cỡ  $3 \times 3$  là nó khó nhớ. Quy tắc Sarrus là một cách khéo léo tạo ra 6 số hạng của định thức cỡ  $3 \times 3$ .



HÌNH 2.1 – Quy tắc Sarrus

**VÍ DỤ 2.1.14.** Sử dụng quy tắc Sarrus, tính định thức cỡ  $3 \times 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}.$$

**CHỨNG MINH.** Ta có

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 6 & -4 & 5 \\ 7 & -8 & 9 & 7 & -8 \end{vmatrix} \\ = [45 + 84 + 96] - [105 - 48 - 72] = 240$$

Vậy, định thức cần tính bằng 240.

□

Tương tự như trên, ta có thể viết tường minh định thức cỡ  $n \times n$  qua các phần tử của nó. Định thức này là tổng của  $n!$  số hạng với mỗi số hạng là tích của  $n$  phần tử thích hợp của định thức.

Đặc biệt, định thức cỡ  $4 \times 4$  là tổng của 24 số hạng. Ta không có một quy tắc đơn giản, tương tự như quy tắc Sarrus để tạo ra 24 số hạng này.

## BÀI TẬP TỔNG HỢP

**2.3** [hint] Tính định thức của các ma trận sau đây bằng phương pháp khai triển Laplace.

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(e) \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 7 & -3 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

**2.4** [hint] Tính định thức của các ma trận sau đây bằng phương pháp khai triển Laplace.

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(e) \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- 2.5** [hint] Tính định thức của các ma trận sau bằng phương pháp khai triển Laplace

$$\begin{bmatrix} k+1 & 7 & k-1 \\ 2 & 4 & k-3 \\ 5 & k & k+1 \end{bmatrix}.$$

- 2.6** [hint] Chứng minh rằng hai ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \text{ và } B = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

giao hoán với nhau khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{vmatrix} = 0.$$

- 2.7** [hint] Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$ . Chứng minh rằng

$$2 \det(A) = \begin{vmatrix} \operatorname{tr}(A) & 1 \\ \operatorname{tr}(A^2) & \operatorname{tr}(A) \end{vmatrix}.$$

- 2.8** [hint] Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $3 \times 3$  với định thức khác không. Ma trận  $A$  có nhiều nhất bao nhiêu phần tử bằng không?

- 2.9** [hint] Tìm tất cả ma trận vuông  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  thỏa mãn  $\det(A) \neq 0$  và 6 phần tử của  $A$  bằng không, 3 phần tử còn lại bằng 1. Tìm mối liên hệ giữa định thức của mỗi ma trận  $A$  này với số giao điểm của ba đoạn thẳng nối các điểm có tọa độ  $(1, i)$  và  $(2, j)$  với  $a_{ij} = 1$ .

- 2.10** [hint] Một ma trận vuông cỡ  $n \times n$  với định thức khác không có thể có nhiều nhất bao nhiêu phần tử bằng không?

- 2.11** [hint] Chứng minh rằng định thức của một ma trận với các phần tử là các số nguyên cũng là một số nguyên.

**2.12** [hint] Chứng minh rằng ba điểm  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  và  $(x_3, y_3)$  thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**2.13** [hint] Chứng minh rằng phương trình đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt  $(a_1, b_1)$  và  $(a_2, b_2)$  là

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

## 2.2 ĐỊNH THỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP

Các phép biến đổi sơ cấp theo hàng đã được sử dụng một cách hiệu quả để giải các hệ phương trình tuyến tính. Nhờ các phép biến đổi này, ta làm đơn giản hóa ma trận, tạo ra nhiều phần tử bằng không. Việc có nhiều phần tử bằng không rất có lợi khi tính định thức. Câu hỏi tự nhiên đặt ra là định thức có thay đổi hay không nếu ta thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên hàng của ma trận? Câu trả lời là định thức có thay đổi. Nhưng may mắn, ta kiểm soát được sự thay đổi của định thức qua mỗi phép biến đổi sơ cấp, và do vậy, vẫn có thể sử dụng các biến đổi sơ cấp theo hàng để tính định thức.

**MỆNH ĐỀ 2.2.1.** Nếu một hàng hoặc một cột của ma trận vuông  $A$  gồm toàn phần tử không thì  $\det(A) = 0$ .

**CHỨNG MINH.** Để có kết quả mong muốn, ta khai triển Laplace ma trận theo hàng, hoặc theo cột gồm toàn phần tử không.

Giả sử  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ . Nếu hàng thứ  $i$  của ma trận  $A$  gồm toàn phần tử không, khai triển Laplace theo hàng thứ  $i$ , ta được

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} = 0C_{i1} + 0C_{i2} + \cdots + 0C_{in} = 0.$$

Nếu cột thứ  $j$  của ma trận  $A$  gồm toàn phần tử không, khai triển Laplace theo cột thứ  $j$ , ta được

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} = 0C_{1j} + 0C_{2j} + \cdots + 0C_{nj} = 0.$$

□

Khẳng định ngược lại của kết quả trên không đúng. Dễ dàng chỉ ra ma trận có tất cả phần tử khác không mà lại có định thức bằng không. Ví dụ

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 0.$$

Tiếp theo, ta xem xét định thức của ma trận chuyển vị so với định thức của ma trận vuông ban đầu.

**VÍ DỤ 2.2.2.** Cho ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Chúng minh rằng  $\det(A^T) = \det(A)$ .

**CHỨNG MINH.** Định thức của ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$  rất đơn giản, nên ta viết ra tường minh mọi thứ.

Ta có

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

và

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \det(A^T) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Do đó  $\det(A^T) = \det(A)$  như mong muốn. □

**VÍ DỤ 2.2.3.** Cho ma trận vuông cỡ  $3 \times 3$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Tính định thức  $\det(A)$  bằng cách khai triển Laplace theo hàng 1 và tính định thức  $\det(A^T)$  bằng cách khai triển theo cột 1. Từ đó, suy ra

$$\det(A^T) = \det(A).$$

**GIẢI.** Khai triển Laplace theo hàng 1 của ma trận  $A$ , ta được

$$\det(A) = a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{C_{11}(A)} + a_{12} \underbrace{\left( - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right)}_{C_{12}(A)} + a_{13} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{C_{13}(A)}.$$

Ma trận chuyển vị  $A^T$  là

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Khai triển Laplace theo cột 1 của ma trận  $A^T$ , ta được

$$\det(A^T) = a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}_{C_{11}(A^T)} + a_{12} \underbrace{\left(-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}\right)}_{C_{21}(A^T)} + a_{13} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix}}_{C_{31}(A^T)}.$$

Từ ví dụ trên, ta thấy rằng

$$C_{11}(A) = C_{11}(A^T), \quad C_{12}(A) = C_{21}(A^T), \quad C_{13}(A) = C_{31}(A^T).$$

Vậy  $\det(A^T) = \det(A)$ . □

Lưu ý rằng trong lời giải của ví dụ trên, ta đã tính định thức của ma trận  $A$  ban đầu bằng cách khai triển Laplace theo hàng 1, hàng 1 của  $A$  chính là cột 1 của ma trận chuyển vị  $A^T$ , và ta tính định thức của ma trận  $A^T$  bằng cách khai triển theo cột 1 của ma trận này.

Tổng quát cách làm này, ta chứng minh được kết quả tổng quát sau.

**ĐỊNH LÝ 2.2.4.** Với mọi ma trận vuông  $A$ , ta có  $\det(A^T) = \det(A)$ .

**ĐỊNH LÝ 2.2.5.** Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$ .

1. Khi nhân một hàng của ma trận với hằng số  $k$ , định thức của ma trận cũng được nhân với  $k$ .
2. Khi đổi chỗ hai hàng của ma trận, định thức của ma trận đổi dấu.
3. Khi cộng một bội của một hàng vào một hàng khác, định thức của ma trận không đổi.

Vì định thức của ma trận không thay đổi khi ta thực hiện chuyển vị ma trận, và các hàng của ma trận chuyển vị chính là các cột của ma trận ban đầu, nên ta có kết quả tương tự như trên đối với các phép biến đổi sơ cấp trên các cột của ma trận.

**ĐỊNH LÝ 2.2.6.** Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$ .

1. Khi nhân một cột của ma trận với hằng số  $k$ , định thức của ma trận cũng được nhân với  $k$ .
2. Khi đổi chỗ hai cột của ma trận, định thức của ma trận đổi dấu.
3. Khi cộng một bội của một cột vào một cột khác, định thức của ma trận không đổi.

Khi ta sử dụng phép biến đổi hàng

$$A \xrightarrow{aH_i + bH_j \rightarrow H_j} B$$

định thức của hai ma trận  $A$  và  $B$  liên hệ với nhau như thế nào?

Lưu ý rằng nói chung phép biến đổi hàng bên trên không phải là một phép biến đổi sơ cấp trên hàng. Tuy nhiên, ta có thể viết nó thành hợp thành của hai phép biến đổi sơ cấp trên hàng, cụ thể là

$$A \xrightarrow{bH_j \rightarrow H_j} * \xrightarrow{aH_i + H_j \rightarrow H_j} B.$$

Theo định lý trên, phép biến đổi thứ nhất làm định thức nhân với  $b$ , còn phép biến đổi thứ hai không thay đổi định thức của ma trận. Do vậy

$$\det(B) = b \det(A).$$

Ta có kết quả tương tự đối với biến đổi sơ cấp trên cột: Nếu

$$A \xrightarrow{aC_i + bC_j \rightarrow C_j} B$$

thì  $\det(B) = b \det(A)$ . Vì ma trận sơ cấp thu được từ ma trận đơn vị sau đúng một phép biến đổi sơ cấp trên hàng, nên ta có hệ quả sau đây cho định thức của các ma trận sơ cấp.

**MỆNH ĐỀ 2.2.7.** Cho  $E$  là một ma trận sơ cấp.

1. Nếu ma trận  $E$  nhận được từ ma trận đơn vị  $I_n$  khi nhân một hàng của  $I_n$  với số khác không  $k$  thì  $\det(E) = k$ .
2. Nếu ma trận  $E$  nhận được từ ma trận đơn vị  $I_n$  khi đổi chỗ hai hàng thì  $\det(E) = -1$ .
3. Nếu ma trận  $E$  nhận được từ ma trận đơn vị  $I_n$  khi cộng một

bội của một hàng vào một hàng khác thì  $\det(E) = 1$ .

**VÍ DỤ 2.2.8.** Giả sử ma trận  $A$  có hai hàng hoặc hai cột tỉ lệ với nhau. Chứng minh rằng  $\det(A) = 0$ .

**CHỨNG MINH.** Giả sử ma trận  $A$  có hai hàng  $H_i$  và  $H_j$  tỉ lệ với nhau. Không mất tổng quát, giả sử  $H_i = cH_j$ . Thực hiện phép biến đổi sơ cấp trên hàng của ma trận  $A$

$$A \xrightarrow{-cH_j + H_i \rightarrow H_i} B.$$

Phép biến đổi này không làm thay đổi định thức, tức là  $\det(A) = \det(B)$ . Mặt khác, ma trận  $B$  có hàng thứ  $i$  gồm toàn phần tử không, suy ra,  $\det(B) = 0$ . Vậy  $\det(A) = 0$ .  $\square$

Phần còn lại của mục này trình bày một số ví dụ sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng để tính định thức của ma trận.

Ta biết rằng phương pháp khử Gauss sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng để đưa một ma trận về dạng bậc thang. Các ma trận vuông có dạng bậc thang lại là các ma trận tam giác trên, và định thức của ma trận tam giác trên chính là tích các phần tử trên đường chéo. Do đó, sử dụng khử Gauss, ta có thể tính định thức của ma trận. Lưu ý rằng định thức của một ma trận và định thức của một dạng bậc thang của nó có thể khác nhau, nhưng ta biết được mối liên hệ của hai định thức này nhờ dãy các phép biến đổi sơ cấp đưa ma trận về dạng bậc thang.

#### Tính định thức sử dụng biến đổi sơ cấp

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng, đưa ma trận cần tính định thức về dạng bậc thang.

Trong quá trình biến đổi này, hãy kiểm soát sự thay đổi của định thức.

Định thức của ma trận bậc thang bằng tích các phần tử trên đường chéo.

**VÍ DỤ 2.2.9.** Sử dụng phương pháp khử Gauss, tính định thức của

ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

**GIẢI.** Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng, ta đưa ma trận  $A$  về dạng bậc thang:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} && (H_1 \leftrightarrow H_2) \\ &= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} && (\text{đưa thừa số chung 3 ở hàng} \\ && \text{1 ra ngoài định thức}) \\ &= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} && (-2H_1 + H_3 \rightarrow H_3) \\ &= -3 \cdot \frac{1}{-3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 65 \end{vmatrix} && (10H_2 - 3H_3 \rightarrow H_3) \\ &= 1 \cdot 3 \cdot 65 = 195 && (\text{định thức của ma trận tam} \\ && \text{giác bằng tích các phần tử} \\ && \text{trên đường chéo}) \end{aligned}$$

Vậy định thức của ma trận  $A$  là 195. □

Ta có thể sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên cột của ma trận để tính định thức. Ta cũng có thể sử dụng đồng thời cả biến đổi trên hàng và biến đổi sơ cấp trên cột để tính định thức. Phối hợp các phép biến đổi một cách thích hợp sẽ làm tính toán gọn gàng hơn. (Tất nhiên, kết quả cuối cùng là như nhau.)

**VÍ DỤ 2.2.10.** Tính định thức của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

**GIẢI.** Ta có

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{vmatrix} & (-3C_1 + C_4 \rightarrow C_4) \\ &= 1 \cdot 7 \cdot 3(-26) = -546 & \text{(định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử trên đường chéo)} \end{aligned}$$

Vậy định thức của ma trận  $A$  là  $-546$ . □

Phối hợp cả phương pháp biến đổi sơ cấp trên hàng, trên cột của ma trận với khai triển Laplace theo một hàng hoặc một cột thích hợp sẽ làm việc tính định thức của ma trận trở nên thuận lợi hơn.

**Tính định thức sử dụng biến đổi sơ cấp và khai triển Laplace**

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng để khử các phần tử trên một cột nào đó, sao cho cột này còn không quá 1 phần tử khác không. Sau đó, khai triển Laplace theo cột này.

Tương tự, sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên cột để khử các phần tử trên một hàng nào đó, sao cho hàng này còn không quá 1 phần tử khác không. Sau đó, khai triển Laplace theo hàng này.

**Ví dụ 2.2.11.** Tính định thức của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Giải.** Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng, ta sẽ khử 3 trong số 4 phần tử của cột 1, rồi khai triển Laplace theo cột này. Nhìn vào cột 1, ta thấy rằng nên giữ lại phần tử 1 ở vị trí  $(2, 1)$ . Ta có

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} \quad \left( \begin{array}{l} -3H_2 + H_1 \rightarrow H_1 \\ -2H_2 + H_3 \rightarrow H_3 \\ -3H_2 + H_4 \rightarrow H_4 \end{array} \right) \\ &= (-1)^{2+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(khai triển Laplace theo hàng} \\ \text{2)} \end{array} \\ &= - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} \quad (H_1 + H_3 \rightarrow H_3) \\ &= -(-1)^{1+1}(-1) \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(khai triển Laplace theo hàng} \\ \text{1)} \end{array} \\ &= 3 \cdot 3 - 3 \cdot 9 = -18. \end{aligned}$$

Vậy định thức của ma trận đã cho bằng  $-18$ . □

**Ví dụ 2.2.12.** Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -3 \\ -5 & -4 & -9 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & -5 \\ 3 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

**GIẢI.** Định thức  $D$  cỡ  $4 \times 4$ , không có phần tử nào bằng không, do đó, việc khai triển Laplace ngay theo một hàng và một cột là không nên. Các phần tử của cột một lần lượt là 2,  $-5$ , 4,  $-3$ . Ta sẽ giữ lại phần tử 2 và sử dụng nó để khử các phần tử còn lại của cột này.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -3 \\ -5 & -4 & -9 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & -5 \\ 3 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 7 & 2 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 15 \end{vmatrix}$$

Các phép biến đổi đã sử dụng: lấy 5 lần hàng 1 cộng vào 2 lần hàng 2, định thức đã nhân lên với 2; lấy  $-2$  lần hàng 1 cộng vào hàng 3, định thức không thay đổi; lấy  $-3$  lần hàng 1 cộng vào 2 lần hàng 3, định thức nhân lên với 2.

Tiếp theo, khai triển phần bù đại số theo cột 1, ta được

$$D = \frac{1}{4}(-1)^{1+1}(2) \underbrace{\begin{vmatrix} 7 & 2 & -11 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 15 \end{vmatrix}}_{M_{11}}.$$

Như vậy, nhờ việc sử dụng các phép biến đổi hàng sơ cấp đơn giản như trên, thay vì phải tính 4 định thức cỡ  $3 \times 3$ , ta chỉ phải tính đúng một định thức cỡ  $3 \times 3$ .

Các phần tử ở hàng 2 của  $M_{11}$  lần lượt là 1, 0, 1. Ta sẽ giữ lại phần tử 1 đầu tiên và dùng nó để khử đi phần tử 1 còn lại.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -11 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -18 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 14 \end{vmatrix}.$$

Định thức  $M_{11}$  không thay đổi vì ta đã cộng  $-1$  lần cột 1 vào cột 3. Khai triển phần bù đại số theo hàng 2 của định thức này, ta được

$$\begin{aligned} M_{11} &= (-1)^{2+1}(1) \begin{vmatrix} 2 & -18 \\ -2 & 14 \end{vmatrix} \\ &= -(-8) \\ &= 8. \end{aligned}$$

Vậy định thức cần tính là  $D = \frac{1}{2}(8) = 4$ . □

## BÀI TẬP

**2.14** [hint] Tính định thức của các ma trận sau.

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ -2 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**2.15** [hint] Tính định thức của các ma trận sau.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & -9 & 3 \\ -1 & -6 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

**2.16** [hint] Tính định thức của các ma trận sau.

$$1. \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & -3 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$3. \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$4. \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$5. \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

**2.17** [hint] Biết rằng

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7,$$

tính các định thức sau đây

$$(a) \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 4a & 4b & 4c \\ -d & -e & -f \\ -3g & -3h & -3i \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ d & e & f \\ g-4a & h-4e & i-4f \end{vmatrix}.$$

## BÀI TẬP TỔNG HỢP

*Ma trận Vandermonde* là ma trận mà các phần tử trong mỗi hàng (hoặc trong mỗi cột) là một cấp số nhân bắt đầu bằng 1. Định thức của ma trận Vandermonde được gọi là *định thức Vandermonde*

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Ta có

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1.$$

**2.18** [hint] Tính định thức Vandermonde cỡ  $3 \times 3$

$$V_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

bằng cách tiến hành các bước sau đây.

Bước 1: Thực hiện phép biến đổi sơ cấp  $-x_1H_2 + H_3 \rightarrow H_3$  rồi  $-x_1H_1 + H_2 \rightarrow H_2$ .

Bước 2: Khai triển phần bù đại số theo cột đầu tiên.

Bước 3: Đưa nhân tử chung ở các cột của ma trận cỡ  $2 \times 2$  ra bên ngoài định thức.

Bước 4: So sánh định thức còn lại với định thức Vandermonde cỡ  $2 \times 2$ .

**2.19** [hint] Chứng minh rằng

$$V_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$$

**2.20** [hint] Cho  $n \geq 2$  là một số nguyên.

(a) Hãy dự đoán công thức của định thức Vandermonde cỡ  $n \times n$  tổng quát.

(b) Chứng minh dự đoán trên.

**2.21** [hint] Ma trận  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  được gọi là ma trận tam giác dưới đối với đường chéo phụ nếu  $a_{ij} = 0$  với mọi  $i + j < n$ . Chứng minh các công thức định thức của ma trận tam giác dưới đối với đường chéo phụ sau.

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -a_{12}a_{21}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{41}a_{32}a_{23}a_{14}.$$

**2.22** [hint] Tính định thức của ma trận tam giác dưới đối với đường chéo phụ.

**2.23** [hint] Không tính tường minh các định thức, chứng minh các đẳng thức sau.

$$(a) \begin{vmatrix} a_1 + b_1 t & a_2 + b_2 t & a_3 + b_3 t \\ a_1 t + b_1 & a_2 t + b_2 & a_3 t + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - t^2) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$(b) \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 - b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & a_2 - b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 & a_3 - b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

**2.24** [hint] Tính các định thức sau

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}.$$

**2.25** [hint]

- (a) Dự đoán công thức tổng quát của các định thức có dạng trong bài tập trên.
- (b) Chứng minh dự đoán.

**2.26** [hint] Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$  và  $B$  là ma trận nhận được khi viết các hàng của  $A$  theo thứ tự ngược lại. Tìm mối liên hệ giữa định thức của hai ma trận  $A$  và  $B$ .

**2.27** [hint] Không tính tường minh, chứng minh rằng các định thức sau bằng không.

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 5 \\ 4 & -6 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}.$$

**2.28 [hint]** Định thức của các ma trận tam giác khối  $M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$

hoặc  $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}$  trong đó  $A$  và  $C$  là các ma trận vuông được tính qua định thức của các khối trên đường chéo bởi công thức  $\det(M) = \det(A)\det(C)$ . Sử dụng kết quả này, tính định thức của các ma trận sau

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 7 & 6 \\ 1 & 8 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 7 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

**2.29 [hint]** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai? Vì sao?

- Định thức của ma trận vuông cỡ  $4 \times 4$  không thay đổi khi đổi chỗ hai cột đầu tiên của và đổi chỗ hai cột cuối cùng.
- Nếu  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $3 \times 3$  và  $B$  là ma trận thu được khi nhân hàng một của  $A$  với 5 và nhân hàng ba của  $A$  với  $\frac{2}{5}$  thì  $\det(B) = 2\det(A)$ .
- Nếu  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $3 \times 3$  và  $B$  là ma trận thu được khi cộng 5 lần của hàng một vào hàng 2 và vào hàng 3, thì  $\det(B) = 25\det(A)$ .
- Nếu  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $6 \times 6$  có tổng của hàng thứ nhất với hàng thứ ba bằng hàng thứ sáu thì  $\det(A) = 0$ .
- Nếu tất cả các phần phụ đại số của ma trận vuông  $A$  bằng không thì  $\det(A) = 0$ .
- Định thức của ma trận tam giác dưới là tổng các phần tử trên đường chéo chính của nó.
- Với mọi ma trận vuông  $A$ , ta có  $\det(A^2) = (\det(A))^2$ .

## 2.3 ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH THỨC

Mục này trình bày một số tính chất cơ bản của ma trận. Sau đó, chúng ta sẽ sử dụng các kết quả này để dẫn ra công thức nghịch đảo của một ma trận khả nghịch và công thức nghiệm của một số hệ phương trình tuyến tính.

### TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA ĐỊNH THỨC

Cho  $A$  và  $B$  là các ma trận cỡ  $n \times n$  và  $k$  là một vô hướng. Chúng ta bắt đầu bằng việc xem xét mối quan hệ có thể giữa  $\det(A)$ ,  $\det(B)$  và các định thức

$$\det(kA), \det(A+B), \det(AB).$$

Công thức sau đây thể hiện mối liên hệ giữa định thức và phép toán nhân số với ma trận.

$$\det(kA) = k^n \det(A).$$

Ví dụ

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Nói chung, định thức không tương thích với phép toán cộng và trừ ma trận. Sau đây là một ví dụ đơn giản.

**VÍ DỤ 2.3.1.** Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

So sánh  $\det(A+B)$  và  $\det(A) + \det(B)$ .

**GIẢI.** Ta có

$$\det(A) = 1, \quad \det(B) = 8, \quad \det(A+B) = \det \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = 23.$$

Suy ra

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B).$$



**VÍ DỤ 2.3.2.** Chứng minh rằng

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}.$$

**GIẢI.** Ta có

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21}) \\ &= a_{11}(a_{22} + b_{22}) - a_{12}(a_{21} + b_{21}) \\ &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

**MỆNH ĐỀ 2.3.3.** Cho  $A, B$  và  $C$  là các ma trận vuông cỡ  $n \times n$  sao cho

- ▷ Hàng thứ  $r$  của  $C$  là tổng hàng thứ  $r$  của  $A$  và hàng thứ  $r$  của  $B$ .
- ▷ Các hàng  $i \neq r$  của ba ma trận  $A, B$  và  $C$  giống nhau.

Khi đó

$$\det(C) = \det(A) + \det(B).$$

Ta có kết quả tương tự khi thay hàng bởi cột.

**GIẢI.** Ta tính định thức của các ma trận  $A, B$  và  $C$  bằng cách khai triển Laplace theo hàng thứ  $r$ . Vì các hàng  $i \neq r$  của ba ma trận  $A, B$  và  $C$  giống nhau nên với mọi  $j = 1, 2, \dots, n$ , phần phụ đại số của cả ba ma trận  $A, B$  và  $C$  ứng với vị trí  $(r, j)$  bằng nhau, và ký hiệu là  $C_{ij}$ . Ta có

$$\begin{aligned} \det(C) &= c_{r1}C_{r1} + c_{r2}C_{r2} + \dots + c_{rn}C_{rn} \\ &= (a_{r1} + b_{r1})C_{r1} + (a_{r2} + b_{r2})C_{r2} + \dots + (a_{rn} + b_{rn})C_{rn} \\ &= (a_{r1}C_{r1} + a_{r2}C_{r2} + \dots + a_{rn}C_{rn}) + (b_{r1}C_{r1} + b_{r2}C_{r2} + \dots + b_{rn}C_{rn}) \\ &= \det(A) + \det(B). \end{aligned}$$

Kết quả tương tự cho cột được chứng minh giống hệt như trên, hoặc sử dụng mối liên hệ giữa định thức của ma trận và định thức của ma trận chuyển vị. □

## ĐỊNH THỨC CỦA TÍCH CÁC MA TRẬN

Định thức tương thích với phép toán nhân ma trận. Cụ thể hơn, định thức của tích của hai ma trận bằng tích các định thức của các ma trận này:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

**VÍ DỤ 2.3.4.** Cho các ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

So sánh  $\det(AB)$  và  $\det(A) \det(B)$ .

**GIẢI.** Ta có

$$\det(A) = 1, \quad \det(B) = -23, \quad \det(AB) = \det \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix} = -23.$$

Suy ra

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

□

**VÍ DỤ 2.3.5.** Cho  $A$  và  $B$  là các ma trận cỡ  $2 \times 2$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Chứng minh rằng  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .

**GIẢI.** Vì các ma trận  $A, B$  và  $AB$  đều có cỡ  $2 \times 2$  nên việc tính các định thức  $\det(A), \det(B)$  và  $\det(AB)$  rất đơn giản. Ta có

$$\begin{aligned} \det(A) \det(B) &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\ &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \\
&= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \\
&\quad - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) \\
&= a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21}a_{22}b_{22} \\
&\quad - (a_{11}b_{12}a_{21}b_{11} + a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} + a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} + a_{12}b_{22}a_{22}b_{21}) \\
&= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21}.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

□

**Lemma 1.** Cho  $E, B$  là các ma trận vuông cỡ  $n \times n$  trong đó  $E$  là một ma trận sơ cấp. Khi đó

$$\det(EB) = \det(E) \det(B).$$

**ĐỊNH LÝ 2.3.6.** Một ma trận vuông  $A$  là khả nghịch nếu và chỉ nếu  $\det(A) \neq 0$ .

**VÍ DỤ 2.3.7.** Chứng minh rằng ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

không khả nghịch.

**GIẢI.** Ta có

$$\det(A) = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2(4) - 4(-2) = 0.$$

Vì  $\det(A) = 0$  nên  $A$  không khả nghịch.

□

**ĐỊNH LÝ 2.3.8.** Cho  $A$  và  $B$  là các ma trận vuông cỡ  $n \times n$ . Khi đó

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

**ĐỊNH LÝ 2.3.9.** Cho  $A$  là một ma trận vuông khả nghịch. Khi đó

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

**CHỨNG MINH.** Vì  $A^{-1}A = I$  nên

$$\det(A^{-1}A) = \det(I).$$

Mặt khác

$$\det(A^{-1}A) = \det(A^{-1}) \det(A), \quad \det(I) = 1.$$

Do đó

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

□

**VÍ DỤ 2.3.10.** Tìm  $k$  để ma trận  $A$  khả nghịch:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ k & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

**GIẢI.** Ma trận  $A$  khả nghịch khi và chỉ khi định thức của nó khác không. Ta có

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 \\ k & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -4 \\ k-6 & 0 & -10 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{3+2}(1) \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ k-6 & -10 \end{vmatrix} \\ &= -(4k-4) \\ &= -4(k-1). \end{aligned}$$

Do đó,  $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 1$ . Vậy ma trận đã cho khả nghịch khi và chỉ khi  $k \neq 1$ . □

## BÀI TẬP

**2.30** [hint] Bằng cách tính định thức, cho biết ma trận sau có khả nghịch hay không.

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & -1 \end{bmatrix}.$$

**2.31** [hint] Tìm các giá trị của  $k$  để ma trận  $A$  khả nghịch.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ k & 1 & k \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

**2.32** [hint] Tìm  $a$  để ma trận khả nghịch.

$$(a) \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & a \\ 5 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 2a & 6 & -2 \\ -5 & -9 & 4 \\ -3 & -a & 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2a+1 \\ -1 & 1 & 2 \\ a & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} -2 & 1 & a \\ -3a & -2 & 1 \\ -1 & a+2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(e) \begin{bmatrix} a & -2 & 2 \\ 2a+3 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \end{bmatrix}$$

### NGHỊCH ĐẢO MA TRẬN SỬ DỤNG MA TRẬN LIÊN HỢP

Nhắc lại rằng nếu ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

khả nghịch thì nghịch đảo của nó là

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Trong tiểu mục này, ta sẽ tổng quát hóa công thức này cho một ma trận vuông bất kỳ cỡ bất kỳ.

**ĐỊNH NGHĨA 2.3.11.** Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$ . Gọi  $C_{ij}$  là phần phụ đại số của ma trận  $A$  ứng với vị trí  $(i, j)$ . Khi đó, ma trận

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

được gọi là **ma trận các phần bù đại số** của ma trận  $A$ . Chuyển vị của ma trận các phần bù đại số này được gọi là **ma trận liên hợp** của  $A$ , ký hiệu là  $\text{adj}(A)$ .

**VÍ DỤ 2.3.12.** Cho ma trận vuông khả nghịch cỡ  $2 \times 2$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Chứng minh rằng

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A).$$

**GIẢI.** Các phần phụ đại số của ma trận  $A$  là

$$\begin{aligned} C_{11} &= a_{22}, & C_{12} &= -a_{21}, \\ C_{21} &= -a_{12}, & C_{22} &= a_{11}. \end{aligned}$$

Suy ra, ma trận liên hợp của  $A$  là

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Do đó,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A).$$

□

**VÍ DỤ 2.3.13.** Cho ma trận vuông

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Tính  $\operatorname{adj}(A)$ .
2. So sánh  $\operatorname{adj}(A)A$  với  $\det(A)I$ .
3. Tính  $A^{-1}$ .

**GIẢI.** (a) Các phần phụ đại số của ma trận  $A$  là

$$\begin{aligned} C_{11} &= + \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 12, & C_{12} &= - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6, & C_{13} &= + \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -16, \\ C_{21} &= - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 4, & C_{22} &= + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, & C_{23} &= - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 16, \\ C_{31} &= + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 12, & C_{32} &= - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10, & C_{33} &= + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 16. \end{aligned}$$

Suy ra, ma trận liên hợp của  $A$  là

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & -10 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}.$$

(b) Ta có

$$\begin{aligned} A \operatorname{adj}(A) &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix} = \det(A)I. \end{aligned}$$

(c) Vì  $A \operatorname{adj}(A) = \det(A) I$  nên

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}.$$

□

**ĐỊNH LÝ 2.3.14.** Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$ . Khi đó

$$A \operatorname{adj}(A) = \det(A) I.$$

Từ đó suy ra, nếu  $A$  khả nghịch thì

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A).$$

**VÍ DỤ 2.3.15.** Tìm nghịch đảo của ma trận  $A$  sử dụng ma trận liên hợp:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

**GIẢI.** Ta có

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -35, C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 14,$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -13.$$

Định thức của  $A$  là

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1C_{11} + 3C_{12} + 1C_{13} \\ &= -35 + 3 \cdot 14 + (-13) = -6. \end{aligned}$$

Vì  $\det(A) \neq 0$  nên  $A$  khả nghịch. Ta tính các phần bù đại số còn lại của  $A$ :

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5, C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1, C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 17,$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = -8, C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 7.$$

Vậy, nghịch đảo của ma trận  $A$  là

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} -35 & 14 & -13 \\ 5 & -2 & 1 \\ 17 & -8 & 7 \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 35 & -5 & -17 \\ -14 & 2 & 8 \\ 13 & -1 & -7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Số lượng phép tính mà ta phải thực hiện để tính nghịch đảo của một ma trận vuông cỡ tương đối nhỏ là  $3 \times 3$  cũng đã khá nhiều. Với một ma trận vuông cỡ  $4 \times 4$ , để tính nghịch đảo sử dụng phương pháp ma trận liên hợp, ngoài tính định thức của  $A$ , tức là một định thức cỡ 4, ta còn phải tính 16 định thức cỡ 3. Khối lượng tính toán là rất lớn. Nói chung, với ma trận vuông cỡ lớn (cỡ lớn hơn hoặc bằng 4), tìm nghịch đảo của ma trận sử dụng thuật toán khử Gauss-Jordan là hiệu quả hơn về mặt tính toán so với phương pháp sử dụng ma trận liên hợp.

## BÀI TẬP

**2.33** [hint] Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Tìm nghịch đảo của  $A$  sử dụng thuật toán Gauss - Jordan.
- Tìm nghịch đảo của  $A$  sử dụng ma trận liên hợp.
- Nhận xét về hai cách làm trên.

**2.34** [hint] Tìm nghịch đảo của các ma trận sau sử dụng ma trận liên hợp.

- $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & 3 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(e) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

**2.35** [hint] Cho ma trận vuông

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

với  $a \in \mathbb{R}$  là một tham số. Tìm  $a$  để  $A$  khả nghịch. Với các giá trị này của  $a$ , tìm nghịch đảo  $A^{-1}$  sử dụng ma trận liên hợp.

### ĐỊNH LÝ CRAMER

**VÍ DỤ 2.3.16.** Xét hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \quad (2)$$

Giả sử ma trận hệ số khả nghịch. Chứng minh rằng hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

**CHỨNG MINH.** Hệ phương trình tuyến tính (2) tương đương với phương trình ma trận

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Vì ma trận hệ số  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  khả nghịch nên phương trình trên tương đương với

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Sử dụng công thức nghịch đảo của ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$ , ta được

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ -a_{21}b_1 + a_{11}b_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Do đó

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

và

$$x_2 = \frac{-a_{21}b_1 + a_{11}b_2}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

□

**ĐỊNH LÝ 2.3.17.** Nếu hệ phương trình tuyến tính

$$Ax = b$$

có ma trận hệ số  $A$  khả nghịch thì hệ có nghiệm duy nhất

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

trong đó  $A_j$  là ma trận nhận được từ  $A$  sau khi thay thế cột thứ  $j$  của  $A$  bởi cột hệ số tự do

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

với mọi  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**CHỨNG MINH.** Vì  $A$  khả nghịch nên phương trình  $Ax = b$  tương đương với

$$x = A^{-1}b.$$

Sử dụng công thức của ma trận nghịch đảo, ta được

$$x = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)b = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Suy ra

$$x = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_1 C_{11} + b_2 C_{21} + \cdots + b_n C_{n1} \\ b_1 C_{12} + b_2 C_{22} + \cdots + b_n C_{n2} \\ \vdots \\ b_1 C_{1n} + b_2 C_{2n} + \cdots + b_n C_{nn} \end{bmatrix}$$

Vậy

$$x_j = \frac{b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \cdots + b_n C_{nj}}{\det(A)}$$

Theo giả thiết, ta có

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ma trận  $A_j$  và ma trận  $A$  có tất cả các cột  $k \neq j$  giống nhau nên cần phần phụ đại số của  $A_j$  và của  $A$  ứng với các vị trí  $(i, j)$  là như nhau, với mọi  $i = 1, 2, \dots, n$ . Tính định thức của  $A_j$  bằng cách khai triển Laplace theo cột  $j$ , ta được

$$\det(A_j) = b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \cdots + b_n C_{nj}.$$

Vậy

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}.$$



**VÍ DỤ 2.3.18.** Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{array}{rrcrcl} x_1 & + & & + & 2x_3 & = & 6 \\ -3x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 30 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \end{array}$$

sử dụng công thức Cramer.

**GIẢI.** Định thức của ma trận hệ số  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$  là

$$\det(A) = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 4(5) + 2(12) = 44.$$

Vì  $\det(A) \neq 0$  nên ma trận hệ số  $A$  khả nghịch, và hệ có nghiệm duy nhất

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}.$$

Ta có

$$\begin{array}{ll} A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix} & \det(A_1) = -40 \\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} & \det(A_2) = 72 \\ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix} & \det(A_3) = 152 \end{array}$$

Vậy nghiệm duy nhất của hệ phương trình đã cho là

$$x_1 = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}, \quad x_2 = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}, \quad x_3 = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}.$$



**VÍ DỤ 2.3.19.** Giải hệ phương trình sau sử dụng công thức Cramer

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 10 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 4 \\ -3x_1 & +x_2 & +x_3 & = 2. \end{array}$$

**GIẢI.** Ma trận hệ số của hệ phương trình đã cho là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Định thức của  $A$  là  $\det(A) = -26$ . Vì  $\det(A) \neq 0$  nên theo định lý Cramer, hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, i = 1, 2, 3$$

trong đó

$$A_1 = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 1 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ta có

$$\det(A_1) = -10, \det(A_2) = 4, \det(A_3) = 86.$$

Vậy nghiệm duy nhất của hệ phương trình đã cho là

$$x_1 = \frac{-10}{-26} = \frac{5}{13}, x_2 = \frac{4}{-26}, x_3 = \frac{-86}{-26} = \frac{43}{13}.$$

□

## BÀI TẬP

**2.36** [hint] Giải các hệ phương trình tuyến tính sau sử dụng công thức Cramer.

$$(a) \quad \begin{array}{rrcr} 3x_1 & +x_2 & & = 5 \\ 7x_1 & -2x_2 & & = 3 \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{array}{rrcr} x & -3y & +z & = 4 \\ 2x & +2y & -3z & = -6 \\ 4x & -y & +2z & = -1 \end{array}$$

**2.37** [hint] Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{array}{rrcr} 3x & -y & +z & = 4 \\ -x & +7y & -2z & = 2 \\ 2x & +6y & -z & = 5 \end{array}$$

- (a) Giải hệ phương trình sử dụng công thức Cramer.
- (b) Giải hệ phương trình sử dụng phương pháp khử Gauss.
- (c) Trong hai cách giải hệ phương trình trên, cách nào cần ít tính toán hơn?

## BÀI TẬP TỔNG HỢP

---

**2.38** [hint] Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$ . Tính các định thức sau.

- (a)  $\det(2A)$
- (b)  $\det(A^3)$
- (c)  $\det(4A^{-1})$
- (d)  $\det(-A)$
- (e)  $\det((4A)^{-1})$
- (f)  $\det(3A^T)$

**2.39** [hint] Chứng minh rằng ma trận vuông  $A$  khả nghịch khi và chỉ khi ma trận tích  $A^T A$  cũng khả nghịch.

**2.40** [hint] Cho hệ phương trình tuyến tính  $Ax = b$  gồm  $n$  phương trình và  $n$  ẩn. Giả sử các phần tử của  $A$  và  $b$  đều là số nguyên và  $\det(A) = 1$ . Chứng minh rằng nghiệm  $x$  của hệ phương trình trên cũng gồm toàn số nguyên.

Cho ma trận vuông  $A$  cỡ  $2 \times 2$

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Hệ vectơ cột  $A$  là  $v_1 = (a, b)$ ,  $v_2 = (c, d)$ . Hai vectơ này sinh ra một hình bình hành trong  $\mathbb{R}^2$ . Diện tích của hình bình hành này bằng giá trị tuyệt đối của định thức của ma trận  $A$ . Đây là mục tiêu của 2 bài tập bên dưới. Ký hiệu  $\text{Area}(A)$  diện tích của hình bình hành này.

Cho ma trận vuông  $A$  cỡ  $3 \times 3$ . Ký hiệu  $\text{Vol}(A)$  thể tích hình hộp sinh ra từ các vectơ cột của  $A$ . Trong các bài tập bên dưới, ta sẽ chứng minh  $\text{Vol}(A) = |\det(A)|$ .

## BÀI TẬP

**2.41** [hint] Cho ma trận  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

$$A \xrightarrow{-\frac{1}{3}C_1 + C_2 \rightarrow C_2} B \xrightarrow{-\frac{5}{3}C_2 + C_1 \rightarrow C_1} C$$

- Xác định các ma trận  $B$  và  $C$ .
- Vẽ hình trên cùng mặt phẳng  $\mathbb{R}^2$  các vectơ cột của các ma trận  $A, B, C$  và hình bình hành tương ứng.
- Nhận xét về  $\det(A), \det(B)$  và  $\det(C)$ .
- Nhận xét về  $\text{Area}(A), \text{Area}(B)$  và  $\text{Area}(C)$ .
- So sánh  $\text{Area}(C)$  và  $\det(C)$ . Từ đó suy ra,  $\text{Area}(A) = \det(A)$ .

**2.42** [hint] Cho ma trận vuông  $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ . Giả sử  $\det(A) \neq 0$ . Chứng minh rằng diện tích hình bình hành sinh ra từ các vectơ cột của  $A$  bằng giá trị tuyệt đối của định thức của  $A$ , tức là

$$\text{Area}(A) = |\det(A)|.$$

**2.43** [hint] Chứng minh rằng diện tích tam giác  $OM_1M_2$  với  $O(0,0)$ ,  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$  là

$$\frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \right|.$$

**2.44** [hint] Cho tam giác với ba đỉnh là  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$  và  $M_3(x_3, y_3)$ .

- Tính diện tích tam giác  $M_1M_2M_3$  từ diện tích các tam giác  $OM_1M_2, OM_2M_3, OM_1M_3$ .
- Chứng minh rằng diện tích tam giác  $M_1M_2M_3$  là

$$\frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} \right|.$$

(c) Chứng minh rằng diện tích tam giác  $M_1M_2M_3$  là

$$\frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \right|.$$

**2.45** [hint] Cho tam giác với ba đỉnh là  $M_1(x_1, x_2)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$  và  $M_3(x_3, y_3)$ .

(a) Chứng minh rằng diện tích tam giác  $M_1M_2M_3$  là

$$\frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \right|.$$

(b) Chứng minh rằng diện tích tam giác  $M_1M_2M_3$  là

$$\frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \right|.$$

## ÔN TẬP CHƯƠNG 2

---

**2.46** [hint] Tính định thức

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

**2.47** [hint] Tính các định thức sau đây

(a)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

**2.48** [hint] Cho  $A \in M_{n \times n}$  là một ma trận phản đối xứng.

(a) Giả sử  $n$  lẻ. Chứng minh rằng  $A$  không khả nghịch.

- (b) Nếu bỏ giả thiết  $n$  lẻ, kết luận  $A$  không khả nghịch còn đúng nữa không?

**2.49** [hint] Tìm nghịch đảo của các ma trận sau bằng phương pháp khử Gauss-Jordan và phương pháp ma trận liên hợp

(a)  $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

**2.50** [hint] Sử dụng công thức Cramer, tính  $x'$  và  $y'$  theo  $x$  và  $y$

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta + y' \sin \theta \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta. \end{aligned}$$

**2.51** [hint] Giải biện luận hệ phương trình sau theo các tham số  $\alpha$  và  $\beta$

$$\begin{aligned} x + y + \alpha z &= 0 \\ x + y + \beta z &= 0 \\ \alpha z + \beta y + z &= 0 \end{aligned}$$

**2.52** [hint] Cho ma trận  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  với  $a_{ij} = 0$  hoặc 1. Tìm giá trị lớn nhất của  $\det(A)$ .

**2.53** [hint] Cho  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  với  $a_{ij} = 0$  hoặc 1. Tìm giá trị lớn nhất của  $\det(A)$ .

**2.54** [hint] Giả sử tổng các phần tử trong mỗi hàng của ma trận  $A$  bằng không. Chứng minh rằng  $\det(A) = 0$ .

**2.55** [hint] Cho  $A$  là một ma trận khả nghịch. Chứng minh rằng  $\text{adj}(A)$  cũng khả nghịch và

$$[\text{adj}(A)]^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A = \text{adj}(A^{-1}).$$

**2.56** [hint] Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$ . Chứng minh rằng  $\det[\text{adj}(A)] = [\det(A)]^{n-1}$ .

**2.57** [hint] Biết rằng các số

$$21375, 38798, 34162, 40223, 79154$$

đều chia hết cho 19. Không tính tường minh, chứng minh rằng định thức

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

chia hết cho 19.

**2.58** [hint] Sáng tạo hai bài toán có nội dung tương tự như bài tập trên.

## GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 2

---

**2.7.**  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . Tính tường minh  $\det(A)$ ,  $\text{tr}(A)$ ,  $\text{tr}(A^2)$  theo  $a, b, c, d$ .

**2.8.** Định thức của ma trận bằng không nếu ma trận có một hàng gồm toàn không hoặc có một cột gồm toàn không.

**2.9.** Định thức của ma trận bằng không nếu ma trận có một hàng gồm toàn không hoặc có một cột gồm toàn không.

**2.11.** Quy nạp theo cỡ của ma trận và sử dụng công thức khai triển Laplace của định thức.

**2.12.** Ba điểm  $A, B$ , và  $C$  thẳng hàng khi và chỉ khi hai vec tơ  $\overrightarrow{AB}$  cùng phương với nhau.

**2.13.** Để có phương trình đường thẳng, ta cần tìm điều kiện cần và đủ cho  $x$  và  $y$  để ba điểm  $(x, y)$ ,  $(a_1, b_1)$  và  $(a_2, b_2)$  thẳng hàng.

**2.17.** Định thức cần tính thu được từ định thức cho trong đề bài sau một số phép biến đổi sơ cấp theo hàng và cột.

**2.21.** Vì ma trận có rất nhiều phần tử bằng không nên ta sẽ sử dụng những phép khai triển Laplace một cách thích hợp.

Ngoài ra, hãy tìm cách tính một cách quy nạp, tính  $D_3$  qua  $D_2$ , tính  $D_4$  qua  $D_3, \dots$

**2.23.** Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng hoặc theo cột để đưa định thức bên vế trái thành định thức bên vế phải.

- (a) Quan sát định thức hai vế, ta thấy nên khử các  $a_it$  ở phần tử hàng 2 và khử các  $b_it$  ở các phần tử ở hàng 1 của định thức vế bên trái. Ta có

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} a_1 + b_1t & a_2 + b_2t & a_3 + b_3t \\ a_1t + b_1 & a_2t + b_2 & a_3t + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &\stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} a_1 + b_1t & a_2 + b_2t & a_3 + b_3t \\ b_1 - b_1t^2 & b_2 - b_2t^2 & b_3 - b_3t^2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{(2)}{=} (1 - t^2) \begin{vmatrix} a_1 + b_1t & a_2 + b_2t & a_3 + b_3t \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{(3)}{=} (1 - t^2) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Ta có đẳng thức (1) vì thực hiện phép biến đổi  $-tH_1 + H_2 \rightarrow H_2$ , đẳng thức (2) vì các phần tử ở hàng 2 đều có nhân tử  $(1 - t^2)$ , đẳng thức (3) vì thực hiện phép biến đổi  $-tH_2 + H_1 \rightarrow H_1$ .

- (b) Quan sát định thức ở hai vế ta thấy nên khử các  $b_i$  ở các phần tử của cột 1 và khử các  $a_i$  ở các phần tử của cột 2 của định thức bên vế trái. Ta có

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 - b_1 & c_1 \\ a_1 + b_2 & a_2 - b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 & a_3 - b_3 & c_3 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2a_1 & a_1 - b_1 & c_1 \\ 2a_2 & a_2 - b_2 & c_2 \\ 2a_3 & a_3 - b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
 & = 2 \begin{vmatrix} a_1 & a_1 - b_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 - b_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 - b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
 & \stackrel{(2)}{=} -2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
 & \stackrel{(3)}{=} -2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Ta có đẳng thức (1) vì thực hiện phép biến đổi  $C_2 + C_1 \rightarrow C_1$ , đẳng thức (2) vì thực hiện phép biến đổi  $C_1 - C_2 \rightarrow C_2$ , đẳng thức (3) vì thực hiện chuyển vị.

**2.28.** Cần chia định thức đã cho thành các khối để nó trở thành định thức của một ma trận tam giác theo khối.

**2.39.** Mọi ma trận vuông là khả nghịch khi và chỉ khi định thức của nó khác không.

**2.40.** Sử dụng định lý Cramer.

**2.47.** Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng hoặc cột của ma trận để tạo ra cột hoặc hàng có hầu hết phần tử bằng không. Sau đó, khai triển Laplace theo cột hoặc theo hàng này.

**2.48.** Theo định nghĩa, ma trận  $A$  là phản đối xứng khi và chỉ khi  $A^T = -A$ . Tính định thức hai vế.

**2.51.** . Khử Gauss ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính, sau đó biện luận tùy thuộc vào các hệ số đầu của các hàng của ma trận bậc thang.

**2.55.** Với một ma trận vuông  $A$  bất kỳ, ta có  $A[\text{adj}(A)] = \det(A)I$ .

**2.56.** Sử dụng công thức  $A[\text{adj}(A)] = \det(A)I$ .

**2.57.** Quan sát các số chia hết cho 19 cho trong đề bài và các phần tử trong mỗi hàng của định thức. Mặt khác, theo phân tích cấu tạo số

$$21375 = 2 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5.$$





# 3

## Không Gian Vectơ Hình Học $\mathbb{R}^n$

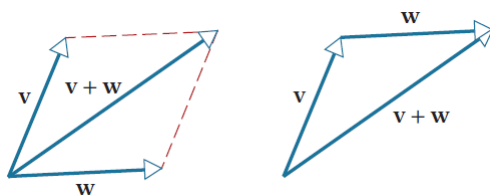
### 3.1 KHÔNG GIAN VÉCTƠ $\mathbb{R}^n$

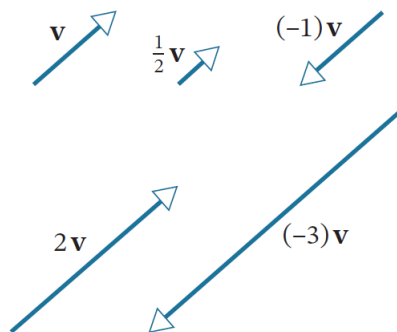
---

#### VÉCTƠ TRONG $\mathbb{R}^2$ VÀ $\mathbb{R}^3$

Một véc tơ hình học được hiểu là một đoạn thẳng có hướng. Các véc tơ hình học trong mặt phẳng  $\mathbb{R}^2$  và trong không gian  $\mathbb{R}^3$  đã được học từ toán học bậc THPT. Véc tơ hình học có nguồn gốc từ vật lý, kỹ thuật, khi mà chúng ta muốn nói đến những đại lượng không những có độ lớn mà còn có cả hướng.

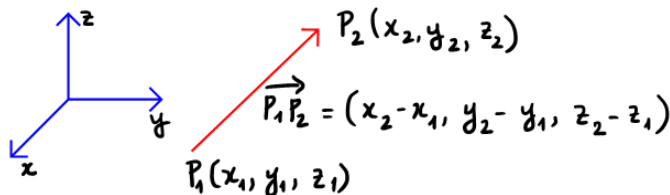
Các phép toán trên véc tơ được định nghĩa một cách hình học. Phép cộng véc tơ được thực hiện nhờ quy tắc tam giác hoặc quy tắc hình bình hành.





Các véc tơ có thể được số hóa bằng cách trang bị một hệ trục tọa độ  $Oxy$  trong mặt phẳng  $\mathbb{R}^2$  hoặc một hệ trục tọa độ  $Oxyz$  trong  $\mathbb{R}^3$ . Nếu điểm  $P_1$  có tọa độ là  $(x_1, y_1, z_1)$ , điểm  $P_2$  có tọa độ  $(x_2, y_2, z_2)$  thì véc tơ  $\overrightarrow{P_1P_2}$  là một véc tơ ba thành phần

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$



Tọa độ hóa véc tơ trong không gian  $\mathbb{R}^3$

Một cách tổng quát, một véc tơ trong  $\mathbb{R}^3$  là một bộ ba số thực sắp thứ tự  $(x, y, z)$ , một véc tơ trong  $\mathbb{R}^2$  là một cặp hai số thực sắp thứ tự  $(x, y)$ . Ta dễ dàng thực hiện phép toán trên véc tơ ở dạng tọa độ

$$\begin{aligned}(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ k(x, y, z) &= (kx, ky, kz).\end{aligned}$$

### VÉC TƠ TRONG $\mathbb{R}^n$

Không dễ để tổng quát hóa khái niệm véc tơ hình học, nhưng lại dễ dàng tổng quát hóa véc tơ ở dạng tọa độ. Ta cho phép số thành phần của véc tơ là bất kỳ, thay vì là 2 hoặc 3.

**ĐỊNH NGHĨA 3.1.1.** Cho  $n$  là một số nguyên dương. Một **véc tơ  $n$  thành phần** là một bộ sắp thứ tự của  $n$  số thực

$$v = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Tập hợp tất cả các véc tơ  $n$  thành phần là **không gian véc tơ  $\mathbb{R}^n$** .

Các phép toán trên các véc tơ trong  $\mathbb{R}^n$  được định nghĩa bằng cách mở rộng tự nhiên cách tính trong  $\mathbb{R}^2$  và  $\mathbb{R}^3$ .

**ĐỊNH NGHĨA 3.1.2.** Hai véc tơ  $v = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  và  $w = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  trong  $\mathbb{R}^n$  được gọi là **bằng nhau** và ký hiệu là  $v = w$  nếu

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n.$$

**ĐỊNH NGHĨA 3.1.3.** Cho  $v = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  và  $w = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  trong  $\mathbb{R}^n$  và  $k \in \mathbb{R}$ .

- ▷ **Véc tơ không** là véc tơ  $0 = (0, 0, \dots, 0)$ .
- ▷ **Tổng** của  $v$  với  $w$  là  $v + w = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ .
- ▷ **Tích** của số  $k$  với véc tơ  $v$  là  $kv = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$ .
- ▷ **Véc tơ đối** của  $v$  là  $-v = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ .
- ▷ **Hiệu** của  $v$  với  $w$  là  $v - w = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$ .

**VÍ DỤ 3.1.4.** Cho các véc tơ  $u = (1, 2, 3, 4)$ ,  $v = (-1, 5, 2, 1)$  và  $w = (6, -2, 1, 3)$  trong không gian véc tơ  $\mathbb{R}^4$ . Tính

- (a)  $v + w$
- (b)  $2(v - 3w)$
- (c)  $2(u - v) - (3v + w)$

**GIẢI.** (a) Ta có

$$\begin{aligned} v + w &= (-1, 5, 2, 1) + (6, -2, 1, 3) \\ &= (-1 + 6, 5 + (-2), 2 + 1, 1 + 3) \\ &= (5, 3, 3, 4). \end{aligned}$$

(b) Ta có

$$\begin{aligned} v - 3w &= (-1, 5, 2, 1) - 3(6, -2, 1, 3) \\ &= (-2, 5, 2, 1) - (18, -6, 3, 9) \\ &= (-19, 11, -1, -8) \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} 2(v - 3w) &= 2(-19, 11, -1, -8) \\ &= (-38, 22, -2, -16). \end{aligned}$$

(c) Ta có

$$\begin{aligned} 2(u - v) - (3v + w) &= 2u - 2v - 3v - w \\ &= 2u - 5v - w \end{aligned}$$

Do đó, véctơ cần tính là

$$\begin{aligned} &2(1, 2, 3, 4) - 5(-1, 5, 2, 1) - (6, -2, 1, 3) \\ &= (2, 4, 6, 8) - (-5, 25, 10, 5) - (6, -2, 1, 3) \\ &= (1, -19, -5, 0). \end{aligned}$$

□

Sau đây là các tính chất cơ bản nhất của phép toán véctơ.

**ĐỊNH LÝ 3.1.5.** Cho  $u, v, w$  là các véctơ trong  $\mathbb{R}^n$  và  $k, m$  là các số thực. Khi đó

- (a)  $u + v = v + u$
- (b)  $(u + v) + w = u + (v + w)$
- (c)  $u + 0 = u = 0 + u$
- (d)  $u + (-u) = 0$
- (e)  $k(u + v) = ku + kv$
- (f)  $(k + m)u = ku + mu$
- (g)  $k(mu) = (km)u$
- (h)  $1u = u$ .

Các tính chất này đã được sử dụng một cách thường xuyên trong  $\mathbb{R}^2$  và  $\mathbb{R}^3$ . Ta có thể dự đoán rằng chúng vẫn đúng trong  $\mathbb{R}^n$  tổng quát. Tuy nhiên, để chắc chắn, cần phải thực hiện chứng minh.

Mệnh đề sau có thể được chứng minh dựa vào định nghĩa, hoặc dựa vào các tính chất cơ bản được mô tả trong định lý trên.

**MỆNH ĐỀ 3.1.6.** Cho  $v$  là một véctơ trong  $\mathbb{R}^n$  và  $k \in \mathbb{R}$ . Khi đó

- (a)  $0v = 0$
- (b)  $k0 = 0$
- (c)  $(-1)v = -v$ .

## BÀI TẬP

**3.1** [hint] Cho các véctơ  $u = (-1, 3, 7, 2)$ ,  $v = (2, 1, -4, 3)$  và  $w = (-5, -3, 1, 2)$  trong không gian véctơ  $\mathbb{R}^4$ . Tìm véctơ  $x \in \mathbb{R}^4$  thỏa mãn

$$2u - 3v + w = 3(x + v).$$

**3.2** [hint] Tìm  $a$  và  $b$  để hai véctơ sau cùng phương với nhau

$$u = (-2, 1, 0, a, 4), \quad v = (6, b, 0, 5, -12).$$

**3.3** [hint] Cho các véctơ  $u = (-1, 1, 0, 1, 2)$  và  $v = (2, 0, 1, 3, -2)$ . Tìm các số thực  $a$  và  $b$  trong biểu thị tuyến tính

$$(7, -1, 3, 8, -8) = au + bv.$$

**3.4** [hint] Trong không gian véctơ  $\mathbb{R}^4$ , véctơ  $(2, -2, 1, 3)$  có phải là một tổ hợp tuyến tính của các véctơ

$$v_1 = (-2, 0, 1, 1), \quad v_2 = (1, 0, 1, 0), \quad v_3 = (1, 0, 2, 2).$$

hay không?

**3.5** [hint] Xác định khẳng định đúng tổng các phát biểu, trong đó  $u, v$  và  $w$  là các véctơ có cùng số thành phần.

- (a) Các véctơ  $(u + v) + w$  và  $u + (v + w)$  bằng nhau.
- (b) Các véctơ  $(a, b)$  và  $(a, b, 0)$  bằng nhau.
- (c) Nếu  $k$  là một vô hướng và  $v$  là một véctơ thì hai véctơ  $v$  và  $kv$  cùng phương với nhau khi và chỉ khi  $k \geq 0$ .

**3.6** [hint] Xác định khẳng định đúng trong các phát biểu sau, trong đó  $u, v$  và  $w$  là các véctơ có cùng số thành phần.

- (a) Trong các không gian véctơ  $\mathbb{R}^2$  và  $\mathbb{R}^3$ , các véctơ cùng phương và cùng độ dài là bằng nhau.
- (b) Nếu  $u + v = u + w$  thì  $v = w$ .
- (c) Các tổ hợp tuyến tính  $au + bv$  và  $cu + dv$  bằng nhau khi và chỉ khi  $a = c$  và  $b = d$ .

### 3.2 TÍCH VÔ HƯỚNG EUCLID

Các khái niệm độ dài của véctơ, góc giữa hai véctơ và tích vô hướng của hai véctơ có thể dễ dàng được tổng quát hóa từ  $\mathbb{R}^2$  và  $\mathbb{R}^3$  đến  $\mathbb{R}^n$  với  $n$  bất kỳ. Vì độ dài và góc có thể định nghĩa qua tích vô hướng, nên ta bắt đầu và nhấn mạnh vào tích vô hướng.

Công thức tính vô hướng của hai véctơ trong  $\mathbb{R}^2$  và  $\mathbb{R}^3$  lần lượt là

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.\end{aligned}$$

**ĐỊNH NGHĨA 3.2.1.** *Tích vô hướng Euclid* của hai véctơ  $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  và  $v = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  trong  $\mathbb{R}^n$  là

$$u \cdot v = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Tích vô hướng Euclid trong  $\mathbb{R}^n$  có các tính chất cơ bản giống như tích vô hướng quen thuộc trong  $\mathbb{R}^2$  và  $\mathbb{R}^3$ .

**ĐỊNH LÝ 3.2.2.** Cho  $u, v, w$  là các véctơ trong  $\mathbb{R}^n$ , và  $k \in \mathbb{R}$ . Khi đó

- (a)  $u \cdot v = v \cdot u$
- (b)  $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
- (c)  $k(u \cdot v) = (ku) \cdot v$
- (d)  $v \cdot v \geq 0$  và  $v \cdot v = 0$  khi và chỉ khi  $v = 0$ .

**CHỨNG MINH.** Đặt  $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $v = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  và  $w = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ .

(a) Sử dụng tính chất giao hoán của phép nhân các số, ta có

$$\begin{aligned}u \cdot v &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \\ &= b_1 a_1 + b_2 a_2 + \dots + b_n a_n\end{aligned}$$

$$= v \cdot u.$$

(b) Ta có

$$v + w = (b_1 + c_1, b_2 + c_2, \dots, b_n + c_n).$$

Sử dụng tính chất phân phối giữa hai phép toán cộng và nhân, ta có

$$\begin{aligned} u \cdot (v + w) &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + \dots + a_n(b_n + c_n) \\ &= (a_1b_1 + a_1c_1) + (a_2b_2 + a_2c_2) + \dots + (a_nb_n + a_nc_n) \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) + (a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n) \\ &= u \cdot v + u \cdot w. \end{aligned}$$

(c) Ta có

$$\begin{aligned} k(u \cdot v) &= k(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \\ &= ka_1b_1 + ka_2b_2 + \dots + ka_nb_n \\ &= (ku) \cdot v \end{aligned}$$

(d) Ta có

$$v \cdot v = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2.$$

Suy ra  $v \cdot v \geq 0$  với mọi  $v$ . Hơn nữa,  $v \cdot v = 0$  khi và chỉ khi  $b_i = 0$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, n$ , tức là  $v = 0$ .  $\square$

Sử dụng kết quả trên, không cần sử dụng định nghĩa của tích vô hướng Euclid, ta chứng minh được khẳng định sau.

**MỆNH ĐỀ 3.2.3.** Cho  $u, v, w$  là các véc tơ trong  $\mathbb{R}^n$  và  $k \in \mathbb{R}$ . Khi đó

- (a)  $0 \cdot v = 0 = v \cdot 0$ .
- (b)  $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$ .
- (c)  $u \cdot (v - w) = u \cdot v - u \cdot w$ .
- (d)  $(u - v) \cdot w = u \cdot w - v \cdot w$ .
- (e)  $k(u \cdot v) = u \cdot (kv)$ .

**VÍ DỤ 3.2.4.** Cho  $u, v$  là các véc tơ trong  $\mathbb{R}^n$  với

$$u \cdot u = 1, \quad u \cdot v = 2, \quad v \cdot v = 3.$$

Tính  $(u - 2v) \cdot (2u + 4v)$ .

**ĐỊNH NGHĨA 3.2.5.** *Độ dài Euclid* của một véc tơ  $v = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  trong  $\mathbb{R}^n$  là

$$|v| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}.$$

**VÍ DỤ 3.2.6.** Tính độ dài của véc tơ  $v = (2, -1, 3, -5)$  trong  $\mathbb{R}^4$ .

**GIẢI.** Ta có

$$v \cdot v = (2)^2 + (-1)^2 + (3)^2 + (-5)^2 = 39.$$

Suy ra, độ dài của véc tơ  $v$  là  $|v| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{39}$ . □

Các tính chất cơ bản của độ dài sau đây được suy ra từ tính chất của tích vô hướng Euclid.

**ĐỊNH LÝ 3.2.7.** Cho  $v$  là một véc tơ trong  $\mathbb{R}^n$  và  $v \in \mathbb{R}$ . Khi đó

- (a)  $|v| \geq 0$ .
- (b)  $|v| = 0$  khi và chỉ khi  $v = 0$ .
- (c)  $|kv| = |k| |v|$

**ĐỊNH LÝ 3.2.8 (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz).** Cho các véc tơ  $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  và  $v = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  trong  $\mathbb{R}^n$ . Khi đó

$$|u \cdot v| \leq |u| |v|.$$

Ở dạng tọa độ, ta có

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$$

## GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 3



# 4

## Không Gian Vectơ Tổng Quát

### 4.1 KHÔNG GIAN VECTƠ TỔNG QUÁT

Trong mục này, chúng ta định nghĩa khái niệm không gian véc tơ tổng quát, và trình bày một số ví dụ cơ bản về không gian véc tơ. Nhắc lại rằng trong chương trình toán học THPT, véc tơ được hiểu một cách hình học là một đoạn thẳng có hướng. Sau khi tọa độ hóa mặt phẳng và không gian, véc tơ trở thành một cặp số thực, hoặc một bộ sắp thứ tự của 3 số thực. Ta có thể mở rộng các véc tơ 2 hoặc 3 thành phần này thành các véc tơ  $n$  thành phần. Các véc tơ  $n$  thành phần này có các tính chất cơ bản giống hệt như véc tơ 2 hoặc 3 thành phần. Sử dụng các tính chất cơ bản này như là các tiên đề, ta nhận được khái niệm không gian véc tơ tổng quát.

#### CÁC TIÊN ĐỀ KHÔNG GIAN VECTƠ

**ĐỊNH NGHĨA 4.1.1.** Cho  $V$  là một tập hợp không rỗng bất kỳ, trang bị hai phép toán gọi là phép cộng và phép nhân với vô hướng. Phép cộng là một quy tắc tạo ra một phần tử  $u + v$  với mọi  $u, v \in V$ ; phép nhân với vô hướng là một quy tắc tạo ra một phần tử  $av$  với mọi  $a \in \mathbb{R}$  và  $v \in V$ .

Tập hợp  $V$  trang bị hai phép toán này được gọi là một **không gian véc tơ** và các phần tử của  $V$  được gọi là các **véc tơ** nếu với mọi  $u, v, w$  trong  $V$  và với mọi vô hướng  $k, m$ , các tiên đề sau đây được

thỏa mãn.

1. (V1) Nếu  $u$  và  $v$  là các phần tử của  $V$  thì  $u + v$  cũng là một phần tử của  $V$ .
2. (V2)  $u + v = v + u$ .
3. (V3)  $u + (v + w) = (u + v) + w$ .
4. (V4) Tồn tại một phần tử  $0$ , gọi là **véc tơ không**, trong  $V$ , gọi là véc tơ không, sao cho  $0 + u = u = u + 0$ .
5. (V5) Với mọi phần tử  $u \in V$ , tồn tại một phần tử  $-u \in V$ , gọi là **véc tơ đối** của  $u$ , sao cho  $u + (-u) = 0 = (-u) + u$ .
6. (V6) Với mọi vô hướng  $k$  và mọi phần tử  $u \in V$ , tích  $ku$  cũng thuộc  $V$ .
7. (V7)  $k(u + v) = ku + kv$
8. (V8)  $(k + m)u = ku + mu$
9. (V9)  $k(mu) = (km)u$
10. (V10)  $1u = u$ .

Theo định nghĩa, mỗi phần tử trong một không gian véc tơ được gọi là một véc tơ. Như vậy, các đối tượng mà trên đó ta có thể thực hiện các phép toán cộng, và nhân với vô hướng, sao cho các phép toán này có các tiên đề bên trên đều gọi là véc tơ.

Phép toán trừ của các véc tơ được định nghĩa sử dụng phép toán cộng và véc tơ đối:

$$u - v = u + (-v).$$

Trong định nghĩa trên, mỗi vô hướng được hiểu là một số thực, và ta có khái niệm không gian véc tơ thực.

Bằng cách cho phép mỗi vô hướng là một số phức, ta sẽ có khái niệm không gian véc tơ phức. Tương tự, nếu lấy vô hướng là các số hữu tỉ, ta sẽ có khái niệm không gian véc tơ hữu tỉ. Một cách tổng quát, ta có thể định nghĩa không gian véc tơ mà vô hướng là các phần tử thuộc một trường số bất kỳ. Ở đây, một trường số là một tập số mà trên đó ta có thể thực hiện bốn phép toán số học cộng, trừ, nhân, chia giống như với các số thực, số phức, số hữu tỉ.

Trong giáo trình này, ta chủ yếu xét các không gian véc tơ thực. Không gian véc tơ phức chỉ được đề cập một cách sơ lược ở một số mục.

Các bước chứng minh một tập hợp trang bị hai phép toán là một không gian véc tơ

1. Bước 1. Xác định tập  $V$  mà ta muốn chứng minh nó là một không gian véc tơ.
2. Bước 2. Xác định phép toán cộng và phép toán nhân với vô hướng trên  $V$ .
3. Bước 3. Kiểm tra hai tiên đề (V1) và (V6). Tiên đề (V1) được gọi là **đóng với phép cộng**, tiên đề (V6) được gọi là **đóng với phép nhân với vô hướng**.
4. Bước 4. Kiểm tra 8 tiên đề còn lại.

Lưu ý rằng cần phải kiểm tra đầy đủ cả 10 tiên đề. Chỉ cần một tiên đề không thỏa mãn, thì tập hợp  $V$  trang bị hai phép toán cộng và nhân với vô hướng không phải là một không gian véc tơ. Trong trường hợp này, trong phần chứng minh, ta chỉ cần chỉ rõ tiên đề không thỏa mãn.

Việc kiểm tra cả 10 tiên đề thường khá dài, mặc dù không khó.

Ví dụ cơ bản và quan trọng nhất về các không gian véc tơ, là các không gian véc tơ  $\mathbb{R}^n$  sau đây. Các không gian véc tơ  $\mathbb{R}^2$  và  $\mathbb{R}^3$  đã được học chi tiết trong chương trình toán học THPT. Các không gian véc tơ  $\mathbb{R}^n$  là sự tổng quát hóa trực tiếp của  $\mathbb{R}^2$  và  $\mathbb{R}^3$  khi mà chúng ta không giới hạn số thành phần trong một véc tơ là 2 hoặc 3.

**VÍ DỤ 4.1.2.** Với mỗi số nguyên dương  $n$ , tập hợp

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : \text{các } a_i \text{ thuộc } \mathbb{R} \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, n\}$$

là một không gian véc tơ với hai phép toán cộng và nhân với vô hướng cho bởi

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

$$k(a_1, a_2, \dots, a_n) = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n).$$

Trong không gian véc tơ  $\mathbb{R}^n$ , mỗi véc tơ là một bộ sắp thứ tự của  $n$  số thực.

**GIẢI.** Vì tổng của hai số thực và tích của hai số thực lại là số thực, nên tổng  $u + v$  và tích  $ku$  thuộc  $\mathbb{R}^n$  với mọi  $u, v \in \mathbb{R}^n$  và  $k \in \mathbb{R}$ . Như vậy, hai tiên đề (V1) và (V6) thỏa mãn.

Ta kiểm tra 8 tiên đề còn lại như sau. Cho  $k, m \in \mathbb{R}$  và

$$u = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad v = (b_1, b_2, \dots, b_n), \quad w = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

trong  $\mathbb{R}^n$  bất kỳ.

▷ Chứng minh tiên đề (V2):  $u + v = v + u$ . Ta có

$$\begin{aligned} u + v &= (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \\ &= (b_1 + a_1, b_2 + a_2, \dots, b_n + a_n) \\ &= (b_1, b_2, \dots, b_n) + (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= v + u. \end{aligned}$$

Ta đã sử dụng tính chất giao hoán của phép cộng trong đẳng thức thứ ba.

▷ Chứng minh tiên đề (V3):  $u + (v + w) = (v + u) + w$ . Ta có

$$\begin{aligned} u + (v + w) &= (a_1, a_2, \dots, a_n) + ((b_1, b_2, \dots, b_n) + (c_1, c_2, \dots, c_n)) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2, \dots, b_n + c_n) \\ &= (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), \dots, a_n + (b_n + c_n)) \\ &= ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, \dots, (a_n + b_n) + c_n) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) + (c_1, c_2, \dots, c_n) \\ &= ((a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)) + (c_1, c_2, \dots, c_n) \\ &= (u + v) + w. \end{aligned}$$

Ta đã sử dụng tính chất kết hợp của phép toán cộng số thực trong đẳng thức thứ tư.

▷ Chứng minh tiên đề (V4): tồn tại véc tơ không 0. Đặt  $0 = (0, 0, \dots, 0)$ .

Ta có

$$\begin{aligned} u + 0 &= (a_1, a_2, \dots, a_n) + (0, 0, \dots, 0) \\ &= (a_1 + 0, a_2 + 0, \dots, a_n + 0) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= u, \\ 0 + u &= u + 0 \\ &= u. \end{aligned}$$

Do đó, véc tơ không là  $0 = (0, 0, \dots, 0)$ .

▷ Chứng minh tiên đề (V5): tồn tại véc tơ đối. Đặt

$$-u = -(a_1, a_2, \dots, a_n) = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n).$$

Ta có

$$\begin{aligned}
 u + (-u) &= (a_1, a_2, \dots, a_n) + (-a_1, -a_2, \dots, -a_n) \\
 &= (a_1 + (-a_1), a_2 + (-a_2), \dots, a_n + (-a_n)) \\
 &= (0, 0, \dots, 0) \\
 &= 0, \\
 (-u) + u &= u + (-u) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Do đó, véc tơ đối của véc tơ  $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  là  $-u = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ .

▷ Chứng minh tiên đề (V7):  $k(u + v) = ku + kv$ . Ta có

$$\begin{aligned}
 k(u + v) &= k((a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)) \\
 &= k(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \\
 &= (k(a_1 + b_1), k(a_2 + b_2), \dots, k(a_n + b_n)) \\
 &= (ka_1 + kb_1, ka_2 + kb_2, \dots, ka_n + kb_n) \\
 &= (ka_1, ka_2, \dots, ka_n) + (kb_1, kb_2, \dots, kb_n) \\
 &= k(a_1, a_2, \dots, a_n) + k(b_1, b_2, \dots, b_n) \\
 &= ku + kv
 \end{aligned}$$

▷ Chứng minh tiên đề (V8):  $k(u + v) = ku + kv$ . Ta có

$$\begin{aligned}
 (k + m)u &= (k + m)(a_1, a_2, \dots, a_n) \\
 &= ((k + m)a_1, (k + m)a_2, \dots, (k + m)a_n) \\
 &= (ka_1 + ma_1, ka_2 + ma_2, \dots, ka_n + ma_n) \\
 &= (ka_1, ka_2, \dots, ka_n) + (ma_1, ma_2, \dots, ma_n) \\
 &= k(a_1, a_2, \dots, a_n) + m(b_1, b_2, \dots, b_n) \\
 &= ku + mu
 \end{aligned}$$

▷ Chứng minh tiên đề (V8):  $k(mu) = (km)u$ . Ta có

$$\begin{aligned}
 k(mu) &= k(m(a_1, a_2, \dots, a_n)) \\
 &= k(ma_1, ma_2, \dots, ma_n) \\
 &= (k(ma_1), k(ma_2), \dots, k(ma_n)) \\
 &= ((km)a_1, (km)a_2, \dots, (km)a_n) \\
 &= (km)(a_1, a_2, \dots, a_n) \\
 &= (km)u
 \end{aligned}$$

▷ Chứng minh tiên đề (V10):  $1u = u$ . Ta có

$$\begin{aligned}
1u &= 1(a_1, a_2, \dots, a_n) \\
&= (1a_1, 1a_2, \dots, 1a_n) \\
&= (a_1, a_2, \dots, a_n) \\
&= u.
\end{aligned}$$

Vì cả 10 tiên đề không gian véc tơ đều thỏa mãn, nên  $\mathbb{R}^n$  với hai phép toán cộng và nhân với vô hướng như trên là một không gian véc tơ.  $\square$

Trong ví dụ trên, chứng minh là không khó, nhưng dài và phải làm cẩn thận, sử dụng chính xác định nghĩa.

Ta mong muốn có cách làm nào đó tổng quát và hiệu quả hơn để chứng minh một tập hợp trang bị hai phép toán cộng và nhân với vô hướng lập thành một không gian véc tơ, thay vì phải lặp đi lặp lại việc kiểm tra đầy đủ cả 10 tiên đề không gian véc tơ.

**Ví dụ 4.1.3.** Cho  $\mathbb{R}^\infty$  là tập hợp các dãy vô hạn các số thực

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots).$$

Trên tập hợp này, trang bị hai phép toán cộng và nhân với vô hướng như sau

$$\begin{aligned}
(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) + (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots) \\
k(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) &= (ka_1, ka_2, \dots, ka_n, \dots).
\end{aligned}$$

Khi đó,  $\mathbb{R}^\infty$  là một không gian véc tơ. Trong không gian véc tơ  $\mathbb{R}^\infty$ , mỗi véc tơ là một dãy số thực.

**Ví dụ 4.1.4.** Cho  $\{0\}$  là một tập hợp có đúng một phần tử. Ta định nghĩa hai phép toán cộng và nhân với vô hướng trên  $\{0\}$  bởi công thức

$$0 + 0 = 0, \quad k0 = 0$$

với mọi  $k \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $\{0\}$  trở thành một không gian véc tơ, gọi là **không gian véc tơ không**. Đây là không gian véc tơ có ít phần tử nhất có thể.

**VÍ DỤ 4.1.5.** Tập hợp  $M_{2 \times 2}$  của các ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$  với hệ số thực là một không gian véc tơ với hai phép toán cộng ma trận và nhân số với ma trận quen thuộc

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

$$k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}$$

Véc tơ không trong  $M_{2 \times 2}$  chính là ma trận không

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Véc tơ đối cho bởi công thức

$$- \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix}.$$

Trong không gian véc tơ  $M_{2 \times 2}$ , mỗi véc tơ là một ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$ .

**VÍ DỤ 4.1.6.** Tập hợp  $M_{m \times n}$  các ma trận cỡ  $m \times n$  với hệ số thực là một không gian véc tơ với hai phép toán cộng ma trận và nhân số với ma trận quen thuộc.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Trong không gian véc tơ  $M_{m \times n}$ , mỗi véc tơ là một ma trận cỡ  $m \times n$ .

**VÍ DỤ 4.1.7.** Kí hiệu  $F(-\infty, \infty)$  là tập hợp các hàm số nhận giá trị thực xác định trên  $(-\infty, \infty)$ . Ta định nghĩa phép toán cộng hai hàm số và phép toán nhân số với một hàm số như sau. Cho  $f, g \in F(-\infty, \infty)$  và  $k \in \mathbb{R}$ . Hai hàm  $f + g$  và  $kf$  cho bởi

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (kf)(x) = kf(x)$$

với mọi  $x$ .

Trang bị hai phép toán này, tập hợp  $F(-\infty, \infty)$  trở thành một không gian véc tơ.

Trong không gian véc tơ  $F(-\infty, \infty)$ , mỗi véc tơ là một hàm số.

**VÍ DỤ 4.1.8.** Trên tập hợp  $\mathbb{R}^2$ , định nghĩa hai phép toán cộng và nhân với vô hướng như sau

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \quad k(a_1, a_2) = (ka_1, 0).$$

Như vậy, phép toán cộng vẫn được thực hiện trên các thành phần tương ứng như thông thường, nhưng phép toán nhân thì hơi bất thường, vô hướng  $k$  chỉ được nhân vào thành phần thứ nhất, còn thành phần thứ hai của tích lại luôn là số không.

1. Cho  $u = (2, 4)$ ,  $v = (-3, 5)$  và  $k = 7$ . Tính  $u + v$  và  $ku$ .
2. Chứng minh rằng  $\mathbb{R}^2$  trang bị hai phép toán như trên không phải là một không gian véc tơ.

**GIẢI.** (a) Theo đúng định nghĩa, ta có

$$u + v = (2, 4) + (-3, 5) = (2 + (-3), 4 + 5) = (-1, 9)$$

và

$$ku = 7(-3, 5) = (7(-3), 0) = (-21, 0).$$

(b) Ta sẽ chỉ ra rằng tiên đề (V10) không thỏa mãn. Thật vậy, với  $u = (a_1, a_2)$ , ta có

$$1u = 1(a_1, a_2) = (1a_1, 0) = (a_1, 0).$$

Do đó  $1u \neq u$  với mọi véc tơ  $u$  có  $a_2 \neq 0$ . Ví dụ  $1(2, 3) = (2, 0) \neq (2, 3)$ .

Ta có thể kiểm chứng rằng tập hợp  $\mathbb{R}^2$  trang bị hai phép toán cộng và nhân với vô hướng như trên thỏa mãn cả 9 tiên đề không gian véc tơ còn lại.  $\square$

**VÍ DỤ 4.1.9.** Trên tập hợp  $\mathbb{R}^+$  của các số thực dương, định nghĩa hai phép toán cộng và nhân với vô hướng như sau

$$u \oplus v = uv, \quad k \odot u = u^k.$$

Ta không sử dụng cách ký hiệu  $u + v$  và  $ku$  thông thường vì chúng sẽ gây hiểu nhầm với hai phép toán cộng và nhân thông thường. Trang bị hai phép toán này,  $\mathbb{R}^+$  trở thành một không gian véc tơ với:

▷ véc tơ không là số 1,

▷ véc tơ đối của  $u$  là  $\frac{1}{u}$ .

Trong không gian véc tơ  $\mathbb{R}^+$  này, mỗi số thực là một không gian véc tơ.

**GIẢI.** Cho  $u, v, w \in \mathbb{R}^+$  và  $k, m \in \mathbb{R}$ .

Khi đó

$$u \oplus v = uv \in \mathbb{R}^+, \quad k \odot u = u^k \in \mathbb{R}^+.$$

Suy ra, hai tiên đề (V1) và (V6) thỏa mãn. Tiếp theo, ta kiểm tra 8 tiên đề còn lại.

▷ Chứng minh tiên đề (V2):  $u \oplus v = v \oplus u$ . Ta có

$$u \oplus v = uv = vu = v \oplus u.$$

▷ Chứng minh tiên đề (V3):  $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$ . Ta có

$$u \oplus (v \oplus w) = u \oplus (vw) = u(vw) = (uv)w = (u \oplus v)w = (u \oplus v) \oplus w.$$

▷ Chứng minh tiên đề (V4): tồn tại véc tơ không. Ta sẽ chứng minh số thực 1 chính là véc tơ không. Ta có

$$u \oplus 1 = u1 = u, \quad 1 \oplus u = 1u = u.$$

▷ Chứng minh tiên đề (V5): tồn tại véc tơ đối. Véc tơ đối của  $u$  là  $\frac{1}{u}$ . Thật vậy

$$u \oplus \frac{1}{u} = u \cdot \frac{1}{u} = 1, \quad \frac{1}{u} \oplus u = \frac{1}{u} \cdot u = 1.$$

Vì 1 là véc tơ không, nên  $\frac{1}{u}$  là véc tơ đối của  $u$ .

▷ Chứng minh tiên đề (V7):  $k \odot (u \oplus v) = k \odot u \oplus k \odot v$ . Ta có

$$k \odot (u \oplus v) = k \odot (uv) = (uv)^k = u^k v^k = u^k \oplus v^k = k \odot u \oplus k \odot v.$$

▷ Chứng minh tiên đề (V8):  $(k + m) \odot u = k \odot u \oplus m \odot u$ . Ta có

$$(k + m) \odot u = u^{k+m} = u^k u^m = u^k \oplus u^m = k \odot u \oplus m \odot u.$$

▷ Chứng minh tiên đề (V9):  $k \odot (m \odot u) = (km) \odot u$ . Ta có

$$k \odot (m \odot u) = k \odot (u^m) = (u^m)^k = u^{km} = (km) \odot u.$$

▷ Chứng minh tiên đề (V10):  $1 \cdot u = u$ . Ta có

$$1 \odot u = u^1 = u.$$

Vì cả 10 tiên đề không gian véctor đều thỏa mãn, nên tập hợp  $\mathbb{R}^+$  các số thực dương trang bị hai phép toán như trên là một không gian véctor.  $\square$

Ví dụ này cho thấy rằng véctor không của không gian véctor có thể không liên quan gì đến số không. Véctor không và véctor đối phụ thuộc vào cách định nghĩa phép toán cộng của không gian véctor.

### MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA VÉCTOR

Tất cả các khẳng định liên quan đến véctor mà không phải là tiên đề thì đều cần phải chứng minh. Chứng minh cần dựa vào các tiên đề, và các lập luận logic.

**MỆNH ĐỀ 4.1.10.** Cho  $V$  là một không gian véctor,  $u, v, w \in V$ . Khi đó

(a) Nếu  $u + v = u + w$  thì  $v = w$ .

(b) Nếu  $u + v = w$  thì  $u = w - v$ .

**CHỨNG MINH.** (a) Cộng  $-u$  vào hai vế của đẳng thức  $u + v = u + w$ , ta được

$$-u + (u + v) = -u + (u + w).$$

Sử các tiên đề véc tơ, ta được

$$\begin{aligned} -u + (u + v) &= ((-u) + u) + v = 0 + v = v, \\ -u + (u + w) &= ((-u) + u) + w = 0 + w = w. \end{aligned}$$

Suy ra  $v = w$ .

(b) Cộng  $-v$  vào hai vế của đẳng thức  $u + v = w$ , ta được

$$(u + v) + (-v) = w + (-v).$$

Sử dụng các tiên đề véc tơ, ta được

$$(u + v) + (-v) = u + (v + (-v)) = u + 0 = u.$$

Mặt khác, theo định nghĩa phép trừ véc tơ  $w - v = w + (-v)$ . Suy ra  $u = w - v$ . □

**MỆNH ĐỀ 4.1.11.** Cho  $V$  là một không gian véc tơ,  $u \in V$  và  $k$  là một vô hướng. Khi đó:

- (a)  $0u = 0$
- (b)  $k0 = 0$
- (c) Nếu  $ku = 0$  thì  $k = 0$  hoặc  $u = 0$ .
- (d)  $(-1)u = -u$

**CHỨNG MINH.** (a) Ta có

$$0u + 0u = (0 + 0)u = 0u.$$

Đẳng thức  $0u + 0u = 0u$  kéo theo  $0u = 0$ .

(b) Ta có

$$k0 + k0 = k(0 + 0) = k0.$$

Đẳng thức  $k0 + k0 = k0$  kéo theo  $k0 = 0$ .

(c) Giả sử  $ku = 0$  và  $k \neq 0$ . Ta sẽ chứng minh  $u = 0$ . Ta có

$$u = 1u = \left(\frac{1}{k} \cdot k\right)u = \frac{1}{k}(ku) = \frac{1}{k}0 = 0.$$

(d) Đẳng thức  $(-1)u = -u$  có nghĩa là  $(-1)u$  là véc tơ đối của véc tơ  $u$ . Ta có

$$u + (-1)u = 1u + (-1)u = (1 + (-1))u = 0u = 0.$$

Do đó  $(-1)u$  là véc tơ đối của  $u$ . □

## BÀI TẬP

**4.1** [hint] Trên tập hợp  $V = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ , định nghĩa hai phép toán

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \quad k(a, b) = (ka, 0).$$

- (a) Tính  $u + v$  và  $ku$  với  $u = (1, 2)$ ,  $v = (-1, 4)$  và  $k = 5$ .
- (b) Trang bị hai phép toán trên,  $V$  có là một không gian véctơ không? Vì sao?

**4.2** [hint] Trên tập hợp  $V = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ , định nghĩa hai phép toán

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2 + 1, b_1 + b_2 + 1), \quad k(a, b) = (ka, kb).$$

- (a) Tính  $u + v$  và  $ku$  với  $u = (1, 2)$ ,  $v = (-3, 4)$  và  $k = 2$ .
- (b) Trang bị hai phép toán trên,  $V$  có là một không gian véctơ không? Vì sao?

**4.3** [hint] Trên tập hợp  $V = \mathbb{R}^2$ , định nghĩa hai phép toán

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2 + 1, b_1 + b_2 + 1), \quad k(a, b) = (ka + k - 1, kb + k - 1).$$

Ta chứng minh được rằng  $V$  cùng với hai phép toán này là một không gian véctơ.

- (a) Chứng minh rằng phần tử  $(0, 0)$  không phải véctơ không của không gian véctơ  $V$ .
- (b) Tìm véctơ không của không gian  $V$ .
- (c) Một sinh viên khẳng định rằng véctơ đối của véctơ  $(a, b)$  trong  $V$  là  $(-a - 1, -b - 1)$  vì

$$(a, b) + (-a - 1, -b - 1) = (a + (-a - 1) + 1, b + (-b - 1) + 1) = (0, 0).$$

Khẳng định này có đúng hay không? Nếu không, tìm véctơ đối của véctơ  $(a, b)$  trong  $V$ .

**4.4** [hint] Trên tập hợp  $V$  các cặp số thực  $(a, b)$  với  $b > 0$ , định nghĩa hai phép toán

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 b_2), \quad k(a, b) = (ka, b^k).$$

Chứng minh rằng  $V$  là một không gian véctơ với véctơ không là  $(0, 1)$ .

## BÀI TẬP TỔNG HỢP

**4.5** [hint] Cho  $V$  là một không gian véctơ.

- (a) Tính duy nhất của véctơ không của  $V$  được chứng minh như sau. Giả sử  $0$  và  $\tilde{0}$  là hai véctơ không của  $V$ . Khi đó

$$0 \stackrel{(1)}{=} 0 + \tilde{0} \stackrel{(2)}{=} \tilde{0}.$$

Giải thích các đẳng thức (1) và (2).

- (b) Phương trình  $x + u = v$  trong  $V$  được giải như sau.

$$x + u = v \stackrel{(3)}{\iff} x = v + (-u) \stackrel{(4)}{\iff} x = v - u.$$

Giải thích các biến đổi tương đương (3) và (4).

- (c) Phép cộng véctơ thỏa mãn luật giản ước, tức là  $u + w = v + w$  kéo theo  $u = v$ . Điều này được chứng minh như sau

$$\begin{aligned} u + w = v + w &\stackrel{(5)}{\implies} u + w + (-w) = v + w + (-w) \\ &\stackrel{(6)}{\implies} u = v \end{aligned}$$

Giải thích biến đổi suy ra (5) và (6).

**4.6** [hint] Cho  $V$  là một không gian véctơ. Cho  $v \in V$  và  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) Một chứng minh của đẳng thức  $0v = 0$  được thực hiện như sau

$$\begin{aligned} 0v &\stackrel{(1)}{=} (0 + 0)v \stackrel{(2)}{=} 0v + 0v \\ &\stackrel{(3)}{\implies} 0v = 0 \end{aligned}$$

Giải thích các đẳng thức (1), (2) và phép suy ra (3).

- (b) Chứng minh rằng  $k0 = 0$  trong đó  $0$  là véctơ không của  $V$ .  
 (c) Giả sử  $k \neq 0$  và  $kv = 0$ . Chứng minh rằng  $v = 0$ .

Cho  $V$  và  $W$  là các không gian véctơ. Trên tập hợp

$$V \times W = \{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}$$

định nghĩa các phép toán

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2), \quad k(v, w) = (kv, kw).$$

Ta thấy rằng các phép toán cộng và nhân này được thực hiện trên từng thành phần của mỗi phần tử của  $V \times W$ . Trang bị hai phép toán này,  $V \times W$  trở thành một không gian véctơ. Không gian véctơ  $V \times W$  được gọi là *tích trực tiếp* của  $V$  và  $W$ .

**4.7** [hint] Cho  $V$  và  $W$  là các không gian véctơ và  $V \times W$  là tích trực tiếp của  $V$  và  $W$ . Chứng minh các khẳng định sau.

- (a) véctơ không của  $V \times W$  là  $(0_V, 0_W)$  trong đó  $0_V$  là véctơ không của  $V$  và  $0_W$  là véctơ không của  $W$ .
- (b) véctơ đối của một véctơ  $(v, w)$  trong  $V \times W$  là  $(-v, -w)$ .

**4.8** [hint] Cho  $V$  và  $W$  là các không gian véctơ. Chứng minh rằng tích phân phối của phép nhân với phép cộng véctơ được thực hiện như sau

$$\begin{aligned}
 k[(v_1, w_1) + (v_2, w_2)] &\stackrel{(a)}{=} k(v_1 + v_2, w_1 + w_2) \\
 &\stackrel{(b)}{=} (k(v_1 + v_2), k(w_1 + w_2)) \\
 &\stackrel{(c)}{=} (kv_1 + kv_2, kw_1 + kw_2) \\
 &\stackrel{(d)}{=} (kv_1, kw_1) + (kv_2, kw_2) \\
 &\stackrel{(e)}{=} k(v_1, w_1) + k(v_2, w_2)
 \end{aligned}$$

Hãy giải thích các đẳng thức (a), (b), ..., (e).

Tích trực tiếp là một kĩ thuật quan trọng để xây dựng các không gian véctơ mới. Ví dụ, tích trực tiếp của  $\mathbb{R}^2$  với  $P_2$  là  $\mathbb{R}^2 \times P_2$ . Mỗi véctơ của  $\mathbb{R}^2 \times P_2$  là một cặp  $(v, p)$  với  $v \in \mathbb{R}^2$  là một cặp số thực và  $p \in P_2$  là một đa thức có bậc không quá 2. Cụ thể hơn, mỗi véctơ của  $\mathbb{R}^2 \times P_2$  đều có dạng

$$((a, b), c + dx + ex^2)$$

trong đó  $a, b, c, d, e$  là các số thực bất kì.

## 4.2 KHÔNG GIAN VÉCTƠ CON

Trong lý thuyết các không gian véc tơ, với mỗi không gian véc tơ, ta quan tâm đến một số tập con đặc biệt, gọi là không gian con.

**ĐỊNH NGHĨA 4.2.1.** Cho  $V$  là một không gian véc tơ. Một tập con  $W$  của  $V$  được gọi là một **không gian con** nếu  $W$  là một không gian véc tơ với hai phép toán cộng và nhân với vô hướng xác định trên  $V$ .

**VÍ DỤ 4.2.2.** Cho  $V$  là một không gian véc tơ.

- ▷ Tập con  $\{0\}$  của  $V$  bao gồm đúng véc tơ không là một không gian con của  $V$ . Đây là không gian con nhỏ nhất của  $V$ . Ta gọi  $\{0\}$  là **không gian con không** của  $V$ .
- ▷ Không gian con lớn nhất của  $V$  chính là  $V$ .

Theo đúng định nghĩa này, để chứng minh một tập con là một không gian con, ta phải chứng minh nó là một không gian véc tơ, và do đó, phải kiểm tra 10 tiên đề. Tuy nhiên, hầu hết các tiên đề đó tự động thỏa mãn, vì chúng đã thỏa mãn trên không gian véc tơ ban đầu. Mệnh đề sau cho biết các tiên đề mà ta phải thực sự kiểm tra.

**MỆNH ĐỀ 4.2.3 (Tiêu chuẩn không gian con).** Cho  $V$  là một không gian véc tơ và  $W$  là một tập con của  $V$ . Khi đó,  $W$  là một không gian con nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

1.  $W$  chứa véc tơ không của  $V$ , tức là  $0 \in W$ .
2.  $W$  đóng đối với phép toán cộng, tức là  $u + v \in W$  với mọi  $u, v \in W$ .
3.  $W$  đóng đối với phép nhân với vô hướng, tức là  $ku \in W$  với mọi  $u \in W$  và  $k \in \mathbb{R}$ .

Nhắc lại rằng theo định nghĩa mọi không gian con của một không gian véc tơ cũng là một không gian véc tơ. Hầu hết các không gian véc tơ mà chúng ta gặp sẽ là không gian con của một không gian véc tơ quen thuộc.

**VÍ DỤ 4.2.4.** Trong các không gian véc tơ  $\mathbb{R}^2$  và  $\mathbb{R}^3$ , một đường thẳng là một không gian con nếu và chỉ nếu đường thẳng này đi qua gốc tọa độ.

Từ các ví dụ trên, ta thấy rằng. Các tập con sau là các không gian con của  $\mathbb{R}^2$

- ▷  $\{0\}$
- ▷  $\mathbb{R}^2$
- ▷ các đường thẳng đi qua gốc tọa độ.

Các tập con sau là các không gian con của  $\mathbb{R}^3$ .

- ▷  $\{0\}$
- ▷  $\mathbb{R}^3$
- ▷ các đường thẳng đi qua gốc tọa độ
- ▷ các mặt phẳng đi qua gốc tọa độ.

Sau này, ta sẽ chứng minh được rằng các trường hợp bên trên là tất cả các không gian con của  $\mathbb{R}^2$  và  $\mathbb{R}^3$ .

**VÍ DỤ 4.2.5.** Trong không gian véc tơ  $\mathbb{R}^2$ , góc phần tư thứ nhất, tức là tập con

$$W = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \geq 0 \text{ và } a_2 \geq 0\}$$

không phải là một không gian con.

**GIẢI.** Tập  $W$  này không đóng kín đối với phép toán nhân với vô hướng. □

**VÍ DỤ 4.2.6.** Xác định các không gian véc tơ con trong các tập con sau đây của không gian véc tơ  $\mathbb{R}^3$ .

- (a) Tập  $V_1$  các véc tơ có dạng  $(0, b, 0)$ .
- (b) Tập  $V_2$  các véc tơ có dạng  $(1, 2, c)$ .
- (c) Tập  $V_3$  các véc tơ có dạng  $(a, b, c)$  trong đó  $a + 2b = 3c$ .

(d) Tập  $V_4$  các véctơ có dạng  $(a, b, c)$  trong đó  $b = a + c + 1$ .

**GIẢI.** (a) véctơ không của  $\mathbb{R}^3$  thuộc  $V_1$  vì nó là  $(0, b, 0)$  với  $b = 0$ . Cho  $u, v \in V_1, k \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $u = (0, b_1, 0), v = (0, b_2, 0)$ . Ta có

$$u + v = (0, b_1 + b_2, 0), \quad ku = (0, kb_1, 0).$$

Suy ra  $u + v$  và  $ku$  thuộc  $V_1$ . Vậy  $V_1$  là một không gian con của  $\mathbb{R}^3$ .

(b) véctơ không của  $\mathbb{R}^3$  là  $(0, 0, 0)$ , không có dạng  $(1, 2, c), c \in \mathbb{R}$ . Do đó, tập con  $V_2$  của  $\mathbb{R}^3$  không là một không gian con.

(c) véctơ không của  $\mathbb{R}^3$  thuộc  $V_3$  vì nó là  $(a, b, c)$  với  $a = b = c = 0$  và  $a + 2b = 0 = 3c$ . Cho  $u = (a_1, b_1, c_1), v = (a_2, b_2, c_2)$  thuộc  $V_3$  và  $k \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $a_1 + 2b_1 = 3c_1$  và  $a_2 + 2b_2 = 3c_2$ . Ta có

$$u + v = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2), \quad ku = (ka_1, kb_1, kc_1).$$

Vì

$$(a_1 + a_2) + 2(b_1 + b_2) = (a_1 + 2b_1) + (a_2 + 2b_2) = c_1 + c_2$$

$$ka_1 + 2(kb_1) = k(a_1 + 2b_1) = kc_1$$

nên  $u + v$  và  $ku$  đều thuộc  $V_3$ . Vậy  $V_3$  là một không gian con của  $\mathbb{R}^3$ .

(d) véctơ không của  $\mathbb{R}^3$  không thuộc  $V_4$  vì nó là  $(a, b, c)$  với  $a = b = c = 0$  và  $a + c + 1 = 1 \neq b$ . Do đó, tập con  $V_4$  của  $\mathbb{R}^3$  không là một không gian con. □

**VÍ DỤ 4.2.7.** Trong không gian véctơ  $M_{n \times n}$ :

- (a) Tập con bao gồm các ma trận đối xứng là một không gian con.
- (b) Tập con bao gồm các ma trận tam giác trên là một không gian con.

**GIẢI.** (a) Ma trận không  $0_{n \times n}$  là một ma trận đối xứng. Cho  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  và  $B = [b_{ij}]_{n \times n}$  là các ma trận đối xứng, cho  $k \in \mathbb{R}$ . Ta cần chứng minh  $A + B$  và  $kA$  là các ma trận đối xứng.

Ta có

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = (A + B)_{ji}$$

và

$$(kA)_{ij} = ka_{ij} = ka_{ji} = (kA)_{ji}.$$

Suy ra, các ma trận  $A + B$  và  $kA$  đối xứng. Vậy, tập các ma trận đối xứng cỡ  $n \times n$  là một không gian con của  $M_{n \times n}$ .

(b) Ma trận không  $0_{n \times n}$  là một ma trận tam giác trên. Cho  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  và  $B = [b_{ij}]_{n \times n}$  là các ma trận tam giác trên, cho  $k \in \mathbb{R}$ . Ta cần chứng minh  $A + B$  và  $kA$  là các ma trận tam giác trên.

Với mọi  $i > j$ , ta có

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = 0 + 0 = 0$$

và

$$(kA)_{ij} = ka_{ij} = k0 = 0.$$

Suy ra, các ma trận  $A + B$  và  $kA$  là các ma trận tam giác trên. Vậy, tập các ma trận tam giác trên cỡ  $n \times n$  là một không gian con của  $M_{n \times n}$ .  $\square$

**VÍ DỤ 4.2.8.** Trong không gian véc tơ  $M_{n \times n}$ , tập con bao gồm các ma trận khả nghịch không phải là một không gian con.

**GIẢI.** Véc tơ không của không gian véc tơ  $M_{n \times n}$  là ma trận không. Ma trận không là một ma trận không khả nghịch. Do đó, tập con của  $M_{n \times n}$  bao gồm các ma trận khả nghịch không phải là một không gian con.

Ta cũng có thể chỉ ra rằng tập con các ma trận không khả nghịch này không đóng đối với phép toán cộng và không đóng đối với phép toán nhân với vô hướng.  $\square$

**VÍ DỤ 4.2.9.** Trong không gian véc tơ  $F(-\infty, \infty)$ , tập con  $C(-\infty, \infty)$  bao gồm các hàm liên tục là một không gian con.

**VÍ DỤ 4.2.10.** Trong không gian véc tơ  $F(-\infty, \infty)$ , tập con  $\mathcal{P}_\infty$  bao gồm các đa thức là một không gian con.

## PHÉP TOÁN TRÊN CÁC KHÔNG GIAN CON

**MỆNH ĐỀ 4.2.11.** Cho  $V$  là một không gian véc tơ. Cho  $V_1$  và  $V_2$  là các không gian con của  $V$ . Khi đó, giao  $V_1 \cap V_2$  cũng là một không gian con của  $V$ .

**CHỨNG MINH.** Để chứng minh  $V_1 \cap V_2$  là một không gian con của  $V$ , ta sẽ chứng minh tập con này của  $V$  chứa véc tơ không và đóng với các phép toán. Trước tiên, nhắc lại rằng, một véc tơ  $v \in V$  thuộc vào giao  $V_1 \cap V_2$  khi và chỉ khi véc tơ  $v$  thuộc đồng thời  $V_1$  và  $V_2$ .

(a) Chứng minh  $0 \in V_1 \cap V_2$ . Vì  $V_1$  và  $V_2$  là các không gian con của  $V$  nên  $0 \in V_1$  và  $0 \in V_2$ . Do đó  $0 \in V_1 \cap V_2$ .

(b) Chứng minh  $V_1 \cap V_2$  đóng đối với phép toán cộng véc tơ. Cho hai véc tơ  $u, v$  thuộc  $V_1 \cap V_2$ . Khi đó,  $u, v$  thuộc đồng thời  $V_1$  và  $V_2$ .

- ▷ Vì  $u, v$  đều thuộc  $V_1$  và  $V_1$  là một không gian con của  $V$  nên  $u + v$  thuộc  $V_1$ .
- ▷ Tương tự, vì  $u, v$  đều thuộc  $V_2$  và  $V_2$  là một không gian con của  $V$  nên  $u + v$  thuộc  $V_2$ .

Do đó, tổng  $u + v$  thuộc đồng thời  $V_1$  và  $V_2$ . Suy ra  $u + v \in V_1 \cap V_2$ .

(c) Chứng minh  $V_1 \cap V_2$  đóng đối với phép toán nhân với vô hướng. Cho hai véc tơ  $u$  thuộc  $V_1 \cap V_2$  và  $k \in \mathbb{R}$ . Khi đó,  $u$  thuộc đồng thời  $V_1$  và  $V_2$ .

- ▷ Vì  $u$  thuộc  $V_1$  và  $V_1$  là một không gian con của  $V$  nên  $ku$  thuộc  $V_1$ .
- ▷ Tương tự, vì  $u$  thuộc  $V_2$  và  $V_2$  là một không gian con của  $V$  nên  $ku$  thuộc  $V_2$ .

Do đó, tích  $ku$  thuộc đồng thời  $V_1$  và  $V_2$ . Suy ra  $ku \in V_1 \cap V_2$ .

Vậy,  $V_1 \cap V_2$  là một không gian con của  $V$ . □

Trong mệnh đề trên, ta có thể lấy giao của một họ bất kỳ các không gian con, thay vì chỉ lấy giao của hai không gian con.

**MỆNH ĐỀ 4.2.12.** Cho  $V$  là một không gian véc tơ. Cho  $V_i$  với  $i \in I$

là các không gian con của  $V$ . Khi đó, giao  $\bigcap_{i \in I} V_i$  cũng là một không gian con của  $V$ .

**CHỨNG MINH.** Để chứng minh  $\bigcap_{i \in I} V_i$  là một không gian con của  $V$ , ta sẽ chứng minh tập con này của  $V$  chứa véc tơ không và đóng với các phép toán. Trước tiên, nhắc lại rằng, một véc tơ  $v \in V$  thuộc vào giao  $\bigcap_{i \in I} V_i$  khi và chỉ khi véc tơ  $v$  thuộc đồng thời  $V_i$  với mọi  $i \in I$ .

(a) Chứng minh  $0 \in \bigcap_{i \in I} V_i$ . Vì  $V_i$  với  $i \in I$  là các không gian con của  $V$  nên  $0 \in V_i$  với mọi  $i$ . Do đó  $0 \in \bigcap_{i \in I} V_i$ .

(b) Chứng minh  $\bigcap_{i \in I} V_i$  đóng đối với phép toán cộng véc tơ. Cho hai véc tơ  $u, v$  thuộc  $\bigcap_{i \in I} V_i$ . Khi đó,  $u, v$  thuộc đồng thời  $V_i$  với mọi  $i \in I$ .

▷ Với mỗi  $i$ , vì  $u, v$  đều thuộc  $V_i$  và  $V_i$  là một không gian con của  $V$  nên  $u + v$  thuộc  $V_i$ .

Suy ra  $u + v \in \bigcap_{i \in I} V_i$ .

(c) Chứng minh  $\bigcap_{i \in I} V_i$  đóng đối với phép toán nhân với vô hướng. Cho hai véc tơ  $u$  thuộc  $\bigcap_{i \in I} V_i$  và  $k \in \mathbb{R}$ . Khi đó,  $u$  thuộc đồng thời  $V_i$  với mọi  $i \in I$ .

▷ Với mỗi  $i$ , vì  $u$  thuộc  $V_i$  và  $V_i$  là một không gian con của  $V$  nên  $ku$  thuộc  $V_i$ .

Suy ra  $ku \in \bigcap_{i \in I} V_i$ .

Vậy,  $\bigcap_{i \in I} V_i$  là một không gian con của  $V$ . □

**MỆNH ĐỀ 4.2.13.** Tập nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$Ax = 0$$

bao gồm  $m$  phương trình đối với  $n$  ẩn, là một không gian con của  $\mathbb{R}^n$ .

## BÀI TẬP

**4.9** [hint] Xác định các không gian véctơ con trong các tập con sau của không gian véctơ  $M_{n \times n}$ .

- (a) Tập hợp các ma trận chéo.
- (b) Tập hợp các ma trận có định thức bằng không.
- (c) Tập hợp các ma trận có vết bằng không.

**4.10** [hint] Xác định các không gian véctơ con trong các tập con sau của không gian véctơ  $M_{n \times n}$ .

- (a) Tập hợp các ma trận đối xứng.
- (b) Tập hợp các ma trận khả nghịch.
- (c) Tập hợp các ma trận giao hoán với một ma trận  $A$  cho trước.

**4.11** [hint] Xác định các không gian véctơ con trong các tập con sau của không gian véctơ  $P_\infty$ .

- (a) Các đa thức  $a_0 + a_1x + a_2x^2$  trong đó  $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ .
- (b) Các đa thức  $a_0 + a_1x$  trong đó  $a_0$  và  $a_1$  là các số hữu tỉ.

Tập hợp các tập con của một tập cho trước đóng đối với các phép toán giao và hợp của các tập hợp. Cụ thể hơn, nếu  $A$  và  $B$  là các tập con của một tập  $S$  thì  $A \cap B$  và  $A \cup B$  hiển nhiên cũng là các tập con của  $S$ . Ta xem xét bài toán tương tự cho không gian con của một không gian véctơ cho trước.

**4.12** [hint] Cho  $V$  là một không gian véctơ. Cho  $V_1$  và  $V_2$  là các không gian con của  $V$ . Chứng minh rằng

$$V_1 \cap V_2 = \{v \in V : v \in V_1, v \in V_2\}$$

là một không gian con của  $V$ .

Bài tập tiếp theo là sự tổng quát hóa tự nhiên của bài tập trên khi ta thay giao của hai không gian con bởi giao của một họ tùy ý các không gian con. Chứng minh của hai kết quả này giống hệt nhau.

**4.13** [hint] Cho  $V$  là một không gian véctơ. Cho  $V_i, i \in I$  là các không gian con của  $V$ . Chứng minh rằng

$$\bigcap_{i \in I} V_i = \{v \in V : v \in V_i \text{ với mọi } i \in I\}$$

cũng là một không gian con của  $V$ .

**4.14** [hint] Cho ví dụ về hai không gian con  $V_1$  và  $V_2$  của  $\mathbb{R}^2$  sao cho  $V_1 \cup V_2$  không là một không gian con của  $\mathbb{R}^2$ .

Theo bài tập trên, hợp của hai không gian con có thể không là một không gian con. Ta muốn tìm phép toán thay thế một cách thích hợp.

**4.15** [hint] Cho  $V$  là một không gian véctơ. Cho  $V_1$  và  $V_2$  là các không gian con của  $V$ . Tổng của  $V_1$  và  $V_2$  là

$$V_1 + V_2 = \{v \in V : \text{tồn tại } v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \text{ sao cho } v = v_1 + v_2\}$$

Chứng minh rằng  $V_1 + V_2$  là một không gian con của  $V$ .

**4.16** [hint] Cho  $V$  là một không gian véctơ và  $V_1, V_2, U$  là các không gian con của  $V$ . Bên dưới là một chứng minh của khẳng định:

$$V_1 \subset U \text{ và } V_2 \subset U \text{ khi và chỉ khi } V_1 + V_2 \subset U.$$

Hãy giải thích các bước lập luận (a), (b), ..., (g).

**Chứng minh điều kiện cần.** Giả sử  $V_1 \subset U$  và  $V_2 \subset U$ . Lấy  $v \in V_1 + V_2$  bất kì.

- (a) Tồn tại  $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$  sao cho  $v = v_1 + v_2$ .
- (b)  $v_1 \in U$  và  $v_2 \in U$ .
- (c)  $v = v_1 + v_2 \in U$ .
- (d)  $V_1 + V_2 \subset U$ .

**Chứng minh điều kiện đủ.** Giả sử  $V_1 + V_2 \subset U$ . Lấy  $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$  bất kì.

- (a)  $v_1 \in V_1 + V_2$  và  $v_2 \in V_1 + V_2$ .
- (b)  $v_1 \in U$  và  $v_2 \in U$ .
- (c)  $V_1 \subset U$  và  $V_2 \subset U$ .

Từ hai bài tập trên ta thấy rằng tổng  $V_1 + V_2$  của hai không gian con  $V_1$  và  $V_2$  của  $V$  cũng là một không gian con của  $V$ . Hơn nữa,  $V_1 + V_2$  còn là không gian con nhỏ nhất của  $V$  chứa đồng thời cả  $V_1$  và  $V_2$ . Tương tự như thế,  $V_1 \cap V_2$  là một không gian con của  $V$  và nó là không gian con lớn nhất chứa đồng thời cả  $V_1$  và  $V_2$ .

Mặt khác, tương tự như phép giao tùy ý các không gian con, ta cũng định nghĩa được phép tổng tùy ý các không gian con như sau. Cho  $V_i, i \in I$  là một họ các không gian con của một không gian véctơ  $V$ . Định nghĩa

$$\sum_{i \in I} V_i = \left\{ v \in V : \text{tồn tại các } v_i \in V_i, \text{ hầu hết } v_i = 0, v = \sum_{i \in I} v_i \right\}.$$

Điều kiện hầu hết  $v_i = 0$  có nghĩa là tập  $\{i \in I : v_i \neq 0\}$  là hữu hạn. Khi đó, tổng  $\sum_{i \in I} v_i$  xác định vì nó chỉ có hữu hạn số hạng khác không.

Với cách làm giống như đối với hai bài tập trên, ta chứng minh được rằng tổng  $\sum_{i \in I} V_i$  là một không gian con của  $V$ . Hơn nữa,  $\sum_{i \in I} V_i$  là không gian con nhỏ nhất của  $V$  chứa đồng thời các không gian con  $V_i$ .

**4.17 [hint]** Cho  $V$  là một không gian véctơ và  $V_1, V_2$  là các không gian con của  $V$ . Chứng minh rằng hiệu

$$V_1 - V_2 = \{v \in V : \text{tồn tại } v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \text{ sao cho } v = v_1 - v_2\}$$

là một không gian con của  $V$ .

## BÀI TẬP TỔNG HỢP

Nhắc lại rằng  $F(-\infty, \infty)$  là không gian véctơ các hàm  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Một hàm  $f \in F(-\infty, \infty)$  được gọi là *hàm chẵn* (tương ứng, *hàm lẻ*) nếu  $f(-x) = f(x)$  với mọi  $x$  (tương ứng,  $f(-x) = -f(x)$  với mọi  $x$ ).

**4.18 [hint]** Chứng minh các khẳng định sau.

- (a) Với các số nguyên dương  $n$ , hàm  $x^n$  là một hàm chẵn (tương ứng, hàm lẻ) khi và chỉ khi  $n$  là một số chẵn (tương ứng, số lẻ).
- (b) Tập hợp các hàm chẵn là một không gian con của  $F(-\infty, \infty)$ .
- (c) Tập hợp các hàm lẻ là một không gian con của  $F(-\infty, \infty)$ .

**4.19 [hint]** Gọi  $V_+$  (tương ứng,  $V_-$ ) là không gian con của  $F(-\infty, \infty)$  bao gồm các hàm chẵn (tương ứng, hàm lẻ).

(a) Chứng minh  $V_+ \cap V_- = \{0\}$ .

(b) Cho  $f \in F(-\infty, \infty)$ . Giả sử  $f_+ \in V_+$  và  $f_- \in V_-$  thỏa mãn  $f = f_+ = f_-$ . Chứng minh rằng

$$f_+(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)], \quad f_-(x) = \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)].$$

(c) Chứng minh  $V_+ + V_- = F(-\infty, \infty)$ .

**4.20** [hint] Xét không gian véctơ  $M_{n \times n}$  của các ma trận vuông cỡ  $n \times n$ . Chứng minh của các khẳng định sau

(a) Tập con của  $M_{n \times n}$  gồm các ma trận đối xứng là một không gian con.

(b) Tập con của  $M_{n \times n}$  gồm các ma trận phản đối xứng là một không gian con.

**4.21** [hint] Gọi  $V_s$  (tương  $V_a$ ) là không gian con của  $M_{n \times n}$  gồm các ma trận đối xứng (tương ứng, phản đối xứng).

(a) Chứng minh  $V_s \cap V_a = \{0\}$ .

(b) Cho  $A \in M_{n \times n}$ . Giả sử các ma trận  $A_s \in V_s$  và  $A_a \in V_a$  thỏa mãn  $A = A_s + A_a$ . Chứng minh rằng

$$A_s = \frac{1}{2} [A + A^T], \quad A_a = \frac{1}{2} [A - A^T].$$

(c) Chứng minh  $V_s + V_a = M_{n \times n}$ .

**4.22** [hint] Xét không gian véctơ  $\mathbb{R}^\infty$  của các dãy số thực. Chứng minh rằng tập hợp các dãy số  $(x_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\infty$  thỏa mãn công thức truy hồi tuyến tính

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}, \quad \text{với mọi } n \geq 3$$

với  $a, b \in \mathbb{R}$  cố định, là một không gian véctơ con của  $\mathbb{R}^\infty$ .

**4.23** [hint] Xét không gian véctơ  $C^\infty(-\infty, \infty)$  của các hàm khả vi vô hạn  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Chứng minh rằng tập con của  $C^\infty(-\infty, \infty)$  gồm các hàm  $f$  thỏa mãn phương trình

$$f'' = af' + bf$$

với  $a, b \in \mathbb{R}$ , là một không gian véctơ con.

## 4.3 HỆ SINH

### TỔ HỢP TUYẾN TÍNH

**ĐỊNH NGHĨA 4.3.1.** Trong không gian véc tơ  $V$ , véc tơ  $w$  được gọi là một **tổ hợp tuyến tính** của hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$  nếu phương trình véc tơ

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_r v_r = w$$

có nghiệm. Mỗi nghiệm  $(k_1, k_2, \dots, k_r)$  của phương trình véc tơ này cho ta một cách **biểu thị tuyến tính** véc tơ  $w$  qua hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$ :

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r.$$

Các vô hướng  $k_i$  được gọi là các **hệ số** của biểu thị tuyến tính.

**VÍ DỤ 4.3.2.** Trong không gian véc tơ  $\mathbb{R}^3$ , cho các véc tơ

$$u = (1, 2, -1), \quad v = (6, 4, 2).$$

1. Chứng minh rằng véc tơ  $w = (9, 2, 7)$  là một tổ hợp tuyến tính của hệ véc tơ  $u, v$ .
2. Chứng minh rằng véc tơ  $w' = (4, -1, 8)$  không phải là một tổ hợp tuyến tính của hệ véc tơ  $u, v$ .

**CHỨNG MINH.** (a) Véc tơ  $w$  là một tổ hợp tuyến tính của hệ véc tơ  $u, v$  khi và chỉ khi phương trình véc tơ

$$x_1 u + x_2 v = w$$

có nghiệm. Ta có

$$\begin{aligned} x_1 u + x_2 v = w &\Leftrightarrow x_1 (1, 2, -1) + x_2 (6, 4, 2) = (9, 2, 7) \\ &\quad (x_1 + 6x_2, 2x_1 + 4x_2, -x_1 + 2x_2) = (9, 2, 7) \end{aligned}$$

Phương trình véc tơ này tương đương với hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 &= 7 \end{aligned}$$

Khử Gauss ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Suy ra, phương trình véc tơ đã cho có nghiệm. Vậy  $w$  là một tổ hợp tuyến tính của hệ véc tơ  $u, v$ .

Hơn nữa, ta thấy rằng phương trình véc tơ  $x_1u + x_2v = w$  có nghiệm duy nhất  $x_1 = -3, x_2 = 2$ . Nghiệm này cho ta biểu thị tuyến tính

$$w = -3u + 2v.$$

(b) Véc tơ  $w'$  không phải là một tổ hợp tuyến tính của hệ véc tơ  $u, v$  khi và chỉ khi phương trình véc tơ

$$x_1u + x_2v = w'$$

vô nghiệm nghiệm. Ta có

$$\begin{aligned} x_1u + x_2v = w' &\Leftrightarrow x_1(1, 2, -1) + x_2(6, 4, 2) = (4, -1, 8) \\ &(x_1 + 6x_2, 2x_1 + 4x_2, -x_1 + 2x_2) = (4, -1, 8) \end{aligned}$$

Phương trình véc tơ này tương đương với hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 8 \end{aligned}$$

Khử Gauss ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Suy ra, phương trình véc tơ đã cho vô nghiệm. Vậy  $w'$  không phải là một tổ hợp tuyến tính của hệ véc tơ  $u, v$ . □

Ví dụ này cho thấy rằng bài toán xét xem một véc tơ có phải là một biểu thị tuyến tính của một hệ véc tơ cho trước hay không được quy về bài toán quen thuộc về sự tồn tại nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính.

**VÍ DỤ 4.3.3.** Trong không gian vectơ  $\mathcal{P}_2$  cho các đa thức

$$p_1 = 1 + 2x - x^2, \quad p_2 = 6 + 4x + 2x^2.$$

Tìm  $a$  để đa thức  $p = 9 + ax + 7x^2$  là một tổ hợp tuyến tính của  $p_1$  và  $p_2$ .

**GIẢI.** Đa thức  $p$  là một tổ hợp tuyến tính của  $p_1$  và  $p_2$  khi và chỉ khi phương trình vectơ

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 = p \quad (1)$$

có nghiệm. Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x_1(1 + 2x - x^2) + x_2(6 + 4x + 2x^2) = 9 + 4x + 7x^2 \\ &\Leftrightarrow (x_1 + 6x_2) + (2x_1 + 4x_2)x + (-x_1 + 2x_2)x^2 = 9 + 4x + 7x^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 6x_2 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 = a \\ -x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

Do đó  $p$  là một tổ hợp tuyến tính của  $p_1$  và  $p_2$  khi và chỉ khi hệ phương trình tuyến tính (2) có nghiệm. Khử Gauss ma trận hệ số mở rộng của hệ (2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & a \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 0 & -8 & a - 18 \\ 0 & 8 & 16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 0 & -8 & a - 18 \\ 0 & 0 & a - 2 \end{bmatrix}.$$

Hệ (2) có nghiệm khi và chỉ khi  $a - 2 = 0$ , tức là  $a = 2$ . Vậy giá trị cần tìm của  $a$  là 2.  $\square$

## BÀI TẬP

**4.24** [hint] vectơ nào sau đây là một tổ hợp tuyến tính của

$$u = (0, -1, 1), \quad v = (1, 3, -1)$$

a.  $(2, 2, 2)$

c.  $(0, 0, 0)$

b.  $(0, 4, 5)$

d.  $(1, 2, 3)$

**4.25** [hint] Biểu thị mỗi vectơ sau như một tổ hợp tuyến tính của

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

b.  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

**4.26 [hint]** Biểu thị mỗi véc tơ sau đây như là một tổ hợp tuyến tính của

$$p_1 = 2 + x + 4x^2, \quad p_2 = -1 + x - 3x^2, \quad p_3 = 3 + 2x + 5x^2.$$

a.  $6 + 11x + 6x^2$

b. 0

c.  $7 + 8x + 9x^2$

## HỆ SINH

**MỆNH ĐỀ 4.3.4.** Cho  $v_1, v_2, \dots, v_r$  là một hệ véc tơ trong một không gian véc tơ  $V$ .

1. Tập hợp  $W$  tất cả các tổ hợp tuyến tính của hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$  là một không gian con của  $V$ .
2. Không gian con  $W$  là không gian con nhỏ nhất của  $V$  (đối với quan hệ bao hàm) mà chứa tất cả các véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$ .

**ĐỊNH NGHĨA 4.3.5.** Cho  $V$  là một không gian véc tơ và  $v_1, v_2, \dots, v_r$  là một hệ véc tơ trong  $V$ . Không gian con của  $V$  bao gồm tất cả các tổ hợp tuyến tính của hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$  được gọi là **bao tuyến tính** của hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$ , và ký hiệu là  $\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_r)$ . Ta cũng nói  $\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_r)$  là không gian con của  $V$  **sinh ra** từ hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$ .

**ĐỊNH NGHĨA 4.3.6.** Cho  $V$  là một không gian véc tơ. Một hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$  được gọi là một **hệ sinh** của  $V$  nếu bao tuyến tính của hệ véc tơ này chính là  $V$ :

$$\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_r) = V.$$

Từ định nghĩa, ta thấy rằng hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$  là một hệ sinh của không gian véc tơ  $V$  khi và chỉ khi phương trình véc tơ

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_rv_r = v$$

có nghiệm với mọi véc tơ  $v \in V$ .

**Một hệ véc tơ cho trước có phải là một hệ sinh hay không**

Để biết một hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$  trong một không gian véc tơ  $V$  có phải là một hệ sinh hay không, ta tiến hành như sau.

1. Cho  $v \in V$  là một véc tơ bất kỳ. Xét phương trình véc tơ

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_r v_r = v$$

rồi biến đổi tương đương nó thành một hệ phương trình tuyến tính.

2. Sử dụng các kỹ thuật giải hệ phương trình tuyến tính, để xét xem hệ phương trình tuyến tính trên có nghiệm hay không. Ở bước này, ta thường khử Gauss ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính.

- ▷ Nếu phương trình véc tơ có nghiệm với mọi véc tơ  $v \in V$  thì ta kết luận hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$  là một hệ sinh của  $V$ .
- ▷ Nếu phương trình véc tơ vô nghiệm với một véc tơ  $v \in V$  nào đó thì ta kết luận hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$  không phải là một hệ sinh của  $V$ .

**VÍ DỤ 4.3.7.** Các véc tơ đơn vị chính tắc

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1)$$

là một hệ sinh của  $\mathbb{R}^3$ .

**CHỨNG MINH.** Cho  $v = (a, b, c)$  là một véc tơ bất kỳ trong  $\mathbb{R}^3$ . Phương trình véc tơ

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = v$$

có nghiệm  $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$ . Nói cách khác, ta có biểu thị tuyến tính

$$v = (a, b, c) = a e_1 + b e_2 + c e_3.$$

Do đó, hệ véc tơ  $e_1, e_2, e_3$  là một hệ sinh của  $\mathbb{R}^3$ . □

Tổng quát hơn, ta có ví dụ sau.

**VÍ DỤ 4.3.8.** Với mọi số nguyên dương  $n$ , các véc tơ đơn vị chính tắc

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

là một hệ sinh của  $\mathbb{R}^n$ .

**GIẢI.** Cho  $v = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  là một véc tơ bất kỳ trong  $\mathbb{R}^n$ . Ta có

$$v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n.$$

Suy ra, mọi véc tơ của  $\mathbb{R}^n$  đều có thể biểu thị tuyến tính qua hệ véc tơ  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Như vậy, hệ véc tơ  $e_1, e_2, \dots, e_n$  là một hệ sinh của  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

**VÍ DỤ 4.3.9.** Các đa thức  $1, x, x^2, \dots, x^n$  là một hệ sinh của không gian véc tơ  $\mathcal{P}_n$ .

**CHỨNG MINH.** Cho  $p \in \mathcal{P}_n$  là một véc tơ bất kỳ. Theo định nghĩa của  $\mathcal{P}_n$ ,  $p$  là một đa thức bậc nhỏ hơn hoặc bằng  $n$ , tức là  $p$  có dạng

$$p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n.$$

Đẳng thức này chính là một biểu thị tuyến tính của  $p$  qua hệ véc tơ  $1, x, x^2, \dots, x_n$  với các hệ số lần lượt là  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ . Vậy, hệ đa thức  $1, x, x^2, \dots, x_n$  là một hệ sinh của  $\mathcal{P}_n$ .  $\square$

**VÍ DỤ 4.3.10.** Hệ véc tơ

$$v_1 = (1, 1, 2), \quad v_2 = (1, 0, 1), \quad v_3 = (2, 1, 3)$$

có phải là một hệ sinh của không gian véc tơ  $\mathbb{R}^3$  hay không?

**GIẢI.** Cho  $v = (a, b, c)$  là một véc tơ bất kỳ trong  $\mathbb{R}^3$ . Hệ véc tơ  $v_1, v_2, v_3$  là một hệ sinh của  $\mathbb{R}^3$  khi và chỉ khi phương trình véc tơ

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = v$$

luôn có nghiệm.

Phương trình véc tơ này tương đương với hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{array}{rrrrr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & a \\ x_1 & + & & + & x_3 & = & b \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & c \end{array} \quad (1)$$

Khử Gauss ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính này

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 2 & 1 & 3 & c \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & a+b-c \end{array} \right].$$

Từ đây, ta thấy rằng phương trình véc tơ đã cho vô nghiệm nếu  $a+b-c \neq 0$ , ví dụ  $a=1, b=1, c=0$ .

Vậy hệ véc tơ  $v_1, v_2, v_3$  đã cho không phải là một hệ sinh của  $\mathbb{R}^3$ .  $\square$

Trong lời giải trên, khi xét hệ phương trình tuyến tính (1), vì hệ này có số phương trình bằng số ẩn, nên ta có thể sử dụng định thức.

Cụ thể hơn: hệ phương trình (1) có nghiệm với mọi vô hướng  $a, b, c$  khi và chỉ khi định thức của ma trận hệ số khác không. Tính định thức, ta được

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0.$$

Do đó, hệ phương trình (1) vô nghiệm với  $a, b, c$  nào đó. Vậy hệ véc tơ  $v_1, v_2, v_3$  đã cho không phải là một hệ sinh của  $\mathbb{R}^3$ .

Ta có thể sử dụng cách làm bằng định thức như thế này trong trường hợp hệ phương trình cần xem xét có số phương trình bằng đúng số ẩn.

**VÍ DỤ 4.3.11.** Hệ véc tơ

$$p_1 = 1 + x + x^2, p_2 = -1 - x, p_3 = 2 + 2x + x^2$$

có phải là hệ sinh của không gian véc tơ  $\mathcal{P}_2$  hay không?

**GIẢI.** Cho  $p = a + bx + cx^2$  là một phần tử bất kỳ của  $\mathcal{P}_2$ . Hệ véc tơ  $p_1, p_2, p_3$  là một hệ sinh của  $\mathcal{P}_2$  khi và chỉ khi phương trình véc tơ

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 0$$

luôn có nghiệm. Phương trình này tương đương với

$$x_1(1+x+x^2) + x_2(-1-x) + x_3(2+2x+x^2) = a+bx+cx^2.$$

So sánh hệ số của các lũy thừa của  $x$ , ta được hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{array}{rrrrr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & a \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & b \\ x_1 & + & & + & x_3 & = & c. \end{array}$$

Vì hệ phương trình này có số phương trình bằng số ẩn nên ta xét định thức của ma trận hệ số của nó. Ta có

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Do đó, hệ phương trình tuyến tính trên vô nghiệm với  $a, b, c$  nào đó. Vậy, hệ đa thức  $p_1, p_2, p_3$  không phải là một hệ sinh của  $\mathcal{P}_2$ .  $\square$

#### VÍ DỤ 4.3.12. Hệ véc tơ

$$q_1 = x + x^2, q_2 = x - x^2, q_3 = 1 + x, q_4 = 1 - x$$

có phải là hệ sinh của không gian véc tơ  $\mathcal{P}_2$  hay không?

**GIẢI.** Cho  $p = a + bx + cx^2$  là một phần tử bất kỳ của  $\mathcal{P}_2$ . Hệ véc tơ  $q_1, q_2, q_3, q_4$  là một hệ sinh của  $\mathcal{P}_2$  khi và chỉ khi phương trình véc tơ

$$x_1q_1 + x_2q_2 + x_3q_3 + x_4q_4 = 0$$

luôn có nghiệm. Phương trình này tương đương với

$$x_1(x+x^2) + x_2(x-x^2) + x_3(1+x) + x_4(1-x) = a+bx+cx^2.$$

So sánh hệ số của các lũy thừa của  $x$ , ta được hệ phương trình tuyến tính với ma trận hệ số mở rộng là

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & -1 & b \\ 1 & -1 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Ta không thể sử dụng định thức trong trường hợp này vì ma trận hệ số không phải là một ma trận vuông. Khử Gauss ma trận hệ số mở rộng, ta được ma trận bậc thang

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 2 & 1 & -1 & b-c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

Suy ra, phương trình véc tơ trên có nghiệm với mọi vô hướng  $a, b, c$ . Vậy hệ véc tơ  $q_1, q_2, q_3, q_4$  là một hệ sinh của  $\mathcal{P}_2$ .  $\square$

**VÍ DỤ 4.3.13.** Hệ ma trận

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

có phải là một hệ sinh của không gian véc tơ  $M_{2 \times 2}$  hay không?

**GIẢI.** Cho  $A \in M_{2 \times 2}$  là một ma trận bất kỳ,  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . Hệ ma trận  $A_1, A_2, A_3, A_4$  là một hệ sinh của  $M_{2 \times 2}$  khi và chỉ khi phương trình véc tơ

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4 = A$$

luôn có nghiệm. Phương trình này tương đương với

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

So sánh các phần tử của các ma trận lần lượt ở các vị trí  $(1, 1), (1, 2), (2, 1)$  và  $(2, 2)$ , ta nhận được hệ phương trình tuyến tính với ma trận hệ số mở rộng là

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 2 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & 0 & 1 & d \end{bmatrix}$$

Khử Gauss ma trận này, ta được ma trận bậc thang

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2a-b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a+c+d \end{bmatrix}.$$

Từ đó, ta thấy rằng phương trình véc tơ trên có nghiệm với mọi vô hướng  $a, b, c, d$ . Do đó, hệ ma trận  $A_1, A_2, A_3, A_4$  là một hệ sinh của  $M_{2 \times 2}$ .  $\square$

**VÍ DỤ 4.3.14.** Hệ ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

có là một hệ sinh của  $M_{2 \times 2}$  hay không?

**GIẢI.** Hệ ma trận  $A, B, C, D$  là một hệ sinh của  $M_{2 \times 2}$  khi và chỉ khi phương trình

$$x_1 A + x_2 B + x_3 C + x_4 D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

có nghiệm với mọi  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}$ . Phương trình trên tương đương với hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 &= a \\ -1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 &= b \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 &= c \\ 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 &= d \end{aligned}$$

Khử Gauss ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình trên:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 & 1 & d \end{array} \right] &\longrightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a-d \end{array} \right] \\ &\longrightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-c-d \end{array} \right] \end{aligned}$$

Ta thấy rằng hệ phương trình tuyến tính vô nghiệm nếu  $a - c - d \neq 0$ , chẳng hạn  $a = 1, c = d = 0$ . Vậy hệ ma trận đã cho không là hệ sinh của  $M_{2 \times 2}$ . □

## BÀI TẬP

**4.27** [hint] Hệ véctơ sau có phải một hệ sinh của  $\mathbb{R}^3$ .

- a.  $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 0, 3)$
- b.  $v_1 = (2, -1, 3), v_2 = (4, 1, 2), v_3 = (8, -1, 8).$

**4.28** [hint] Cho các đa thức

$$p_1 = 1 - x + 2x^2, \quad p_2 = 5 - x + 4x^2, \quad p_3 = 3 + x, \quad p_4 = 1 - x + x^2.$$

- Hệ đa thức  $p_1, p_2, p_3, p_4$  có là một hệ sinh của  $\mathcal{P}_2$  hay không?
- Hệ đa thức  $p_1, p_2, p_3$  có là một hệ sinh của  $\mathcal{P}_2$  hay không?

## BÀI TẬP TỔN HỢP

**4.29** [hint] Trong không gian vectơ  $F(-\infty, \infty)$ ,  $\mathcal{L}(\cos^2 x, \sin^2 x)$  chứa vectơ nào trong các vectơ

- $\cos 2x$
- $\sin 2x$

**4.30** [hint] Trong không gian vectơ  $F(-\infty, \infty)$ ,  $\mathcal{L}(\cos^2 x, \sin^2 x)$  chứa vectơ nào trong các vectơ

- $3 + x^2$
- $\pi$
- $3 + x^2 \notin \mathcal{L}(\cos^2 x, \sin^2 x)$ .
- $\pi \in \mathcal{L}(\cos^2 x, \sin^2 x)$ .

**4.31** [hint] Trong không gian  $\mathcal{P}_2$ , cho

$$p_1 = 1 + x^2, \quad p_2 = 1 + x + x^2, \quad q_1 = (1 + x)^2, \quad q_2 = 2x$$

Chứng minh rằng  $\mathcal{L}(p_1, p_2) = \mathcal{L}(q_1, q_2)$ .

**4.32** [hint] Cho  $W$  là không gian nghiệm của phương trình thuần nhất  $Ax = 0$  trong đó

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Hệ vectơ sau có là một hệ sinh của  $W$ ?

- $u = (1, 0, -1, 0), \quad v = (0, 1, 0, -1)$
- $u = (1, 0, -1, 0), \quad v = (1, 1, -1, -1)$

**4.33** [hint] Cho  $V$  là một không gian vectơ và  $v_1, v_2, v_3 \in V$ . Chứng minh rằng

$$\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) = \mathcal{L}(v_1 + v_2, v_1 - v_2, v_2 + v_3).$$

## 4.4 ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH VÀ PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

**ĐỊNH NGHĨA 4.4.1.** Một hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$  trong không gian véc tơ  $V$  được gọi là

▷ **độc lập tuyến tính** nếu phương trình véc tơ

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_rv_r = 0$$

chỉ có nghiệm tầm thường  $x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0$ .

▷ **phụ thuộc tuyến tính** nếu nó không độc lập tuyến tính, tức là nếu phương trình véc tơ

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_rv_r = 0$$

có nghiệm không tầm thường.

Mỗi nghiệm  $(k_1, k_2, \dots, k_r)$  của phương trình véc tơ  $x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_rv_r = 0$  cho ta một **ràng buộc tuyến tính**

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_rv_r = 0$$

của hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Ràng buộc tuyến tính này được gọi là tầm thường nếu  $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$ .

**VÍ DỤ 4.4.2.** Hệ véc tơ đơn vị chính tắc

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

của  $\mathbb{R}^n$  là một hệ độc lập tuyến tính.

**GIẢI.** Hệ véc tơ  $e_1, e_2, \dots, e_n$  độc lập tuyến tính khi và chỉ khi phương trình véc tơ

$$x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n = 0$$

chỉ có nghiệm tầm thường. Phương trình này tương đương với

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Do đó, phương trình chỉ có nghiệm tầm thường  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  như mong muốn. Vậy hệ véc tơ đơn vị chính tắc  $e_1, e_2, \dots, e_n$  là một hệ độc lập tuyến tính.  $\square$

**VÍ DỤ 4.4.3.** Hệ véc tơ

$$v_1 = (1, -2, 3), \quad v_2 = (5, 6, -1), \quad v_3 = (3, 2, 1)$$

của  $\mathbb{R}^3$  là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính? Trong trường hợp hệ véc tơ này phụ thuộc tuyến tính, tìm một ràng buộc tuyến tính không tầm thường của nó.

**GIẢI.** Hệ véc tơ  $v_1, v_2, v_3$  độc lập tuyến tính khi và chỉ khi phương trình véc tơ

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$$

chỉ có nghiệm tầm thường. Phương trình này tương đương với

$$x_1 (1, -2, 3) + x_2 (5, 6, -1) + x_3 (3, 2, 1) = 0.$$

So sánh các thành phần của các véc tơ này ta nhận được một hệ phương trình tuyến tính với ma trận hệ số mở rộng là

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Khử Gauss ma trận hệ số mở rộng này, ta được ma trận bậc thang

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Từ đây ta thấy rằng phương trình véc tơ trên có nghiệm không tầm thường. Như vậy, hệ véc tơ  $v_1, v_2, v_3$  phụ thuộc tuyến tính.

Để có một ràng buộc tuyến tính không tầm thường, từ ma trận bậc thang trên, ta thấy rằng các nghiệm của phương trình véc tơ trên là

$$x_1 = -t, \quad x_2 = -t, \quad x_3 = 2t$$

với  $t \in \mathbb{R}$  bất kỳ. Cho  $t = 1$ , ta được nghiệm  $(-1, -1, 2)$ . Do đó, một ràng buộc tuyến tính không tầm thường của hệ véc tơ  $v_1, v_2, v_3$  là

$$-v_1 - v_2 + 2v_3 = 0.$$

$\square$

Trong lời giải trên, để xét xem hệ phương trình với ma trận hệ số mở rộng (2) có nghiệm không tầm thường hay không, vì ma trận hệ số là một ma trận vuông, nên ta có tính định thức của ma trận hệ số. Hệ phương trình chỉ có nghiệm tầm thường khi và chỉ khi định thức này khác không. Ta có

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 16 & 8 \\ 0 & 16 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Ở đẳng thức thứ hai, ta đã thực hiện các phép biến đổi sơ cấp  $2H_1 + H_2 \rightarrow H_2$  và  $3H_1 - H_3 \rightarrow H_3$ . Khi đó, hệ phương trình tuyến tính có nghiệm không tầm thường.

**Một hệ véc tơ cho trước độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính**

Để biết một hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$  trong một không gian véc tơ  $V$  là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính, ta tiến hành như sau.

**1. Xét phương trình véc tơ**

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_r v_r = 0$$

rồi biến đổi tương đương nó thành một hệ phương trình tuyến tính. Hệ phương trình tuyến tính này là thuần nhất, do đó, nó luôn có nghiệm tầm thường  $x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0$ .

**2. Sử dụng các kỹ thuật giải hệ phương trình tuyến tính, để xét xem hệ phương trình tuyến tính trên có nghiệm không tầm thường hay không. Ở bước này, ta thường khử Gauss ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính.**

- ▷ Nếu phương trình véc tơ có nghiệm không tầm thường thì ta kết luận hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$  là một hệ phụ thuộc tuyến tính.
- ▷ Nếu phương trình véc tơ chỉ có nghiệm tầm thường thì ta kết luận hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$  là một hệ độc lập tuyến tính.

**Ví dụ 4.4.4. Hệ véc tơ**

$$v_1 = (1, 2, 2, -1), \quad v_2 = (4, 9, 9, -4), \quad v_3 = (5, 8, 9, -5)$$

trong  $\mathbb{R}^4$  là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

**GIẢI.** Hệ véc tơ  $v_1, v_2, v_3$  độc lập tuyến tính khi và chỉ khi phương trình véc tơ

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$$

chỉ có nghiệm tầm thường. Phương trình này tương đương với

$$x_1 (1, 2, 2, -1) + x_2 (4, 9, 9, -4) + x_3 (5, 8, 9, -5) = 0.$$

So sánh các thành phần của các véc tơ này, ta nhận được một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với ma trận hệ số mở rộng là

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 9 & 8 & 0 \\ 2 & 9 & 9 & 0 \\ -1 & -4 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Khử Gauss ma trận này, ta được ma trận bậc thang

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Từ đây, ta thấy rằng phương trình véc tơ trên chỉ có nghiệm tầm thường  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . Vậy hệ véc tơ  $v_1, v_2, v_3$  độc lập tuyến tính.  $\square$

**VÍ DỤ 4.4.5.** Hệ đa thức

$$1, x, x^2, \dots, x^n$$

của  $\mathcal{P}_n$  độc lập tuyến tính.

**GIẢI.** Xét phương trình véc tơ

$$x_1 \cdot 1 + x_2 x + x_3 x^2 + \dots + x_{n+1} x^n = 0.$$

Vì hai đa thức bằng nhau khi và chỉ khi các hệ số tương ứng với các lũy thừa của  $x$  của hai đa thức bằng nhau, nên phương trình véc tơ trên chỉ có nghiệm tầm thường

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1} = 0.$$

Vậy hệ véc tơ  $1, x, x^2, \dots, x^n$  của  $\mathcal{P}_n$  là độc lập tuyến tính.  $\square$

**VÍ DỤ 4.4.6.** Hệ đa thức

$$p_1 = 1 - x, \quad p_2 = 5 + 3x - 2x^2, \quad p_3 = 1 + 3x - x^2$$

của  $\mathcal{P}_2$  là độc lập tuyến tính.

**GIẢI.** Hệ đa thức  $p_1, p_2, p_3$  độc lập tuyến tính khi và chỉ khi phương trình véc tơ

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 0$$

chỉ có nghiệm tầm thường. Phương trình này tương đương với

$$x_1(1 - x) + x_2(5 + 3x - 2x^2) + x_3(1 + 3x - x^2) = 0.$$

So sánh hệ số của các lũy thừa của  $x$ , ta nhận được hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với ma trận hệ số mở rộng là

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Khử Gauss ma trận này, ta thu được ma trận bậc thang

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Từ đó suy ra phương trình véc tơ trên có nghiệm không tầm thường. Vậy, hệ véc tơ  $p_1, p_2, p_3$  phụ thuộc tuyến tính.

Vì ma trận hệ số của hệ phương trình tuyến tính bên trên là một ma trận vuông nên ta cũng có thể tính định thức của nó để biết hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có nghiệm không tầm thường hay không.  $\square$

**VÍ DỤ 4.4.7.** Hệ đa thức

$$p_1 = 2 + x + 3x^2, \quad p_2 = 6 - x + 5x^2, \quad p_3 = 2 - 3x - x^2$$

trong không gian véc tơ  $\mathcal{P}_2$  là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính.

**GIẢI.** Theo định nghĩa, hệ  $p_1, p_2, p_3$  là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi phương trình vectơ

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 0$$

chỉ có nghiệm tầm thường  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ .

Phương trình vectơ trên tương đương với hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 1x_1 - 1x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_3 - 1x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Khử Gauss ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính này

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cccc} 2 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \end{array} \right] &\longrightarrow \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \end{array} \right] \\ &\longrightarrow \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right] \\ &\longrightarrow \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Hệ phương trình có nghiệm không tầm thường vì  $x_3$  là một ẩn tự do. Vậy hệ đa thức  $p_1, p_2, p_3$  phụ thuộc tuyến tính.  $\square$

**MỆNH ĐỀ 4.4.8.** 1. Mọi hệ véc tơ chứa véc tơ không đều phụ thuộc tuyến tính.

2. Hệ hai véc tơ  $v_1, v_2$  là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi  $v_1$  là một bội vô hướng của  $v_2$  hoặc  $v_2$  là một bội vô hướng của  $v_1$ .

**CHỨNG MINH.** (a) Giả sử hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$  trong một không gian véc tơ  $V$  có  $v_i = 0$ . Xét phương trình véc tơ

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_r v_r = 0.$$

Vì  $v_i = 0$  nên phương trình này có một nghiệm là

$$x_1 = 0, \dots, x_{i-1} = 0, x_i = 1, x_{i+1} = 0, \dots, x_r = 0.$$

Đây là một nghiệm không tầm thường. Do đó, hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$  phụ thuộc tuyến tính.

(b) Hệ hai véc tơ  $v_1, v_2$  phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi phương trình véc tơ

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 = 0 \quad (3)$$

có nghiệm không tầm thường.

Giả sử hệ  $v_1, v_2$  phụ thuộc tuyến tính. Gọi  $x_1 = a_1, x_2 = a_2$  là một nghiệm không tầm thường của phương trình (3). Vì nghiệm là không tầm thường nên  $a_1 \neq 0$  hoặc  $a_2 \neq 0$ .

- ▷ Nếu  $a_1 \neq 0$  thì đẳng thức  $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$  kéo theo  $v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2$ . Do đó,  $v_1$  là một bội của  $v_2$ .
- ▷ Nếu  $a_2 \neq 0$  thì đẳng thức  $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$  kéo theo  $v_2 = -\frac{a_1}{a_2} v_1$ . Do đó,  $v_2$  là một bội của  $v_1$ .

Bây giờ, giả sử  $v_1$  là một bội vô hướng của  $v_2$  hoặc  $v_2$  là một bội vô hướng của  $v_1$ .

- ▷ Nếu  $v_1$  là một bội của  $v_2$  thì tồn tại vô hướng  $k$  sao cho  $v_1 = k v_2$ . Do đó, phương trình (3) có một nghiệm là  $x_1 = 1, x_2 = -k$ .
- ▷ Nếu  $v_2$  là một bội của  $v_1$  thì tồn tại vô hướng  $k$  sao cho  $v_2 = k v_1$ . Do đó, phương trình (3) có một nghiệm là  $x_1 = k, x_2 = -1$ .

Trong cả hai trường hợp, ta thấy rằng phương trình véc tơ (3) luôn có nghiệm không tầm thường. Do đó, hệ véc tơ  $v_1, v_2$  phụ thuộc tuyến tính. □

**VÍ DỤ 4.4.9.** Chứng minh rằng hai hàm

$$f_1 = x, \quad f_2 = \sin x$$

trong không gian véc tơ  $F(-\infty, \infty)$  là độc lập tuyến tính.

**GIẢI.** Hệ hàm  $f_1, f_2$  phụ thuộc tuyến tính trong không gian véc tơ  $F(-\infty, \infty)$  khi và chỉ khi phương trình

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 = 0$$

có nghiệm không tầm thường. Phương trình này tương đương với

$$x_1 x + x_2 \sin x = 0.$$

Đây là sự bằng nhau của hai hàm số, do đó, chúng bằng nhau với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Với mỗi giá trị cụ thể của  $x$ , ta nhận được một phương trình tuyến tính của  $x_1$  và  $x_2$ . Cho  $x = \frac{\pi}{2}$  và  $x = \pi$ , ta nhận được hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{array}{rcl} \frac{\pi}{2}x_1 + x_2 & = & 0 \\ \pi x_1 & = & 0 \end{array}$$

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất này chỉ có nghiệm tầm thường  $x_1 = x_2 = 0$ . Do đó, phương trình véc tơ trên chỉ có nghiệm tầm thường. Vậy hệ hàm  $f_1, f_2$  độc lập tuyến tính.  $\square$

**MỆNH ĐỀ 4.4.10.** Trong không gian véc tơ  $\mathbb{R}^n$ , mọi hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$ , với  $r > n$ , đều phụ thuộc tuyến tính.

**CHỨNG MINH.** Xét phương trình véc tơ

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_r v_r = 0.$$

So sánh các thành phần tương ứng của các véc tơ này, ta nhận được một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất bao gồm  $n$  phương trình đối với  $r$  ẩn  $x_1, x_2, \dots, x_r$ .

Vì  $r > n$  nên hệ phương trình tuyến tính thuần nhất này có số ẩn nhiều hơn số phương trình, và do đó, nó có nghiệm không tầm thường.

Vậy, hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$  phụ thuộc tuyến tính.  $\square$

## BÀI TẬP

**4.34 [hint]** Hệ véc tơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính trong  $\mathbb{R}^3$ .

- $(-3, 0, 4), (5, -1, 2), (1, 1, 3)$
- $(-2, 0, 1), (6, -1, 1), (7, 0, -2), (3, 2, 5)$

**4.35 [hint]** Trong không gian véc tơ  $\mathcal{P}_3$ , hệ véc tơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính.

- $p_1 = 3 + 8x + 7x^2 - 3x^3, p_2 = 1 + 5x + 3x^2 - x^3, p_3 = 2 - x + 2x^2 + 6x^3, p_4 = 2 + x + 3x^2 + 2x^3$ .
- $p_1 = 3 - 3x^2 + 6x^3, p_2 = 2x + 3x^2 + x^3, p_3 = x + x^2, p_4 = 2 + x + 2x^2 + x^3$ .

**4.36** [hint] Các ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính trong  $M_{2 \times 2}$ ?

**4.37** [hint] Tìm  $k$  để hệ ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k & -1 \end{bmatrix}$$

độc lập tuyến tính trong không gian véctơ  $M_{2 \times 2}$ .

**4.38** [hint] Trong không gian véctơ  $F(-\infty, \infty)$ , hệ véctơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

a.  $1, 3\sin^2 x, 2\cos^2 x$

b.  $x, \sin x, \cos x$

**4.39** [hint] Trong không gian véctơ  $F(-\infty, \infty)$ , hệ véctơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

a.  $1, \sin x, \sin 2x$

b.  $\cos 2x, \sin^2 x$ .

**4.40** [hint] Chứng minh rằng hệ hàm

$$f_1(x) = e^x, f_2(x) = xe^x, f_3(x) = x^2e^x$$

độc lập tuyến tính trong không gian véctơ  $F(-\infty, \infty)$ .

**4.41** [hint] Chứng minh rằng hệ tất cả các hệ có nhiều hơn 3 véctơ trong không gian véctơ  $\mathcal{P}_2$  đều phụ thuộc tuyến tính.**4.42** [hint] Cho  $V$  là một không gian véctơ và  $v_1, v_2, v_3 \in V$ . Chứng minh rằng nếu hệ  $v_1, v_2$  độc lập tuyến tính và  $v_3 \notin \mathcal{L}(v_1, v_2)$  thì hệ  $v_1, v_2, v_3$  cũng độc lập tuyến tính.**4.43** [hint] Cho  $V$  là một không gian véctơ,  $v_1, v_2, v_3 \in V$ . Giả sử  $v_3$  là một tổ hợp tuyến tính của  $v_1$  và  $v_2$ . Chứng minh rằng  $\mathcal{L}(v_1, v_2) = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ .

**4.44** [hint] Khẳng định dưới đây là đúng hay sai? Vì sao?

- Bao tuyến tính của một vectơ trong  $\mathbb{R}^2$  là một đường thẳng.
- Bao tuyến tính của hai vectơ trong  $\mathbb{R}^3$  là một mặt phẳng.
- Bao tuyến tính của một tập vectơ  $S$  của không gian vectơ  $V$  là không gian con nhỏ nhất của  $V$  chứa tập hợp  $S$ .
- Các hệ sinh của  $\mathbb{R}^2$  có cùng số phần tử.
- Các đa thức  $x + 1$ ,  $(x + 1)^2$ ,  $(x + 1)^3$  là một hệ sinh của không gian vectơ  $\mathcal{P}_3$ .

## BÀI TẬP TỔNG HỢP

Biết rằng tập con  $V_{a,b}$  của  $\mathbb{R}^\infty$  gồm các dãy số thực  $(x_n)_{n=1}^\infty$  thỏa mãn

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$$

với  $a, b \in \mathbb{R}$ , là một không gian con.

**4.45** [hint] Xét không gian vectơ  $V_{a,b}$  của  $\mathbb{R}^\infty$ . Cho các vectơ  $(x_n)_{n=1}^\infty$ ,  $(y_n)_{n=1}^\infty$  thuộc  $V_{a,b}$ . Chứng minh rằng

$$(x_n)_{n=1}^\infty = (y_n)_{n=1}^\infty \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= y_1, \\ x_2 &= y_2. \end{cases}$$

**4.46** [hint] Xét không gian con  $V_{5,-6}$  của  $\mathbb{R}^\infty$  gồm các dãy số thực  $(x_n)_{n=1}^\infty$  thỏa mãn

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} \text{ với mọi } n \geq 3.$$

- Tìm  $\lambda_1$  và  $\lambda_2$  khác không sao cho hai dãy số  $(\lambda_1^n)_{n=1}^\infty$  và  $(\lambda_2^n)_{n=1}^\infty$  thuộc  $V_{5,-6}$ .
- Chứng minh rằng hai dãy số  $(\lambda_1^n)_{n=1}^\infty$  và  $(\lambda_2^n)_{n=1}^\infty$  độc lập tuyến tính.

**4.47** [hint] Xét không gian con  $V_{4,-4}$  của  $\mathbb{R}^\infty$  gồm các dãy số thực  $(x_n)_{n=1}^\infty$  thỏa mãn

$$x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2} \text{ với mọi } n \geq 3.$$

- Tìm  $\lambda \neq 0$  sao cho dãy số  $(\lambda^n)_{n=1}^\infty$  thuộc  $V_{4,-4}$ .
- Chứng minh rằng dãy số  $(n\lambda^n)_{n=1}^\infty$  cũng thuộc  $V_{4,-4}$ .

- c. Chứng minh rằng hai dãy số  $(\lambda^n)_{n=1}^\infty$  và  $(n\lambda^n)_{n=1}^\infty$  độc lập tuyến tính.

**4.48** [hint] Biết rằng tập con  $V$  của  $C^\infty(-\infty, \infty)$  gồm các hàm  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn

$$f'' = f' + 12f$$

là một không gian con.

- Tìm  $\lambda_1$  và  $\lambda_2$  để hàm mũ  $e^{\lambda_1 x}$  và  $e^{\lambda_2 x}$  thuộc  $V$ .
- Chứng minh rằng hai hàm  $e^{\lambda_1 x}$  và  $e^{\lambda_2 x}$  độc lập tuyến tính.

**4.49** [hint] Biết rằng tập con  $V$  của  $C^\infty(-\infty, \infty)$  gồm các hàm  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn

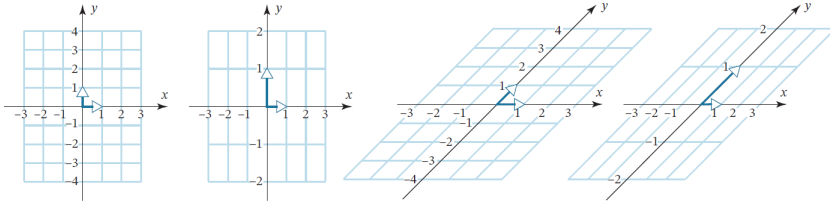
$$f'' = 10f' - 25f$$

là một không gian con.

- Tìm  $\lambda \in \mathbb{R}$  để hàm mũ  $e^{\lambda x}$  thuộc  $V$ .
- Chứng minh rằng hàm  $xe^{\lambda x}$  cũng thuộc  $V$ .
- Chứng minh rằng hai hàm  $e^{\lambda x}$  và  $xe^{\lambda x}$  độc lập tuyến tính.

## 4.5 TỌA ĐỘ, CƠ SỞ

Trong mục này, chúng ta sẽ trang bị hệ trục tọa độ cho một không gian véc tơ bất kỳ, tổng quát hóa khái niệm hệ trục tọa độ  $xy$  trong mặt phẳng  $\mathbb{R}^2$  và hệ trục tọa độ  $xyz$  trong không gian  $\mathbb{R}^3$ .



Hệ trục tọa độ trong mặt phẳng

**ĐỊNH NGHĨA 4.5.1.** Một hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_n$  trong một không gian véc tơ  $V$  được gọi là một **cơ sở** nếu nó đồng thời là một hệ sinh và một hệ độc lập tuyến tính.

**VÍ DỤ 4.5.2.** Hệ véc tơ đơn vị chính tắc

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

là một cơ sở của  $\mathbb{R}^n$  vì nó đồng thời là hệ sinh và hệ độc lập tuyến tính như đã chứng minh trong các mục trên. Cơ sở này được gọi là **cơ sở chính tắc của  $\mathbb{R}^n$** . Đặc biệt

- ▷ Hai véc tơ  $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$  là cơ sở chính tắc của  $\mathbb{R}^2$ .
- ▷ Ba véc tơ  $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$  là cơ sở chính tắc của  $\mathbb{R}^3$ .

**VÍ DỤ 4.5.3.** Hệ đa thức

$$1, x, x^2, \dots, x^n$$

là một cơ sở của  $\mathcal{P}_n$  vì nó đồng thời là hệ sinh và hệ độc lập tuyến tính như đã chứng minh trong các mục trên. Cơ sở này được gọi là **cơ sở chính tắc của  $\mathcal{P}_n$** .

**MỆNH ĐỀ 4.5.4.** Một hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_n$  trong một không gian véc tơ  $V$  là một cơ sở khi và chỉ khi phương trình véc tơ

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = v$$

có nghiệm duy nhất với mọi véc tơ  $v \in V$ .

**VÍ DỤ 4.5.5.** Chứng minh rằng hệ véc tơ

$$v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (2, 9, 0), \quad v_3 = (3, 3, 4)$$

là một cơ sở của  $\mathbb{R}^3$ .

**GIẢI.** Hệ véc tơ  $v_1, v_2, v_3$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^3$  khi và chỉ khi phương trình véc tơ

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = v \tag{4}$$

có nghiệm duy nhất với mọi véc tơ  $v \in \mathbb{R}^3$ ,  $v = (a, b, c)$ . Phương trình này tương đương với

$$x_1 (1, 2, 1) + x_2 (2, 9, 0) + x_3 (3, 3, 4) = (a, b, c).$$

So sánh các thành phần của các véc tơ, ta nhận được hệ phương trình tuyến tính với ma trận hệ số mở rộng là

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 9 & 3 & b \\ 1 & 0 & 4 & c \end{bmatrix}.$$

Khử Gauss ma trận này, ta nhận được ma trận bậc thang

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 5 & -3 & -2a + b \\ 0 & 0 & 1 & 9a - 2b - 5c \end{bmatrix}.$$

Suy ra phương trình véc tơ (4) có nghiệm duy nhất với mọi  $v \in \mathbb{R}^3$ . Vậy hệ véc tơ  $v_1, v_2, v_3$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^3$ .  $\square$

### Chứng minh một hệ véc tơ là cơ sở

Để xét xem một hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_n$  có phải là một cơ sở của một không gian véc tơ  $V$  hay không, chúng ta tiến hành như sau.

1. Lấy một véc tơ  $v \in V$  bất kỳ và xét phương trình véc tơ

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n = v.$$

2. Biến đổi phương trình véc tơ trên thành một hệ phương trình tuyến tính.
3. Sử dụng các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính để xét xem hệ phương trình tuyến tính này luôn có nghiệm duy nhất với mọi véc tơ  $v \in V$  hay không.

- ▷ Nếu hệ phương trình có nghiệm duy nhất với mọi  $v \in V$  thì hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_n$  là một cơ sở của  $V$ .
- ▷ Nếu tồn tại ít nhất một véc tơ  $v \in V$  sao cho hệ phương trình không có nghiệm duy nhất thì hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_n$  không phải là một cơ sở của  $V$ .

**VÍ DỤ 4.5.6.** Chứng minh rằng hệ ma trận

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

là một cơ sở của  $M_{2 \times 2}$ .

Cơ sở này được gọi là **cơ sở chính tắc** của  $M_{2 \times 2}$ .

**GIẢI.** Hệ ma trận  $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$  là một cơ sở của  $M_{2 \times 2}$  khi và chỉ khi phương trình véc tơ

$$x_1E_{11} + x_2E_{12} + x_3E_{21} + x_4E_{22} = A \quad (5)$$

có nghiệm duy nhất với mọi  $A \in M_{2 \times 2}, A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . Phương trình véc tơ này tương đương với

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

So sánh lần lượt các phần tử ở các vị trí  $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$ , ta nhận

được một hệ phương trình tuyến tính với ma trận hệ số mở rộng là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{bmatrix}.$$

Đây là một ma trận bậc thang rút gọn. Ma trận này cho thấy rằng phương trình véc tơ (5) có nghiệm duy nhất với mọi ma trận  $A \in M_{2 \times 2}$ . Vậy hệ ma trận  $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$  là một cơ sở của  $M_{2 \times 2}$ .  $\square$

**VÍ DỤ 4.5.7.** Chứng minh rằng hệ véc tơ

$$v_1 = (1, -4, 3), v_2 = (5, 6, 2), v_3 = (4, 8, 1)$$

là một cơ sở của không gian véc tơ  $\mathbb{R}^3$ .

**GIẢI.** Hệ véc tơ  $v_1, v_2, v_3$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^3$  khi và chỉ khi phương trình véc tơ

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = v \quad (6)$$

có nghiệm duy nhất với mọi véc tơ  $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . Phương trình (6) tương đương với hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{array}{rrrrr} x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & a \\ -4x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & = & b \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & c \end{array} \quad (7)$$

Hệ (7) có nghiệm duy nhất với mọi  $a, b, c$  khi và chỉ khi ma trận hệ số của nó có định thức khác không. Ta có

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -4 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} -4 & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -10 - 5(-28) + 4(-26) \\ &= 26 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Vậy hệ véc tơ đã cho là một cơ sở của  $\mathbb{R}^3$ .  $\square$

## BÀI TẬP

**4.50** [hint] Chứng minh rằng hệ véc tơ sau là một cơ sở của  $\mathbb{R}^4$ .

$$v_1 = (1, -2, 1, 2), v_2 = (0, 0, 1, 1), v_3 = (0, 4, 12, 8), v_4 = (1, 2, -1, 0)$$

**4.51** [hint] Hệ ma trận sau có là một cơ sở của  $M_{2 \times 2}$  hay không?

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**4.52** [hint] Chứng minh rằng không gian véc tơ  $\mathcal{P}_\infty$  là một không gian véc tơ vô hạn chiều.

**4.53** [hint] Các không gian véc tơ

$$\mathbb{R}^\infty, F(-\infty, \infty), C(-\infty, \infty), C^m(-\infty, \infty)$$

đều là các không gian véc tơ vô hạn chiều.

## TỌA ĐỘ

**ĐỊNH NGHĨA 4.5.8.** Giả sử hệ véc tơ  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  là một cơ sở của một không gian véc tơ  $V$ . Cho  $v \in V$ , và

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

là biểu thị tuyến tính duy nhất của  $v$  qua cơ sở  $\mathcal{B}$ . Khi đó, các vô hướng  $c_1, c_2, \dots, c_n$  được gọi là các **tọa độ** của  $v$  đối với cơ sở  $\mathcal{B}$ ; véc tơ

$$[v]_{\mathcal{B}} = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$$

được gọi là **véc tơ tọa độ** của  $v$  đối với cơ sở  $\mathcal{B}$ .

**VÍ DỤ 4.5.9.** Xét không gian véc tơ  $\mathbb{R}^n$  với cơ sở chính tắc  $\mathcal{S} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ . Với mỗi véc tơ  $v = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ , ta có

$$v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n.$$

Do đó, véc tơ tọa độ của  $v$  đối với cơ sở chính tắc chính là  $v$

$$[v]_{\mathcal{S}} = (a_1, a_2, \dots, a_n) = v.$$

**VÍ DỤ 4.5.10.** Xét không gian véc tơ  $\mathcal{P}_n$ . Tìm véc tơ tọa độ của đa thức

$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

đối với cơ sở chính tắc  $\mathcal{S} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ .

**GIẢI.** Biểu thị đa thức  $p$  qua cơ sở chính tắc của  $\mathcal{P}_n$ :

$$\begin{aligned} p &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \\ &= a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n. \end{aligned}$$

Do đó, véc tơ tọa độ của  $p$  trong cơ sở chính tắc là

$$[p]_{\mathcal{S}} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

□

**VÍ DỤ 4.5.11.** Xét không gian véc tơ  $M_{2 \times 2}$ . Tìm véc tơ tọa độ của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

đối với cơ sở chính tắc  $\mathcal{S} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ .

**GIẢI.** Biểu thị ma trận  $A$  qua cơ sở chính tắc của  $M_{2 \times 2}$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22}. \end{aligned}$$

Do đó, véc tơ tọa độ của ma trận  $A$  đối với cơ sở chính tắc là

$$[A]_{\mathcal{S}} = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in \mathbb{R}^4.$$

□

**VÍ DỤ 4.5.12.** Tìm vectơ tọa độ của  $p = 1 - x + 5x^3 \in P_3$  và  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}$  trong cơ sở chính tắc của các không gian vectơ này.

**GIẢI.** vectơ tọa độ của  $p = 1 - x + 5x^3 \in P_3$  trong cơ sở chính tắc  $\{1, x, x^2, x^3\}$  là vectơ  $(1, -1, 0, 5) \in \mathbb{R}^4$  vì

$$p = 1.1 + (-1).x + 0.x^2 + 5.x^3$$

Do đó, ta thường đồng nhất một đa thức với dãy hệ số của nó, tức là với vectơ tọa độ của đa thức trong cơ sở chính tắc.

vectơ tọa độ của  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}$  trong cơ sở chính tắc  $\{E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}\}$  là vectơ  $(1, 7, 3, 5) \in \mathbb{R}^4$  vì

$$A = 1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_1} + 7 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{E_2} + 3 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_3} + 5 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_4}.$$

□

**VÍ DỤ 4.5.13.** Biết rằng hệ vectơ  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$  với

$$v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (2, 9, 0), \quad v_3 = (3, 3, 4)$$

là một cơ sở của  $\mathbb{R}^3$ .

1. Tìm vectơ tọa độ của vectơ  $v = (5, -1, 9)$  trong cơ sở  $\mathcal{B}$ .
2. Tìm vectơ  $w \in \mathbb{R}^3$  biết rằng vectơ tọa độ của  $w$  trong cơ sở  $\mathcal{B}$  là  $[w]_{\mathcal{B}} = (-1, 3, 2)$ .

**GIẢI.** (a) Vectơ tọa độ của  $v$  trong cơ sở chính tắc chính là vectơ nghiệm của phương trình vectơ

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = v.$$

Phương trình này tương đương với

$$x_1 (1, 2, 1) + x_2 (2, 9, 0) + x_3 (3, 3, 4) = (5, -1, 9).$$

So sánh các thành phần tương ứng của các véc tơ, ta nhận được hệ phương trình tuyến tính với ma trận hệ số mở rộng là

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 9 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Khử Gauss ma trận này, ta được ma trận bậc thang

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Do đó, phương trình có nghiệm duy nhất  $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$ . Vậy véc tơ tọa độ của  $v$  trong cơ sở  $\mathcal{B}$  là

$$[v]_{\mathcal{B}} = (1, -1, 2).$$

(b) Vì các thành phần của véc tơ tọa độ của véc tơ  $w$  đối với cơ sở  $\mathcal{B}$  chính là các hệ số trong biểu thị tuyến tính của  $w$  trong cơ sở  $\mathcal{B}$  nên

$$\begin{aligned} w &= (-1)v_1 + 3v_2 + 2v_3 \\ &= -(1, 2, 1) + 3(2, 9, 0) + 2(3, 3, 4) \\ &= (11, 31, 7). \end{aligned}$$

Vậy  $w = (11, 31, 7)$ . □

## BÀI TẬP

**4.54 [hint]** Cho  $V$  là một không gian véc tơ  $n$  chiều,  $\mathcal{B}$  là một cơ sở của  $V$ . Cho  $v_1, v_2, \dots, v_p$  là một hệ véc tơ của  $V$ . Với mỗi  $i$ ,  $[v_i]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$  là véc tơ tọa độ của  $v_i$  trong cơ sở  $\mathcal{B}$ . Chứng minh rằng hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_p$  là một hệ sinh của  $V$  khi và chỉ khi hệ véc tơ tọa độ  $[v_1]_{\mathcal{B}}, [v_2]_{\mathcal{B}}, \dots, [v_p]_{\mathcal{B}}$  là một hệ sinh của  $\mathbb{R}^n$ .

**4.55 [hint]** Cho  $V$  là một không gian véc tơ  $n$  chiều,  $\mathcal{B}$  là một cơ sở của  $V$ . Cho  $v_1, v_2, \dots, v_p$  là một hệ véc tơ của  $V$ . Với mỗi  $i$ ,  $[v_i]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$  là véc tơ tọa độ của  $v_i$  trong cơ sở  $\mathcal{B}$ . Chứng minh rằng hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_p$  độc lập tuyến tính (tương ứng, phụ thuộc tuyến tính) khi và chỉ khi hệ véc tơ tọa độ  $[v_1]_{\mathcal{B}}, [v_2]_{\mathcal{B}}, \dots, [v_p]_{\mathcal{B}}$  độc lập tuyến tính (tương ứng, phụ thuộc tuyến tính).

**4.56 [hint]** Cho  $V$  là một không gian véc tơ  $n$  chiều,  $\mathcal{B}$  là một cơ sở của  $V$ . Cho  $v_1, v_2, \dots, v_p$  là một hệ véc tơ của  $V$ . Với mỗi  $i$ ,  $[v_i]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$  là véc tơ tọa độ của  $v_i$  trong cơ sở  $\mathcal{B}$ . Chứng minh rằng hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_p$  là một cơ sở của  $V$  khi và chỉ khi hệ véc tơ tọa độ  $[v_1]_{\mathcal{B}}, [v_2]_{\mathcal{B}}, \dots, [v_p]_{\mathcal{B}}$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^n$ .

### CƠ SỞ VÀ MA TRẬN KHẢ NGHỊCH

Xét hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_p$  của không gian véc tơ  $\mathbb{R}^n$ .

- ▷ Nếu  $p \neq n$  thì hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_p$  không thể là một cơ sở của  $\mathbb{R}^n$ .
- ▷ Giả sử  $p = n$ . Khi đó hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_n$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^n$  khi và chỉ khi ma trận

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} \in M_{n \times n}$$

khả nghịch

Tổng quát hơn, cho  $v_1, v_2, \dots, v_p$  là các véc tơ của một không gian véc tơ  $V$ ,  $\dim V = n$ .

- ▷ Nếu  $p \neq n$  thì hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_n$  không thể là một cơ sở của  $V$ .
- ▷ Giả sử  $p = n$ . Gọi  $\mathcal{B}$  là một cơ sở của  $V$ . Với mỗi  $i$ ,  $[v_i]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$  là tọa độ của  $v_i$  trong cơ sở  $\mathcal{B}$ . Khi đó, hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_n$  là một cơ sở của  $V$  khi và chỉ khi hệ véc tơ tọa độ  $[v_1]_{\mathcal{B}}, [v_2]_{\mathcal{B}}, \dots, [v_n]_{\mathcal{B}}$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^n$ , tức là ma trận

$$\begin{bmatrix} [v_1]_{\mathcal{B}} & [v_2]_{\mathcal{B}} & \dots & [v_n]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} \in M_{n \times n}$$

khả nghịch.

#### VÍ DỤ 4.5.14.

- a. Chứng minh rằng các đa thức

$$p_1 = 1 + 2x + x^2, \quad p_2 = 2 + 9x, \quad p_3 = 3 + 3x + 4x^2$$

lập thành một cơ sở của  $P_2$ .

- b. Tìm tọa độ của  $p = 5 - x + 9x^2$  đối với cơ sở  $\mathcal{S} = \{p_1, p_2, p_3\}$ .  
 c. Tìm đa thức  $q \in P_2$  có véc tơ tọa độ trong cơ sở  $\mathcal{S}$  là  $(-1, 3, 2)$ .

**GIẢI.** a. Gọi  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$  là cơ sở chính tắc của  $\mathcal{P}_2$ . Khi đó, hệ đa thức  $p_1, p_2, p_3$  là một cơ sở của  $\mathcal{P}_2$  khi và chỉ khi hệ véctơ tọa độ  $[p_1]_{\mathcal{B}}, [p_2]_{\mathcal{B}}, [p_3]_{\mathcal{B}}$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^3$ . Điều này tương đương với việc ma trận

$$\begin{bmatrix} [p_1]_{\mathcal{B}} & [p_2]_{\mathcal{B}} & [p_3]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

khả nghịch. Định thức của ma trận này là

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} \\ &= -21 + 4 \cdot (5) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Vì định thức khác không nên ma trận khả nghịch. Do đó, hệ đa thức  $p_1, p_2, p_3$  là một cơ sở của  $\mathcal{P}_2$ .

b. Tọa độ của đa thức  $p$  trong cơ sở  $\mathcal{S}$  là nghiệm của phương trình véctơ

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = p.$$

Phương trình này tương đương với hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình tuyến tính này, ta được  $x = (1, -1, 2)$ . Do đó, véctơ tọa độ của  $p$  trong cơ sở  $\mathcal{S}$  là  $[p]_{\mathcal{S}} = (1, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$ .

c. Vì  $[q]_{\mathcal{S}} = (-1, 3, 2)$  nên

$$\begin{aligned} q &= (-1)p_1 + 3p_2 + 2p_3 \\ &= (-1)(1 + 2x + x^2) + 3(2 + 9x) + 2(3 + 3x + 4x^2) \\ &= 11 + 31x + 7x^2. \end{aligned}$$

□

## BÀI TẬP

### 4.57 [hint]

a. Chứng minh rằng các đa thức

b.

$$p_1 = 1 - x - 3x^2, p_2 = -3 + 4x + 9x^2, p_3 = 2 - 2x + 4x^2$$

lập thành một cơ sở của  $P_2$ .

- c. Tìm vectơ tọa độ của đa thức  $p = 8 - 9x + 6x^2$  trong cơ sở  $\{p_1, p_2, p_3\}$ .

**4.58** [hint] Các đa thức

$$3 + 7x, 5 + x - 2x^3, x - 2x^2, 1 + 16x - 6x^2 + 2x^3$$

có lập thành một cơ sở của  $P_3$  hay không?

**4.59** [hint] Các ma trận

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

có lập thành một cơ sở của  $M_{2 \times 2}$  hay không?

## 4.6 SỐ CHIỀU; MA TRẬN CHUYỂN CƠ SỞ

Cơ sở chính tắc của không gian véc tơ  $\mathbb{R}^n$  gồm  $n$  véc tơ. Ta sẽ chứng minh rằng tất cả các cơ sở của  $\mathbb{R}^n$  đều có đúng  $n$  véc tơ. Một cách tổng quát, một không gian véc tơ có thể có nhiều cơ sở khác nhau, nhưng số lượng véc tơ trong các cơ sở bằng nhau. Đây là tính chất đặc biệt quan trọng của không gian véc tơ.

### SỐ LƯỢNG VEC TƠ TRONG MỘT CƠ SỞ

**ĐỊNH LÝ 4.6.1.** *Tất cả các cơ sở của một không gian véc tơ hữu hạn chiều có số lượng véc tơ bằng nhau.*

**ĐỊNH LÝ 4.6.2.** *Cho  $V$  là một không gian véc tơ hữu hạn chiều và  $v_1, v_2, \dots, v_n$  là một cơ sở của  $V$ .*

1. *Mọi hệ véc tơ trong  $V$  có nhiều hơn  $n$  véc tơ đều phụ thuộc tuyến tính.*
2. *Mọi hệ véc tơ trong  $V$  có ít hơn  $n$  véc tơ không phải là một hệ sinh của  $V$ .*

**Chứng minh định lý 4.6.1.** Gọi  $v_1, v_2, \dots, v_n$  là một cơ sở của  $V$ . Theo định lý 4.6.2:

- ▷ một hệ véc tơ trong  $V$  có ít hơn  $n$  phần tử không thể là một hệ sinh,
- ▷ một hệ véc tơ có nhiều hơn  $n$  phần tử không thể là một hệ độc lập tuyến tính.

Do đó, tất cả các cơ sở của  $V$  đều phải có đúng  $n$  phần tử. □

**ĐỊNH NGHĨA 4.6.3.** *Số chiều* của một không gian véc tơ hữu hạn chiều  $V$ , ký hiệu  $\dim V$ , được định nghĩa là số lượng véc tơ trong các cơ sở của  $V$ .

Ta quy ước không gian véc tơ không có số chiều bằng không.

**Corollary 2.** *Cho  $V$  là một không gian véc tơ.*

1. Nếu  $V$  có một hệ sinh gồm  $n$  véc tơ thì  $\dim V \leq n$ .
2. Nếu  $V$  có một hệ độc lập tuyến tính gồm  $n$  véc tơ thì  $\dim V \geq n$ .

**VÍ DỤ 4.6.4.** Số chiều của một số không gian véc tơ quen thuộc.

▷  $\dim \mathbb{R}^n$  vì cơ sở chính tắc  $e_1, e_2, \dots, e_n$  của  $\mathbb{R}^n$  có  $n$  véc tơ, với

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

trong đó phần tử 1 ở vị trí thứ  $i$ .

▷  $\dim \mathcal{P}_n = n + 1$  vì cơ sở chính tắc

$$1, x, x^2, \dots, x^n$$

của  $\mathcal{P}_n$  có  $n + 1$  véc tơ.

▷  $\dim M_{m \times n} = mn$  vì cơ sở chính tắc  $E_{ij}$  với  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ , có  $mn$  véc tơ. Ma trận  $E_{ij}$  có phần tử khác không duy nhất là số 1 ở vị trí  $(i, j)$ .

**VÍ DỤ 4.6.5.** Nếu hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$  độc lập tuyến tính thì

$$\dim \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_r) = r.$$

**GIẢI.** Hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$  là một hệ sinh của  $\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_r)$ . Hơn nữa, theo giả thiết, hệ véc tơ này độc lập tuyến tính. Do đó, hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$  là một cơ sở của  $\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_r)$ . Do đó

$$\dim \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_r) = r.$$

□

**VÍ DỤ 4.6.6.** Xác định số chiều và một cơ sở cho các không gian con của  $M_{2 \times 2}$  gồm các ma trận đối xứng.

**GIẢI.** Cho ma trận  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}$ . Ma trận  $A$  đối xứng khi và chỉ khi  $a_{12} = a_{21}$ . Do đó

$$A = a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

với các  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  là các số thực xác định duy nhất. Vậy không gian con các ma trận đối xứng của  $M_{2 \times 2}$  là một không gian véctơ 3 chiều với một cơ sở là hệ ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Ví dụ sau minh họa cách tìm một cơ sở cho không gian nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất. Đây là một bài toán quan trọng.

**VÍ DỤ 4.6.7.** Tìm một cơ sở cho không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & & + & 2x_5 & & = & 0 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 4x_5 & - & 3x_6 & = & 0 \\ & & & & 5x_3 & + & 10x_4 & & & + & 15x_6 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & & & & + & 8x_4 & + & 4x_5 & + & 18x_6 & = & 0. \end{array}$$

**GIẢI.** Khử Gauss ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính này, ta được ma trận bậc thang

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Các ẩn tự do là  $x_2, x_4$  và  $x_5$ . Cho các ẩn này các tham số lần lượt bằng  $r, s, t$  bất kỳ, và tính các ẩn khác qua  $r, s, t$ , ta nhận được

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = 0.$$

Véc tơ nghiệm tổng quát là

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (-3r - 4s - 2t, r, -2s, s, t, 0).$$

Tách riêng các tham số  $r, s, t$  trong véc tơ nghiệm bằng cách sử dụng các phép toán véc tơ, ta được

$$\begin{aligned} x &= (-3r, r, 0, 0, 0, 0) + (-4s, 0, -2s, s, 0, 0) + (-2t, 0, 0, 0, t, 0) \\ &= r \underbrace{(-3, 1, 0, 0, 0, 0)}_{v_1} + s \underbrace{(-4, 0, -2, 1, 0, 0)}_{v_2} + t \underbrace{(-2, 0, 0, 0, 1, 0)}_{v_3}. \end{aligned}$$

Do đó, véc tơ nghiệm tổng quát của hệ phương trình tuyến tính đã cho có phân tích

$$x = rv_1 + sv_2 + tv_3$$

với  $r, s, t \in \mathbb{R}$  bất kỳ xác định duy nhất. Vậy hệ véc tơ  $v_1, v_2, v_3$  là một cơ sở của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất đã cho. Số chiều của không gian nghiệm bằng 3.  $\square$

### Cơ sở cho không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Để tìm số chiều và một cơ sở cho không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$Ax = 0, \quad (8)$$

ta tiến hành như sau.

1. Khử Gauss ma trận hệ số mở rộng  $[A \ 0]$  của hệ phương trình tuyến tính.
2. Từ dạng bậc thang, xác định các ẩn tự do, ẩn phụ thuộc. Số chiều của không gian nghiệm của hệ (8) là số lượng ẩn tự do.
3. Cho các ẩn tự do các tham số bất kỳ, rồi tính các ẩn phụ thuộc qua các tham số này để được véc tơ nghiệm tổng quát.
4. Tách riêng các tham số trong véc tơ nghiệm tổng quát để nhận được một cơ sở cho không gian nghiệm của (8).

## MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

**ĐỊNH LÝ 4.6.8.** Cho  $v_1, v_2, \dots, v_r$  là một hệ véc tơ trong một không gian véc tơ  $V$  sao cho hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_{r-1}$  độc lập tuyến tính. Khi đó, hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$  độc lập tuyến tính khi và chỉ khi  $v_r \notin \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_r)$ .

**GIẢI.** Khẳng định cần chứng minh tương đương với: hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$  phụ lập tuyến tính khi và chỉ khi  $v_r \in \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_r)$ . Ta sẽ chứng minh kết quả tương đương này.

( $\Rightarrow$ ). Vì hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$  phụ thuộc tuyến tính nên tồn tại một ràng buộc tuyến tính không tầm thường

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_r v_r = 0. \quad (9)$$

Nếu  $c_r = 0$  thì ta nhận được ràng buộc tuyến tính không tầm thường

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_{r-1} v_{r-1} = 0.$$

Mâu thuẫn với sự độc lập tuyến tính của hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_{r-1}$ . Suy ra  $c_r \neq 0$ . Khi đó, đẳng thức (9) kéo theo

$$v_r = -\frac{c_1}{c_r} v_1 - \frac{c_2}{c_r} v_2 - \dots - \frac{c_{r-1}}{c_r} v_{r-1}.$$

Do đó,  $v_r \in \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_{r-1})$ .

( $\Leftarrow$ ). Vì  $v_r \in \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_r)$  nên  $v_r$  có biểu thị tuyến tính

$$v_r = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_{r-1} v_{r-1}.$$

Suy ra

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_{r-1} v_{r-1} + (-1) v_r = 0.$$

Đây là một ràng buộc tuyến tính không tầm thường của hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$ . Do đó, hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$  độc lập tuyến tính.  $\square$

**ĐỊNH LÝ 4.6.9.** Cho hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$  trong một không gian véc tơ  $V$ . Khi đó

$$\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_r) = \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_{r-1}) \Leftrightarrow v_r \in \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_{r-1}).$$

**VÍ DỤ 4.6.10.** Trong không gian véc tơ  $\mathcal{P}_\infty$ , chứng minh rằng hệ véc tơ

$$p_1 = 1 - x^2, \quad p_2 = 2 - x^2, \quad p_3 = x^3$$

độc lập tuyến tính.

**GIẢI.** Vì hai véc tơ  $p_1$  và  $p_2$  không tỉ lệ với nhau nên hệ hai véc tơ  $p_1, p_2$  độc lập tuyến tính.

Vì  $p_1$  và  $p_2$  là các đa thức bậc 2 nên mọi đa thức trong  $\mathcal{L}(p_1, p_2)$  có bậc không quá 2. Suy ra

$$p_3 \notin \mathcal{L}(p_1, p_2).$$

Vậy, hệ véc tơ  $p_1, p_2, p_3$  độc lập tuyến tính.  $\square$

Cho  $V$  là một không gian véc tơ chiều  $n$ . Khi đó, mỗi hệ sinh của  $V$  có ít nhất  $n$  véc tơ. Ta có thể nói gì về hệ sinh gồm đúng  $n$  véc tơ? Tương tự, mỗi hệ độc lập tuyến tính trong  $V$  có nhiều nhất  $n$  véc tơ. Ta có thể nói gì về hệ độc lập tuyến tính gồm đúng  $n$  véc tơ?

**ĐỊNH LÝ 4.6.11.** Cho  $V$  là một không gian véc tơ  $n$  chiều. Khi đó

1. Các hệ sinh gồm  $n$  véc tơ của  $V$  đều là cơ sở.
2. Các hệ độc lập tuyến tính gồm  $n$  véc tơ của  $V$  đều là cơ sở.

**VÍ DỤ 4.6.12.** 1. Chứng minh rằng hệ véc tơ  $v_1 = (-3, 7), v_2 = (5, 5)$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^2$ .

2. Chứng minh rằng hệ véc tơ  $v_1 = (2, 0, -1), v_2 = (4, 0, 7), v_3 = (-1, 1, 4)$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^3$ .

**CHỨNG MINH.** Vì số phần tử trong các hệ véc tơ bằng đúng số chiều của không gian véc tơ tương ứng nên để chứng minh chúng là cơ sở, ta chỉ cần chứng minh chúng độc lập tuyến tính.

(a) Hai véc tơ  $v_1 = (-3, 7), v_2 = (5, 5)$  không tỉ lệ với nhau nên hệ véc tơ  $v_1, v_2$  độc lập tuyến tính.

(b) Hai véc tơ  $v_1 = (2, 0, -1), v_2 = (4, 0, 7)$  không tỉ lệ với nhau nên hệ véc tơ  $v_1, v_2$  độc lập tuyến tính. Vì các hai véc tơ  $v_1$  và  $v_2$  có thành phần thứ hai bằng không nên các véc tơ trong  $\mathcal{L}(v_1, v_2)$  cũng có thành phần thứ hai bằng không. Suy ra

$$v_3 = (-1, 1, 4) \notin \mathcal{L}(v_1, v_2).$$

Do đó, hệ véc tơ  $v_1, v_2, v_3$  độc lập tuyến tính. □

**ĐỊNH LÝ 4.6.13.** Cho  $V$  là một không gian véc tơ hữu hạn chiều.

1. Mọi hệ sinh của  $V$  có thể bỏ bớt véc tơ thích hợp (nếu cần thiết) để hệ véc tơ còn lại là một cơ sở của  $V$ .
2. Mọi hệ độc lập tuyến tính trong  $V$  đều có thể bổ sung thêm các véc tơ thích hợp (nếu cần thiết) để hệ véc tơ nhận được là một cơ sở của  $V$ .

**ĐỊNH LÝ 4.6.14.** Cho  $V$  là một không gian véc tơ hữu hạn chiều và  $W$  là một không gian con của  $V$ . Khi đó

1.  $W$  hữu hạn chiều.
2.  $\dim W \leq \dim V$ .
3.  $\dim W = \dim V$  khi và chỉ khi  $W = V$ .

## BÀI TẬP

**4.60** [hint] Xác định số chiều và một cơ sở cho các không gian con sau đây của  $M_{2 \times 2}$ .

- a. Không gian con các ma trận chéo.
- b. Không gian con các ma trận tam giác trên.

**4.61** [hint] Xác định số chiều và một cơ sở cho các không gian con sau đây của  $M_{2 \times 2}$ .

- a. Không gian con các ma trận phản đối xứng.
- b. Không gian con các ma trận có vết bằng không.

**4.62** [hint] Xác định số chiều và một cơ sở cho các không gian con sau đây của  $M_{n \times n}$

- a. Không gian con các ma trận chéo.
- b. Không gian con các ma trận đối xứng.

**4.63** [hint] Xác định số chiều và một cơ sở cho các không gian con sau đây của  $M_{n \times n}$

- a. Không gian con các ma trận tam giác trên.
- b. Không gian con các ma trận phản đối xứng.
- c. Không gian con các ma trận có vết bằng không.

**4.64** [hint] Biết rằng tập hợp  $V = \mathbb{R}^2$  trang bị hai phép toán cộng và nhân

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2 + 1, b_1 + b_2 + 1), \quad k(a, b) = (ka + k - 1, kb + k - 1)$$

là một không gian véc tơ với véc tơ không là  $0 = (-1, -1)$  và véc tơ đối của véc tơ  $(a, b)$  là  $-(a, b) = (-a - 2, -b - 2)$ . Tìm một cơ sở cho  $V$ .

**4.65** [hint] Biết rằng tập hợp  $V = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b > 0\}$  trang bị hai phép toán

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 b_2), \quad k(a, b) = (ka, b^k)$$

là một không gian vectơ, với vectơ không là  $0 = (0, 1)$  và vectơ đối của vectơ  $(a, b)$  là  $-(a, b) = \left(-a, \frac{1}{b}\right)$ . Tìm một cơ sở cho  $V$ .

Xét không gian vectơ con  $V_{a,b}$  của  $\mathbb{R}^\infty$  gồm các dãy số  $(x_n)_{n=1}^\infty$  thỏa mãn

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}, \quad \text{với mọi } n \geq 3$$

trong đó  $a, b \in \mathbb{R}$  cố định.

**4.66** [hint] Cho  $a, b \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $a^2 + 4b > 0$ .

- Tìm các số thực  $\lambda_1, \lambda_2$  khác không sao cho hai dãy số  $(\lambda_1^n)_{n=1}^\infty$  và  $(\lambda_2^n)_{n=1}^\infty$  thuộc  $V_{a,b}$ .
- Chứng minh rằng  $(\lambda_1^n)_{n=1}^\infty$  và  $(\lambda_2^n)_{n=1}^\infty$  lập thành một cơ sở của  $V_{a,b}$ .

**4.67** [hint] Cho dãy số  $(x_n)_{n=1}^\infty$  bởi công thức truy hồi

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 3, \quad x_n = x_{n-1} + 12x_{n-2} \quad \text{với mọi } n \geq 3$$

Ta tìm công thức tổng quát cho dãy  $(x_n)_{n=1}^\infty$  như sau. Dãy số  $(x_n)_{n=1}^\infty$  là một vectơ của không gian vectơ  $V_{1,12}$

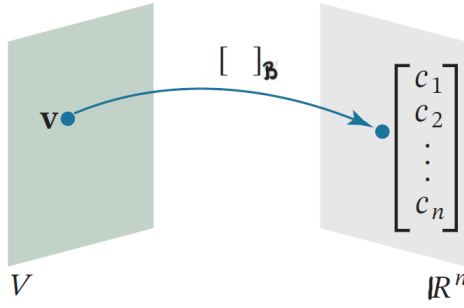
- Tìm các số thực  $\lambda_1, \lambda_2$  sao cho hai dãy số  $(\lambda_1^n)_{n=1}^\infty$  và  $(\lambda_2^n)_{n=1}^\infty$  lập thành một cơ sở của  $V_{1,12}$ .
- Tìm vectơ tọa độ của dãy số  $(x_n)_{n=1}^\infty$  đối với cơ sở trong ý (a).
- Tìm công thức tổng quát của dãy số  $(x_n)_{n=1}^\infty$ .

**4.68** [hint] Cho  $a, b \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $a^2 + 4b = 0$ .

- Tìm số thực  $\lambda$  khác không sao cho dãy số  $(\lambda^n)_{n=1}^\infty$  thuộc vào  $V_{a,b}$ .
- Chứng minh rằng dãy số  $(n\lambda^n)_{n=1}^\infty$  cũng thuộc vào  $V_{a,b}$ .
- Chứng minh rằng hai dãy số  $(\lambda^n)_{n=1}^\infty$  và  $(n\lambda^n)_{n=1}^\infty$  lập thành một cơ sở của  $V_{a,b}$ .

**4.69** [hint] Tìm công thức tổng quát cho dãy số  $(x_n)_{n=1}^\infty$  với  $x_1 = 1, x_2 = -4$  và  $x_n = -3x_{n-1} + 10x_{n-2}$  với mọi  $n \geq 3$ .

**4.70** [hint] Tìm công thức tổng quát cho dãy số  $(y_n)_{n=1}^\infty$  với  $y_1 = -3, y_2 = 1$  và  $y_n = 6y_{n-1} - 9y_{n-2}$  với mọi  $n \geq 3$ .



HÌNH 4.1 – Ánh xạ tọa độ

### ÁNH XẠ TỌA ĐỘ

**ĐỊNH NGHĨA 4.6.15.** Cho  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  là một cơ sở của một không gian véc tơ  $n$ -chiều  $V$ . Khi đó, quy tắc cho tương ứng mỗi véc tơ  $v \in V$  với véc tơ tọa độ  $[v]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$  được gọi là **ánh xạ tọa độ** đối với cơ sở  $\mathcal{B}$

$$[\ ]_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$v \mapsto [v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

trong đó

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n.$$

Ta thường sử dụng ánh xạ tọa độ để đồng nhất mỗi “véc tơ trừu tượng”  $v \in V$  với “véc tơ hình học”  $[v]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$  và do đó, chuyển bài toán trên không gian véc tơ  $V$  về bài toán tương ứng trong không gian véc tơ  $\mathbb{R}^n$ .

Ta chứng minh một số tính chất của ánh xạ chuyển tọa độ cho thấy sự hợp lý khi đồng nhất mỗi véc tơ với véc tơ tọa độ của nó.

**MỆNH ĐỀ 4.6.16.** Cho  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  là một cơ sở của một không gian véc tơ  $n$ -chiều  $V$ . Cho các véc tơ  $u, v \in V$  và vô hướng  $a, b \in \mathbb{R}$ . Khi đó

$$[au + bv]_{\mathcal{B}} = a[u]_{\mathcal{B}} + b[v]_{\mathcal{B}}.$$

**CHỨNG MINH.** Giả sử các véc tơ tọa độ của  $u$  và  $v$  là

$$[u]_{\mathcal{B}} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad [v]_{\mathcal{B}} = (b_1, b_2, \dots, b_n).$$

Theo định nghĩa, ta có

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n, \quad v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} au + bv &= a(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) + b(b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n) \\ &= (aa_1 + bb_1)v_1 + (aa_2 + bb_2)v_2 + \dots + (aa_n + bb_n)v_n. \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned} [au + bv]_{\mathcal{B}} &= (aa_1 + bb_1, aa_2 + bb_2, \dots, aa_n + bb_n) \\ &= a(a_1, a_2, \dots, a_n) + b(b_1, b_2, \dots, b_n) \\ &= a[u]_{\mathcal{B}} + b[v]_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

□

**MỆNH ĐỀ 4.6.17.** Cho  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  là một cơ sở của một không gian véc tơ  $n$ -chiều  $V$ .

1.  $[v]_{\mathcal{B}} = 0$  khi và chỉ khi  $v = 0$ .
2. Nếu  $[u]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}}$  thì  $u = v$ .
3. Với mọi  $x \in \mathbb{R}^n$  tồn tại duy nhất  $v \in V$  sao cho  $[v]_{\mathcal{B}} = x$ .

**MỆNH ĐỀ 4.6.18.** Cho  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  là một cơ sở của một không gian véc tơ  $n$ -chiều  $V$ . Cho  $u_1, u_2, \dots, u_r$  là một hệ véc tơ trong  $V$ . Khi đó

1. Hệ véc tơ  $u_1, u_2, \dots, u_r$  là một hệ sinh của  $V$  khi và chỉ khi hệ véc tơ tọa độ  $[u_1]_{\mathcal{B}}, [u_2]_{\mathcal{B}}, \dots, [u_r]_{\mathcal{B}}$  là một hệ sinh của  $\mathbb{R}^n$ .
2. Hệ véc tơ  $u_1, u_2, \dots, u_r$  là độc lập tuyến tính trong  $V$  khi và chỉ khi hệ véc tơ tọa độ  $[u_1]_{\mathcal{B}}, [u_2]_{\mathcal{B}}, \dots, [u_r]_{\mathcal{B}}$  là độc lập tuyến tính trong  $\mathbb{R}^n$ .
3. Hệ véc tơ  $u_1, u_2, \dots, u_r$  là phụ thuộc tuyến tính trong  $V$  khi và chỉ khi hệ véc tơ tọa độ  $[u_1]_{\mathcal{B}}, [u_2]_{\mathcal{B}}, \dots, [u_r]_{\mathcal{B}}$  là phụ thuộc tuyến tính trong  $\mathbb{R}^n$ .

4. Hệ véc tơ  $u_1, u_2, \dots, u_r$  là một cơ sở của  $V$  khi và chỉ khi hệ véc tơ tọa độ  $[u_1]_{\mathcal{B}}, [u_2]_{\mathcal{B}}, \dots, [u_r]_{\mathcal{B}}$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^n$ .

### MA TRẬN CHUYỂN CƠ SỞ

**ĐỊNH NGHĨA 4.6.19.** Cho  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  và  $\mathcal{C} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  là các cơ sở của không gian véc tơ  $V$ . **Ma trận chuyển cơ sở** từ cơ sở  $\mathcal{B}$  sang cơ sở  $\mathcal{C}$ , ký hiệu  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$ , là ma trận vuông cỡ  $n \times n$  với cột thứ  $j$  là véc tơ tọa độ của véc tơ  $w_j$  trong cơ sở  $\mathcal{B}$

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} [w_1]_{\mathcal{B}} & [w_2]_{\mathcal{B}} & \dots & [w_n]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}.$$

Nói cách khác, cột thứ  $j$  của ma trận chuyển cơ sở là véc tơ nghiệm duy nhất của phương trình véc tơ

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = w_j.$$

**VÍ DỤ 4.6.20.** Cho các cơ sở  $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$  và  $\mathcal{C} = (w_1, w_2)$  của  $\mathbb{R}^2$  với

$$v_1 = (1, 0), \quad v_2 = (2, 1), \quad w_1 = (0, 1), \quad w_2 = (1, 1).$$

1. Tìm ma trận chuyển cơ sở  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$ .
2. Tìm ma trận chuyển cơ sở  $P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}$ .
3. Chứng minh rằng  $P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}})^{-1}$ .

**GIẢI.** (a) Với  $j = 1, 2$ , cột thứ  $j$  của ma trận chuyển cơ sở  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$  là nghiệm của phương trình véc tơ

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 = w_j.$$

Vì hai các hệ phương trình tuyến tính tương ứng có cùng ma trận hệ số, nên ta có thể giải chúng một cách đồng thời bằng cách khử Gauss-Jordan ma trận hệ số mở rộng

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & w_1 & w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Do đó, ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở  $\mathcal{B}$  sang cơ sở  $\mathcal{C}$  là

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Tương tự như ý (a), để tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở  $\mathcal{C}$  sang cơ sở  $\mathcal{B}$ , ta khử Gauss-Jordan ma trận  $\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & v_1 & v_2 \end{bmatrix}$ . Ta có

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Do đó, ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở  $\mathcal{C}$  sang cơ sở  $\mathcal{B}$  là

$$P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Sử dụng công thức nghịch đảo của ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$ , ta được

$$(P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}})^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}.$$

□

#### Thuật toán tìm ma trận chuyển cơ sở giữa các cơ sở của $\mathbb{R}^n$

Cho  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  và  $\mathcal{C} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  là các cơ sở của không gian véc tơ  $\mathbb{R}^n$ . Để tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở  $\mathcal{B}$  sang cơ sở  $\mathcal{C}$ , ta tiến hành như sau.

1. Tạo ra ma trận  $\begin{bmatrix} \mathcal{B} & \mathcal{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n & w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{bmatrix}$ .
2. Khử Gauss-Jordan ma trận  $\begin{bmatrix} \mathcal{B} & \mathcal{C} \end{bmatrix}$ , đưa nó về dạng bậc thang rút gọn.
3. Ma trận bậc thang rút gọn có dạng  $\begin{bmatrix} I & P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} \end{bmatrix}$ .

**MỆNH ĐỀ 4.6.21.** Cho  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  và  $\mathcal{C} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  là các cơ sở của không gian véc tơ  $V$ . Với mọi véc tơ  $v \in V$ , ta có

$$[v]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} [v]_{\mathcal{C}}, \quad [v]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}}.$$

**VÍ DỤ 4.6.22.** Cho các cơ sở  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$  và  $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2\}$  của  $\mathbb{R}^2$  với

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad u'_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- a. Tìm ma trận chuyển cơ sở  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  từ cơ sở  $\mathcal{B}$  đến cơ sở  $\mathcal{B}'$ .  
 b. Giả sử một véctơ  $w \in \mathbb{R}^2$  có véctơ tọa độ trong cơ sở  $\mathcal{B}'$  là  $(3, -5)$ . Tìm véctơ tọa độ của  $w$  trong cơ sở  $\mathcal{B}$ .

**GIẢI.** a. Cột thứ  $j$  của ma trận chuyển cơ sở  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  là nghiệm của phương trình véctơ

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 = u'_j$$

Phương trình véctơ này tương đương với hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = u'_j$$

Khử Gauss-Jordan ma trận hệ số của đồng thời hệ hai phương trình này

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc|cc} u_1 & u_2 & u'_1 & u'_2 \end{array} \right] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right] \\ &\longrightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \end{array} \right] \\ &\longrightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 8 & 13 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \end{array} \right] \\ &\longrightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{13}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Do đó, ma trận chuyển cơ sở  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  là  $\begin{bmatrix} \frac{8}{5} & \frac{13}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$ .

b. véctơ tọa độ của véctơ  $w$  trong cơ sở  $\mathcal{B}$  là

$$[w]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} [w]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \frac{8}{5} & \frac{13}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{41}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

□

Một cách tổng quát, nếu  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  và  $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$  là hai cơ sở của  $\mathbb{R}^n$  thì để có ma trận chuyển cơ sở  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  từ cơ sở  $\mathcal{B}$  sang cơ sở  $\mathcal{B}'$ , ta khử Gauss-Jordan ma trận cỡ  $n \times (2n)$  lập thành từ các cơ sở  $\mathcal{B}$  và  $\mathcal{B}'$

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{B} & \mathcal{B}' \end{array} \right] &= \left[ \begin{array}{cccc|cccc} u_1 & u_2 & \dots & u_n & u'_1 & u'_2 & \dots & u'_n \end{array} \right] \\ &\rightsquigarrow \left[ \begin{array}{c|c} I & P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Tổng quát hơn nữa, giả sử  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  và  $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$  là hai cơ sở của không gian vectơ  $n$  chiều  $V$ . Ta muốn tìm ma trận chuyển cơ sở  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  từ  $\mathcal{B}$  sang  $\mathcal{B}'$ . Lấy một cơ sở  $\mathcal{S}$  của  $V$ . Khi đó  $[\mathcal{B}]_{\mathcal{S}} = \{[u_1]_{\mathcal{S}}, [u_2]_{\mathcal{S}}, \dots, [u_n]_{\mathcal{S}}\}$  và  $[\mathcal{B}']_{\mathcal{S}} = \{[u'_1]_{\mathcal{S}}, [u'_2]_{\mathcal{S}}, \dots, [u'_n]_{\mathcal{S}}\}$  là các cơ sở của  $\mathbb{R}^n$ . Hơn nữa phương trình

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n = u'_j$$

tương đương với

$$x_1 [u_1]_{\mathcal{S}} + x_2 [u_2]_{\mathcal{S}} + \dots + x_n [u_n]_{\mathcal{S}} = [u'_j]_{\mathcal{S}}$$

Do đó ma trận chuyển cơ sở  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  chính là ma trận chuyển cơ sở  $P_{[\mathcal{B}]_{\mathcal{S}} \rightarrow [\mathcal{B}']_{\mathcal{S}}}$ . Ta đạt được thuật toán

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} [u_1]_{\mathcal{S}} & \dots & [u_n]_{\mathcal{S}} & [u'_1]_{\mathcal{S}} & \dots & [u'_n]_{\mathcal{S}} \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} I & & & P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} & & \end{array} \right]$$

## BÀI TẬP

**4.71 [hint]** Cho các cơ sở  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$  và  $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, u'_3\}$  của  $\mathbb{R}^3$  với

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, u'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, u'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, u'_3 =$$

- Tìm ma trận chuyển cơ sở  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  từ cơ sở  $\mathcal{B}$  sang cơ sở  $\mathcal{B}'$ .
- Tìm vectơ tọa độ  $[v]_{\mathcal{B}'}$  của vectơ  $v = (5, 1, 5) \in \mathbb{R}^3$  trong cơ sở  $\mathcal{B}'$ .
- Sử dụng ma trận chuyển cơ sở  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ , tìm vectơ tọa độ của vectơ  $v$  trong cơ sở  $\mathcal{B}$ .

**4.72 [hint]** Cho  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$  và  $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$  là các cơ sở của một không gian vectơ  $V$ . Giả sử

$$v_1 = 4u_1 - u_2, v_2 = -u_1 + u_2 + u_3, v_3 = u_2 - 2u_3$$

- Tìm ma trận chuyển cơ sở  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$  từ cơ sở  $\mathcal{B}$  sang cơ sở  $\mathcal{C}$ .
- Tìm ma trận chuyển cơ sở  $P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}$  từ cơ sở  $\mathcal{C}$  sang cơ sở  $\mathcal{B}$ .

- c. Cho  $w \in V$  là véctơ có tọa độ trong cơ sở  $\mathcal{B}$  là  $(3, 4, 1)$ . Tìm véctơ tọa độ của  $w$  trong cơ sở  $\mathcal{C}$ .

**4.73** [hint] Giả sử ma trận

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở  $\mathcal{B} = \{(1, 3, 1), (0, 3, 1), (0, 2, 1)\}$  của  $\mathbb{R}^3$  đến cơ sở  $\mathcal{C}$ . Tìm  $\mathcal{C}$ .

**4.74** [hint] Cho các cơ sở  $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$  và  $\mathcal{C} = \{q_1, q_2, q_3\}$  của không gian véctơ  $P_2$  trong đó

$$p_1 = -3 - 3x^2, \quad p_2 = -3 + 2x - x^2, \quad p_3 = 1 + 6x - x^2,$$

$$q_1 = -6 - 6x, \quad q_2 = -2 - 6x + 4x^2, \quad q_3 = -2 - 3x + 7x^2$$

- Tìm ma trận chuyển cơ sở  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$  từ cơ sở  $\mathcal{B}$  sang cơ sở  $\mathcal{C}$ .
- Tìm véctơ tọa độ của đa thức  $p = -9x + 15x^2$  trong cơ sở  $\mathcal{C}$ .
- Sử dụng ma trận chuyển cơ sở  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$ , tìm véctơ tọa độ của đa thức  $p$  trong cơ sở  $\mathcal{B}$ .

## 4.7 KHÔNG GIAN HÀNG, CỘT. HẠT NHÂN, HẠNG CỦA MA TRẬN

**ĐỊNH NGHĨA 4.7.1.** Cho  $A$  là một ma trận cỡ  $m \times n$ .

- ▷ Không gian hàng của  $A$ , kí hiệu  $\text{Row}(A)$ , là không gian véc tơ con của  $\mathbb{R}^n$  sinh ra từ các véc tơ hàng của  $A$ .
- ▷ Không gian cột của  $A$ , kí hiệu  $\text{Col}(A)$ , là không gian véc tơ con của  $\mathbb{R}^m$  sinh ra từ các véc tơ cột của  $A$ .
- ▷ Hạt nhân của  $A$ , kí hiệu  $\text{Nul}(A)$ , là không gian nghiệm của phương trình tuyến tính  $Ax = 0$ .  $\text{Nul}(A)$  là một không gian con của  $\mathbb{R}^n$ .

Với mỗi ma trận  $A$ , ta muốn xác định số chiều và một cơ sở của các không gian véc tơ  $\text{Row}(A)$ ,  $\text{Col}(A)$  và  $\text{Nul}(A)$ . Ta có thể thực hiện một cách đồng thời như sau. Khử Gauss ma trận  $A$  để thu được ma trận bậc thang  $R$ .

$$A \xrightarrow{\text{Gauss}} R$$

- ▷ Một cơ sở của  $\text{Row}(A)$  là các hàng khác không của  $R$ .
- ▷  $\text{Nul}(A) = \text{Nul}(R)$ .
- ▷ Giả sử các vị trí dẫn đầu của ma trận bậc thang  $R$  nằm trên các cột  $j_1, j_2, \dots, j_p$ . Khi đó, một cơ sở của  $\text{Col}(A)$  là các cột  $j_1, j_2, \dots, j_p$  của  $A$ .

Từ đó, ta thấy

$$\dim \text{Row}(A) = \dim \text{Col}(A) = n - \dim \text{Nul}(A)$$

**VÍ DỤ 4.7.2.** Tìm số chiều và một cơ sở cho không gian hàng, không gian cột và hạt nhân của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

**GIẢI.** Khử Gauss ma trận  $A$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & -4 \\ 0 & -14 & -14 & -8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ▷ Không gian hàng  $\text{Row}(A)$  là một không gian véctơ 2 chiều với một cơ sở là các hàng khác không của dạng bậc thang rút gọn của  $A$ , tức là hệ véctơ

$$(1, 4, 5, 2), (0, -7, -7, -4)$$

- ▷ Vì các phần tử dẫn đầu mỗi hàng của dạng bậc thang của  $A$  nằm trên các cột 1 và 2, nên không gian cột  $\text{Col}(A)$  là một không gian véctơ 2 chiều với một cơ sở là các cột 1 và 2 của  $A$ , tức là hệ véctơ

$$(1, 2, 3), (4, 1, -2)$$

- ▷ Ta có

$$\begin{aligned} x \in \text{Nul}(A) &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \\ -7x_2 - 7x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2t - s \\ x_2 = -4t - s \\ x_3 = s \\ x_4 = 7t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = t(2, -4, 0, 7) + s(-1, -1, 1, 0) \end{aligned}$$

Do đó, hạt nhân  $\text{Nul}(A)$  là một không gian véctơ 2 chiều với một cơ sở là hệ véctơ

$$(2, -4, 0, 7), (-1, -1, 1, 0)$$

□

## BÀI TẬP

**4.75** [hint] Tìm số chiều và một cơ sở cho không gian hàng, không gian cột và hạt nhân của ma trận.

$$\text{a. } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \\ 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

**4.76 [hint]** Tìm số chiều và một cơ sở cho không gian hàng, không gian cột và hạt nhân của ma trận

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & 8 & -9 & 1 \end{bmatrix}$$

### CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN CON SINH BỞI HỆ VÉCTOR

Xét bài toán tìm cơ sở cho bao tuyến tính  $\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_p)$  của một hệ véctor  $v_1, v_2, \dots, v_p$  trong  $\mathbb{R}^n$ .

Cách 1. Viết các véctor  $v_1, v_2, \dots, v_p$  thành các véctor hàng của một ma trận  $A$  cỡ  $p \times n$ . Khi đó

$$\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_p) = \text{Row}(A)$$

Ta đã biết cách tìm số chiều và một cơ sở cho  $\text{Row}(A)$ .

Cách 2. Viết các véctor  $v_1, v_2, \dots, v_p$  thành các véctor cột của một ma trận  $A$  cỡ  $p \times n$ . Khi đó

$$\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_p) = \text{Col}(A)$$

Ta đã biết cách tìm số chiều và một cơ sở của  $\text{Col}(A)$ .

Khi sử dụng cách đầu tiên, cơ sở thu được của  $\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_p)$  nói chung không phải là một hệ con của hệ véctor ban đầu. Khi sử dụng cách thứ hai, cơ sở thu được của  $\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_p)$  là một hệ con của hệ véctor ban đầu. Hơn nữa, khi làm cách thứ hai, ta còn nhanh chóng tìm được cách biểu thị tuyến tính các véctor thừa của hệ  $v_1, v_2, \dots, v_p$  qua các véctor trong cơ sở.

**VÍ DỤ 4.7.3.** Tìm một cơ sở cho không gian con của  $\mathbb{R}^4$  sinh bởi hệ véctor sau và biểu thị các véctor còn lại qua cơ sở tìm được

$$v_1 = (1, 1, -4, -3), v_2 = (1, 0, 1, -1), v_3 = (3, 1, -2, -5), v_4 = (4, 0, 0, -2).$$

**GIẢI.** Hệ véctơ  $v_1, v_2, v_3, v_4$  là hệ véctơ cột của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

Ta có  $\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \text{Col}(A)$ . Khử Gauss ma trận  $A$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -5 & -2 \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 10 & 16 \\ 0 & 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Suy ra, một cơ sở của  $\text{Col}(A)$  là các cột 1, 2 và 4 của nó. Do đó, một cơ sở của  $\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)$  là hệ véctơ  $v_1, v_2, v_4$ . Ta có thể biểu thị  $v_3$  qua hệ véctơ  $v_1, v_2$ . Để tìm biểu thị này, ta cần giải phương trình véctơ

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 = v_3$$

Ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính tương ứng với phương trình véctơ trên chính là ma trận con bao gồm 3 cột đầu tiên của ma trận  $A$ . Từ dạng bậc thang của  $A$ , ta nhận được dạng bậc thang của ma trận hệ số mở rộng này:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Do đó, phương trình  $x_1 v_1 + x_2 v_2 = v_3$  có nghiệm là

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Ta nhận được biểu thị tuyến tính  $v_3 = v_1 + 2v_2$ . □

Xét trường hợp tổng quát khi  $v_1, v_2, \dots, v_p$  là một hệ véctơ trong một không gian véctơ  $V$ . Khi đó, ta cố định một cơ sở  $\mathcal{B}$  của  $V$  và tọa độ hóa các véctơ của  $V$  đối với cơ sở  $\mathcal{B}$  này để đưa bài toán đã cho về bài toán đối với hệ véctơ trong  $\mathbb{R}^n$ , với  $n = \dim V$ .

## BÀI TẬP

**4.77** [hint] Tìm một cơ sở cho không gian con của  $\mathbb{R}^4$  sinh bởi hệ véctơ sau, và biểu thị các véctơ còn lại qua cơ sở tìm được

$$v_1 = (1, 0, 1, 1), v_2 = (-1, 3, 9, 3), v_3 = (5, -3, -5, 1), v_4 = (-3, 3, 7, 1).$$

**4.78** [hint] Tìm một cơ sở cho không gian con của  $\mathbb{R}^4$  sinh bởi hệ véctơ sau, và biểu thị các véctơ còn lại qua cơ sở tìm được

$$v_1 = (-1, 1, -5, -2), v_2 = (-2, 3, 1, 0), v_3 = (4, -5, 9, 4), v_4 = (0, 4, 2, -3), v_5 =$$

**4.79** [hint] Tìm một cơ sở cho không gian con của  $P_3$  sinh bởi hệ đa thức sau và biểu thị tuyến tính các đa thức còn lại theo cơ sở này

$$p_1 = 1 + 4x + 5x^2 + 2x^3, p_2 = 2 + x + 3x^2, p_3 = -1 + 3x + 2x^2 + 2x^3.$$

**4.80** [hint] Tìm một cơ sở cho không gian con của  $P_4$  sinh bởi hệ đa thức sau và biểu thị tuyến tính các đa thức còn lại theo cơ sở này

$$p_1 = 1 - 2x + 5x^2 + 3x^4, p_2 = -2 + 5x - 7x^2 - 6x^4, p_3 = -1 + 3x - 2x^2 + x^3 - 3x^4$$

$$p_4 = 3 - 8x + 9x^2 - x^3 + 9x^4.$$

## HẠNG CỦA MA TRẬN

Cho một ma trận  $A$  cỡ  $m \times n$ .

▷ **Hạng** của  $A$  là số chiều của không gian cột của  $A$ :

$$\text{rank}(A) = \dim \text{Col}(A)$$

Vì không gian hàng và không gian cột của  $A$  có cùng số chiều nên ta cũng có

$$\text{rank}(A) = \dim \text{Row}(A)$$

- ▷ Số khuyết của ma trận  $A$  là số chiều của hạt nhân  $\text{Nul}(A)$ . Ta không đưa ra ký hiệu cho số khuyết của ma trận.

Nếu ma trận  $A$  có  $n$  cột, ta biết rằng

$$\dim \text{Nul}(A) + \dim \text{Col}(A) = n$$

Do đó, số khuyết của  $A$  bằng  $n - \text{rank}(A)$ .

**VÍ DỤ 4.7.4.** Tính hạng và số khuyết của ma trận trong Ví dụ 4.7.2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

**GIẢI.** Theo lời giải của Ví dụ 4.7.2, dạng bậc thang của ma trận  $A$  là

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Suy ra, ma trận  $A$  có 2 vị trí then chốt. Do đó hạng của ma trận  $A$  là  $\text{rank}(A) = 2$ . Vì ma trận  $A$  có 4 cột nên số khuyết của nó là  $4 - \text{rank}(A) = 2$ .  $\square$

## BÀI TẬP

**4.81** [hint] Tìm hạng và số khuyết của các ma trận sau

a.  $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

b.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

**4.82** [hint] Biện luận theo các tham số  $t$  hạng của ma trận sau

$$\begin{bmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{bmatrix}$$

**4.83** [hint] Biện luận theo các tham số  $t$  hạng của ma trận sau

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -t \\ t & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

**4.84** [hint] Cho  $A$  là một ma trận cỡ  $m \times n$ . Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của số khuyết của ma trận  $A$ .

**4.85** [hint] Tìm hai ma trận vuông cùng cỡ  $A$  và  $B$  thỏa mãn  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$  và  $\text{rank}(A^2) \neq \text{rank}(B^2)$ .

**4.86** [hint] Cho  $A$  là một ma trận cỡ  $m \times n$  với  $m \neq n$ . Chứng minh rằng hệ vectơ hàng của  $A$  phụ thuộc tuyến tính trong  $\mathbb{R}^n$  hoặc hệ vectơ cột của  $A$  phụ thuộc tuyến tính trong  $\mathbb{R}^m$ .

## GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 4

---

**4.2.** So sánh với các phép toán của không gian vectơ  $\mathbb{R}^2$  thông thường, ta thấy phép toán cộng hơi lạ. Do đó nên kiểm tra trước các tiên đề liên quan đến phép cộng.

**4.3.** Lưu ý rằng vectơ không không nhất thiết phải là cặp  $(0, 0)$ . Theo định nghĩa, vectơ không  $0$  là vectơ có tính chất

$$0 + v = v \text{ với } v \in V.$$

Do đó, nếu phép cộng vectơ không phải là phép toán cộng thông thường thì vectơ không cũng có thể không phải vectơ không thông thường.

**4.4.** Kiểm tra chi tiết từng tiên đề của không gian vectơ. Lưu ý rằng vectơ không không nhất thiết phải là cặp  $(0, 0)$ . Theo định nghĩa, vectơ không  $0$  là vectơ có tính chất

$$0 + v = v \text{ với mọi } v \in V.$$

Do đó nếu phép cộng vectơ không phải là phép toán cộng thông thường thì vectơ không cũng có thể không phải vectơ không thông thường. Ta thấy

$$(0, 1) + (a, b) = (0 + a, 1b) = (a, b)$$

với mọi  $(a, b) \in V$ . Do đó, cặp  $(0, 1)$  là vectơ không với phép toán cộng định nghĩa trong đề bài.

**4.5.** Cần phải sử dụng các tiên đề của không gian vectơ.

**4.12.** Một vectơ  $v$  thuộc  $V_1 \cap V_2$  khi và chỉ khi  $v \in V_1$  và  $v \in V_2$ .

**4.13.** Một vectơ  $v$  thuộc  $\bigcap_{i \in I} V_i$  khi và chỉ khi  $v \in V_i$  với mọi  $i$ .

**4.14.** Các không gian con của  $\mathbb{R}^2$  bao gồm  $\{0\}$ ,  $\mathbb{R}^2$  và các đường thẳng đi qua gốc tọa độ.

**4.17.** So sánh hiệu  $V_1 - V_2$  và tổng  $V_1 + V_2$ .

**4.20.** Sử dụng tính chất của chuyển vị. Ma trận  $A \in M_{n \times n}$  là đối xứng (tương ứng, phản đối xứng) nếu  $A^T = A$  (tương ứng  $A^T = -A$ ).

**4.22.** Làm đúng theo định nghĩa của không gian con, tức là chứng minh tập con này của  $\mathbb{R}^\infty$  chứa vectơ không, đóng với phép cộng vectơ và đóng với phép nhân số và vectơ.

**4.29.** Một hàm  $f(x)$  thuộc vào  $\mathcal{L}(\cos^2 x, \sin^2 x)$  khi và chỉ khi

$$f(x) = a \cos^2 x + b \sin^2 x$$

với  $a, b$  là các số thực nào đó.

Lưu ý rằng phương trình trên cần phải đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Với mỗi  $x \in \mathbb{R}$ , ta có một phương trình tuyến tính của  $a, b$ . Ví dụ nếu  $x = \frac{\pi}{2}$  thì

$$0a + 1b = f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Vì ta có một hệ phương trình gồm vô hạn phương trình nên nói chung là hệ vô nghiệm, tức là  $f(x) \notin \mathcal{L}(\cos^2 x, \sin^2 x)$ . Hãy nhớ lại các đẳng thức lượng giác quen thuộc.

**4.31.** Ta có

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(p_1, p_2) = \mathcal{L}(q_1, q_2) &\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{L}(p_1, p_2) \subset \mathcal{L}(q_1, q_2) \\ \mathcal{L}(q_1, q_2) \subset \mathcal{L}(p_1, p_2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} p_1, p_2 \in \mathcal{L}(q_1, q_2) \\ q_1, q_2 \in \mathcal{L}(p_1, p_2). \end{cases} \end{aligned}$$

**4.32.** Giải phương trình  $Ax = 0$  để thu được mô tả tham số của một vectơ nghiệm tức là một vectơ của  $W$ . Hệ vectơ  $u, v$  là một hệ sinh của  $W$  khi và chỉ khi  $u, v \in W$  và mỗi vectơ của  $W$  đều là một tổ hợp tuyến tính của hệ vectơ  $u, v$ .

**4.33.** Ta có

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) &= \mathcal{L}(v_1 + v_2, v_1 - v_2, v_2 + v_3) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) \subset \mathcal{L}(v_1 + v_2, v_1 - v_2, v_2 + v_3) \\ \mathcal{L}(v_1 + v_2, v_1 - v_2, v_2 + v_3) \subset \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) \end{cases} \end{aligned}$$

**4.38.** Hệ hàm  $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$  trong  $F(-\infty, \infty)$  là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi phương trình vectơ

$$x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + x_3 f_3(x) = 0$$

chỉ có nghiệm tầm thường  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ .

Lưu ý rằng phương trình trên là một phương trình trong  $F(-\infty, \infty)$  nên nó cần đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Với mỗi  $x \in \mathbb{R}$  cụ thể, ta có một phương trình tuyến tính của các ẩn  $x_1, x_2, x_3$ . Ví dụ khi  $x = 5$ , ta có phương trình

$$f_1(5)x_1 + f_2(5)x_2 + f_3(5)x_3 = 0.$$

Vì ta có vô hạn phương trình tuyến tính tương ứng với vô hạn giá trị  $x \in \mathbb{R}$  nên nói chung hệ chỉ có nghiệm tầm thường. Hãy nhớ lại các đẳng thức quen thuộc.

**4.40.** Hệ hàm  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$  độc lập tuyến tính trong không gian véctơ  $F(-\infty, \infty)$  khi và chỉ khi phương trình véctơ

$$x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + x_3 f_3(x) = 0$$

chỉ có nghiệm tầm thường  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ .

Hãy cho  $x$  vài giá trị cụ thể (ít nhất 3 giá trị khác nhau vì ta có 3 ẩn) để thu được một hệ phương trình tuyến tính của các ẩn  $x_1, x_2, x_3$  rồi giải hệ phương trình này. Nếu hệ chỉ có nghiệm tầm thường  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ , ta đã chứng minh được bài toán. Nếu hệ có nghiệm không tầm thường, ta tiếp tục cho  $x$  giá trị cụ thể để tăng số phương trình trong hệ, rồi tiếp tục giải hệ mới thu được.

**4.41.** Bài tập này có chứng minh tương tự như kết quả trong lý thuyết khẳng định rằng mọi hệ có nhiều hơn  $n$  véctơ trong không gian véctơ  $\mathbb{R}^n$  đều phụ thuộc tuyến tính.

**4.42.** Bài này có thể giải bằng phương pháp phản chứng. Khi đó, ta giả sử kết luận của bài toán là sai, tức là hệ véctơ  $v_1, v_2, v_3$  không độc lập tuyến tính. Sau đó, lập luận một cách logic để đi đến một điều vô lí.

Từ giả thiết về tính không độc lập tuyến tính của hệ véctơ, ta thấy rằng phương trình véctơ

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$$

có một không nghiệm tầm thường  $x_1 = k_1$ ,  $x_2 = k_2$ ,  $x_3 = k_3$ . Hãy xét hai trường hợp  $k_3 = 0$  và trường hợp  $k_3 \neq 0$ .

**4.50.** Chuyển bài toán về cơ sở thành bài toán về phương trình véctơ. Rồi biến đổi tương đương phương trình véctơ thành hệ phương trình tuyến tính. Cuối cùng giải bài toán cho hệ phương trình tuyến tính. Nếu cần tính định thức, sử dụng đồng thời phương pháp khai triển phần phụ đại số và các biến đổi sơ cấp.

**4.57.** Sử dụng một cơ sở của  $P_2$ , chẳng hạn cơ sở chính tắc, để đưa bài toán về không gian véctơ  $\mathbb{R}^3$ .



# 5

## Ánh Xạ Tuyến Tính

### 5.1 ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

---

#### BIẾN ĐỔI MA TRẬN

**ĐỊNH NGHĨA 5.1.1.** Cho  $A$  là một ma trận cỡ  $m \times n$ . Với mỗi vectơ cột  $v \in \mathbb{R}^n$ , kết quả của phép nhân ma trận  $Av$  cho ta một vectơ cột của  $\mathbb{R}^m$ . Ta thu được biến đổi ma trận

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ v &\mapsto Av. \end{aligned}$$

Từ các tính chất của phép nhân ma trận, biến đổi ma trận  $T_A$  bảo toàn các phép toán của không gian vectơ

$$T_A(u + v) = T_A(u) + T_A(v), \quad T_A(kv) = kT_A(v).$$

**ĐỊNH NGHĨA 5.1.2.** Một ánh xạ  $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  là tuyến tính nếu

$$T(u + v) = T(u) + T(v), \quad T(kv) = kT(v).$$

Do đó, các biến đổi ma trận  $T_A$  là các ánh xạ tuyến tính. Khẳng định ngược lại cũng đúng. Cụ thể hơn, với mọi ánh xạ tuyến tính  $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ , tồn

tại duy nhất ma trận  $A$  cỡ  $m \times n$  để

$$T(v) = Av$$

với mọi vectơ  $v \in \mathbb{R}$ . Ma trận  $A$  này được gọi là ma trận chính tắc của ánh xạ tuyến tính  $T$ .

**VÍ DỤ 5.1.3.** Cho ánh xạ  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  bởi công thức

$$T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 - x_2 + x_3, 3x_1 + 2x_2 - x_3).$$

- Chứng minh rằng  $T$  là một ánh xạ tuyến tính bằng cách chỉ ra nó bảo toàn các phép toán vectơ.
- Chứng minh rằng  $T$  là một ánh xạ tuyến tính bằng cách chỉ ra nó là một biến đổi ma trận. Cho biết ma trận chính tắc của  $T$ .

**GIẢI.** a. Cho  $u = (x_1, x_2, x_3)$  và  $v = (y_1, y_2, y_3)$  thuộc  $\mathbb{R}^3$ , cho  $k \in \mathbb{R}$ . Ta có

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T\left(\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 4(x_1+y_1) - (x_2+y_2) + (x_3+y_3) \\ 3(x_1+y_1) + 2(x_2+y_2) - (x_3+y_3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4x_1 - x_2 + x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4y_1 - y_2 + y_3 \\ 3y_1 + 2y_2 - y_3 \end{bmatrix} \\ &= T(u) + T(v) \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} T(ku) &= T\left(\begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ kx_3 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 4(kx_1) - (kx_2) + (kx_3) \\ 3(kx_1) + 2(kx_2) - (kx_3) \end{bmatrix} \\ &= k \begin{bmatrix} 4x_1 - x_2 + x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \end{bmatrix} \\ &= kT(u). \end{aligned}$$

Suy ra,  $T$  bảo toàn các phép toán vectơ, tức là  $T$  là một ánh xạ tuyến tính.

b. Ta có

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Do đó,  $T$  là một biến đổi ma trận, với ma trận chính tắc là

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vì các biến đổi ma trận đều là ánh xạ tuyến tính nên  $T$  là một ánh xạ tuyến tính.

□

Trong ví dụ trên, cả hai đều ý nhằm mục đích chứng minh ánh xạ  $T$  là một biến đổi tuyến tính. Cách làm trong ý (a) là thực hiện trực tiếp theo định nghĩa, còn cách làm trong ý (b) sử dụng đến kết quả phân loại tất cả các ánh xạ tuyến tính giữa các không gian vectơ hình học  $\mathbb{R}^n$ . Cách làm sử dụng định nghĩa là tổng quát hơn, và sử dụng được cho ánh xạ tuyến tính giữa hai không gian vectơ bất kì bên dưới.

## BÀI TẬP

**5.1** [hint] Chứng minh rằng các ánh xạ sau là các ánh xạ tuyến tính và tìm ma trận chính tắc của nó.

- $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  cho bởi  $T(x_1, x_2) = (x_2, -x_1, x_1 + 3x_2)$ .
- $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  cho bởi  $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3, x_1 + x_2)$ .

**5.2** [hint] Chứng minh rằng các ánh xạ sau không là ánh xạ tuyến tính

- $T(x, y) = (x^2, y)$ .
- $T(x, y, z) = (x, y, xz)$ .
- $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3 + 1)$ .

**5.3** [hint] Tìm điều kiện cho các tham số  $m, b$  để ánh xạ  $T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  cho bởi công thức  $T(x) = mx + b$  là một ánh xạ tuyến tính.

**5.4** [hint] Cho  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  là ánh xạ tuyến tính thỏa mãn

$$T(e_1) = (1, 3), \quad T(e_2) = (-4, 7), \quad T(e_3) = (0, -2).$$

- Tính  $T(2, 1, 3)$ .
- Tìm ma trận chính tắc của  $T$ .

**5.5** [hint] Cho ánh xạ tuyến tính  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  thỏa mãn

$$T(1, 1) = (1, -2), \quad T(2, 3) = (-2, 5).$$

- Tính  $T(e_1)$ .
- Tìm ma trận chính tắc của  $T$ .

## ẢNH XẠ TUYẾN TÍNH TỔNG QUÁT

**ĐỊNH NGHĨA 5.1.4.** Một ánh xạ  $T : V \rightarrow W$  từ không gian véc tơ  $V$  đến không gian véc tơ  $W$  là một ánh xạ tuyến tính nếu nó bảo toàn các phép toán véc tơ, tức là

$$T(u + v) = T(u) + T(v), \quad T(ku) = kT(u)$$

với mọi  $u, v \in V$  và  $k \in \mathbb{R}$ .

**VÍ DỤ 5.1.5.** Chứng minh rằng ánh xạ  $T : M_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$  cho bởi

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 3a - 4b + c - d$$

là một ánh xạ tuyến tính.

**GIẢI.** Cho các ma trận  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  và  $\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$  thuộc  $M_{2 \times 2}$ , cho  $k \in \mathbb{R}$ .  
Ta có

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\right) &= T\left(\begin{bmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{bmatrix}\right) \\ &= 3(a + a') - (b + b') + (c + c') - (d + d') \\ &= (3a - b + c - d) + (3a' - b' + c' - d') \\ &= T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
 T\left(k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= T\left(\begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}\right) \\
 &= 3(ka) - 4(kb) + (kc) - (kd) \\
 &= k(3a - 4b + c - d) \\
 &= kT\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right).
 \end{aligned}$$

Do đó, ánh xạ  $T$  bảo toàn phép cộng ma trận và phép nhân số với ma trận. Theo định nghĩa,  $T$  là một ánh xạ tuyến tính.  $\square$

**VÍ DỤ 5.1.6.** Chứng minh rằng ánh xạ  $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$  cho bởi

$$T(a + bx + cx^2) = c + (a + 1)x + bx^2$$

không là một ánh xạ tuyến tính.

**GIẢI.** Cần phải chỉ ra ánh xạ  $T$  hoặc không bảo toàn phép cộng vectơ hoặc không bảo toàn phép nhân vô hướng với vectơ. Cho hai đa thức  $p_1 = a_1 + b_1x + c_1x^2$  và  $p_2 = a_2 + b_2x + c_2x^2$  thuộc  $\mathcal{P}_2$ . Ta có  $p_1 + p_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)x^2$ . Suy ra

$$T(p_1 + p_2) = (c_1 + c_2) + (a_1 + a_2 + 1)x + (b_1 + b_2)x^2$$

và

$$\begin{aligned}
 T(p_1) + T(p_2) &= [c_1 + (a_1 + 1)x + b_1x^2] + [c_2 + (a_2 + 1)x + b_2x^2] \\
 &= (c_1 + c_2) + (a_1 + a_2 + 2)x + (b_1 + b_2)x^2.
 \end{aligned}$$

Do đó  $T(p_1 + p_2) \neq T(p_1) + T(p_2)$  với mọi  $p_1, p_2 \in \mathcal{P}_2$ . Vậy  $T$  không là một ánh xạ tuyến tính.  $\square$

## BÀI TẬP

**5.6** [hint] Xác định ánh xạ tuyến tính trong các ánh xạ sau đây

- $T : M_{n \times n} \rightarrow M_{n \times n}$  cho bởi  $T(A) = A^2$ .
- $T : M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  cho bởi  $T(A) = \text{tr}(A)$ .
- $T : M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  cho bởi  $T(A) = \det(A)$ .

**5.7** [hint] Xác định ánh xạ tuyến tính trong các ánh xạ sau đây

- a.  $T : M_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$  cho bởi  $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a^2 + b^2$ .
- b.  $T : M_{m \times n} \rightarrow M_{m \times p}$  cho bởi  $T(A) = AB$  với  $B \in M_{n \times p}$  là một ma trận cố định.
- c.  $T : M_{m \times n} \rightarrow M_{m \times n}$  cho bởi  $T(A) = cA$  với  $c \in \mathbb{R}$  là một vô hướng cố định.

**5.8** [hint] Xác định ánh xạ tuyến tính trong các ánh xạ sau đây

- a.  $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$  cho bởi  $T(a + bx + cx^2) = a + b(x - 1) + c(x - 1)^2$ .
- b.  $T : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$  cho bởi  $T(a + bx) = (a + bx)^2$ .
- c.  $T : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n+2}$  cho bởi  $T(p) = (x^2 - 1)p$  với mọi  $p \in \mathcal{P}_n$ .

**5.9** [hint] Xác định ánh xạ tuyến tính trong các ánh xạ sau đây

- a.  $T : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$  cho bởi  $T(a_0, a_1, a_2, \dots) = (0, a_0, a_1, a_2, \dots)$
- b.  $T : F(-\infty, \infty) \rightarrow F(-\infty, \infty)$  cho bởi  $T(f(x)) = 1 + f(x)$ .
- c.  $T : F(-\infty, \infty) \rightarrow F(-\infty, \infty)$  cho bởi  $T(f(x)) = f(x - 3)$ .

## HẠT NHÂN VÀ ẢNH CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

**ĐỊNH NGHĨA 5.1.7.** Cho  $T : V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính.

▷ Hạt nhân  $\ker(T) \subset V$  của  $T$  là

$$\ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}.$$

▷ Ảnh  $\text{Im}(T) \subset W$  của  $T$  là

$$\text{Im}(T) = \{w \in W : \text{tồn tại } v \in V \text{ thỏa mãn } T(v) = w\}.$$

Theo ngôn ngữ phương trình, ta có thể diễn đạt hạt nhân và ảnh của  $T$  như sau.

▷ Hạt nhân  $\ker(T) \subset V$  của  $T$  là tập nghiệm của phương trình

$$T(v) = 0, \quad v \in V.$$

▷ Ảnh  $\text{Im}(T) \subset W$  của  $T$  là tập hợp các vectơ  $w \in W$  để phương trình

$$T(v) = w$$

có ít nhất một nghiệm  $v \in V$ .

**MỆNH ĐỀ 5.1.8.** Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính  $T$  đều là các không gian véc tơ. Cụ thể hơn, hạt nhân  $\ker(T)$  là một không gian con của  $V$ , còn ảnh  $\text{Im}(T)$  là một không gian con của  $W$ .

Số chiều của  $\ker(T)$  và  $\text{Im}(T)$  lần lượt được gọi là số khuyết và hạng của ánh xạ tuyến tính  $T$ .

**ĐỊNH LÝ 5.1.9.** Ta có đẳng thức quan trọng sau đây về mối liên hệ giữa số khuyết và hạng của một ánh xạ tuyến tính  $T : V \rightarrow W$ .

$$\dim \ker(T) + \text{rank}(T) = \dim V.$$

Khi  $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  là ánh xạ tuyến tính với ma trận chính tắc  $A$  thì

$$\ker(T) = \text{Nul}(A), \quad \text{Im}(T) = \text{Col}(A).$$

Do đó, số khuyết của  $T$  chính là số khuyết của  $A$  và hạng của  $T$  chính là hạng của  $A$ .

**VÍ DỤ 5.1.10.** Cho  $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_3$  là ánh xạ tuyến tính cho bởi

$$T(p(x)) = xp(x)$$

với mọi  $x \in \mathcal{P}_2$ .

a. Đa thức nào sau đây thuộc hạt nhân  $\ker(T)$  ?

$$x^2, \quad 1 + x, \quad 0.$$

b. Đa thức nào sau đây thuộc ảnh  $\text{Im}(T)$  ?

$$x - x^3, \quad 1 + x, \quad -x.$$

c. Xác định số chiều và một cơ sở cho  $\ker(T)$ .

d. Xác định số chiều và một cơ sở cho  $\text{Im}(T)$ .

**GIẢI.** a. Theo định nghĩa, ta có

$$T(x^2) = x \cdot x^2 = x^3, \quad T(1+x) = x(1+x) = x + x^2, \quad T(0) = x \cdot 0 = 0.$$

Do đó,  $x^2 \notin \ker(T)$ ,  $1+x \notin \ker(T)$ ,  $0 \in \ker(T)$ .

b. Vì

$$x - x^3 = x(1 - x^2) = T(1 - x^2), \quad -x = x(-1) = T(-1)$$

nên  $x - x^3 \in \text{Im}(T)$ ,  $-x \in \text{Im}(T)$ . Vì  $T(p(x)) = xp(x)$  nên các đa thức thuộc  $\text{Im}(T)$  đều chia hết cho  $x$ . Đa thức  $1+x$  không chia hết cho  $x$ . Do đó  $1+x \notin \text{Im}(T)$ .

c. Cho  $p(x) \in \mathcal{P}_2$ . Ta có

$$p(x) \in \ker(T) \iff T(p(x)) = 0 \iff xp(x) = 0 \iff p(x) = 0.$$

Suy ra  $\ker(T) = \{0\}$ . Vậy  $\ker(T)$  là một không gian vectơ không chiều đối với cơ sở là tập rỗng.

d. Cho  $p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2$ . Ta có

$$T(p(x)) = x(a + bx + cx^2) = ax + bx^2 + cx^3.$$

Suy ra,  $\text{Im}(T)$  là tập con của  $\mathcal{P}_3$  gồm các đa thức  $ax + bx^2 + cx^3$  với  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tùy ý. Vậy  $\text{Im}(T)$  là một không gian vectơ 3 chiều với một cơ sở là hệ đa thức  $x, x^2, x^3$ .

□

## BÀI TẬP

**5.10 [hint]** Cho  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  là biến đổi ma trận ứng với ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 8 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

- Tìm số khuyết của  $T$  và một cơ sở của hạt nhân  $\ker(T)$ .
- Tìm hạng của  $T$  và một cơ sở của ảnh  $\text{Im}(T)$ .

**5.11 [hint]** Cho  $T : M_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$  là ánh xạ tuyến tính cho bởi

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 3a - 4b + c - d.$$

Tìm số chiều và một cơ sở cho hạt nhân  $\ker(T)$  và ảnh  $\text{Im}(T)$ .

**5.12** [hint] Cho  $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  là một ánh xạ tuyến tính cho bởi

$$T(p(x)) = (p(0), p(1), p(0) + p(1)).$$

Tìm số chiều và một cơ sở cho  $\ker(T)$  và  $\text{Im}(T)$ .

**5.13** [hint] Cho  $T : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_2$  là ánh xạ tuyến tính cho bởi

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = 3a_0 + a_1x + (a_0 + a_1)x^2.$$

- Chứng minh rằng  $T$  là một ánh xạ tuyến tính.
- Tìm số chiều và một cơ sở cho  $\ker(T)$ .
- Tìm số chiều và một cơ sở cho  $\text{Im}(T)$ .

## BÀI TẬP TỔNG HỢP

**5.14** [hint] Xét cơ sở  $v_1, v_2, v_3$  của  $\mathbb{R}^3$  với  $v_1 = (1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (0, 1, 1)$  và  $v_3 = (0, 0, 1)$ . Cho  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  là một ánh xạ tuyến tính thỏa mãn

$$T(v_1) = (3, 0, 1), \quad T(v_2) = (-1, 5, 1), \quad T(v_3) = (2, 5, 2).$$

- Tính  $T(x_1, x_2, x_3)$ .
- Tìm ma trận chính tắc của  $T$ .
- Tìm số chiều và một cơ sở cho hạt nhân  $\ker(T)$  và ảnh  $\text{Im}(T)$ .

**5.15** [hint] Cho  $D : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$  là ánh xạ đạo hàm.

- Chứng minh rằng  $D$  là một ánh xạ tuyến tính.
- Tìm số chiều và một cơ sở cho  $\ker(D)$  và  $\text{Im}(D)$ .

**5.16** [hint] Cho  $D : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$  là ánh xạ đạo hàm, với  $n \geq 1$ .

- Chứng minh rằng  $D$  là một ánh xạ tuyến tính.
- Tìm số chiều và một cơ sở cho  $\ker(D)$  và  $\text{Im}(D)$ .

**5.17** [hint] Cho  $J : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$  là ánh xạ

$$J(p(x)) = \int_{-1}^1 p(x)dx.$$

- Chứng minh rằng  $J$  là một ánh xạ tuyến tính.

- b. Tìm số chiều và một cơ sở cho  $\ker(J)$  và  $\text{Im}(J)$ .

**5.18** [hint] Cho  $J : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}$  là ánh xạ

$$J(p(x)) = \int_0^2 p(x) dx.$$

- a. Chứng minh rằng  $J$  là một ánh xạ tuyến tính.  
b. Tìm số chiều và một cơ sở cho  $\ker(J)$  và  $\text{Im}(J)$ .

### CÁC PHÉP BIẾN HÌNH QUEN THUỘC TRONG MẶT PHẪNG VÀ KHÔNG GIAN 3 CHIỀU

**VÍ DỤ 5.1.11.** Cho  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  là phép đối xứng qua trục  $x$ .

- a. Tìm ma trận chính tắc của  $T$ .  
b. Tìm số chiều và một cơ sở cho  $\ker(T)$  và  $\text{Im}(T)$ .

**GIẢI.** a. Ta có  $T(x, y) = (x, -y)$ . Suy ra

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Ma trận chính tắc của  $T$  là  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

- b. Ta có  $\ker(T) = \text{Nul}(A)$ ,  $\text{Im}(T) = \text{Col}(A)$ , với  $A$  là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Do đó,  $\dim \ker(T) = \{0\}$ , cơ sở duy nhất của  $\ker(0)$  là tập rỗng.  
 $\dim \text{Im}(T) = 2$ , một cơ sở của  $\text{Im}(T)$  là hệ véc tơ  $(1, 0), (0, -1)$ .

□

### BÀI TẬP

**5.19** [hint] Cho  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  là phép đối xứng qua đường thẳng  $y = x$ .

- a. Tìm ma trận chính tắc của  $T$ .

b. Xác định số chiều và một cơ sở của  $\ker(T)$  và  $\text{Im}(T)$ .

**5.20** [hint] Cho  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  là phép chiếu vuông góc lên trục  $y$ .

a. Tìm ma trận chính tắc của  $T$ .

b. Xác định số chiều và một cơ sở của  $\ker(T)$  và  $\text{Im}(T)$ .

**5.21** [hint] Cho  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  là phép đối xứng qua mặt phẳng  $xz$ .

a. Tìm ma trận chính tắc của  $T$ .

b. Xác định số chiều và một cơ sở của  $\ker(T)$  và  $\text{Im}(T)$ .

**5.22** [hint] Cho  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  là phép đối xứng qua trục  $x$ .

a. Tìm ma trận chính tắc của  $T$ .

b. Xác định số chiều và một cơ sở của  $\ker(T)$  và  $\text{Im}(T)$ .

**5.23** [hint] Cho  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng tọa độ  $xy$ .

a. Tìm ma trận chính tắc của  $T$ .

b. Xác định số chiều và một cơ sở của  $\ker(T)$  và  $\text{Im}(T)$ .

**5.24** [hint] Cho  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  là phép chiếu vuông góc lên trục  $z$ .

a. Tìm ma trận chính tắc của  $T$ .

b. Xác định số chiều và một cơ sở của  $\ker(T)$  và  $\text{Im}(T)$ .

**5.25** [hint] Cho  $T : V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính và hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_n$  là một cơ sở của  $V$ . Giả sử

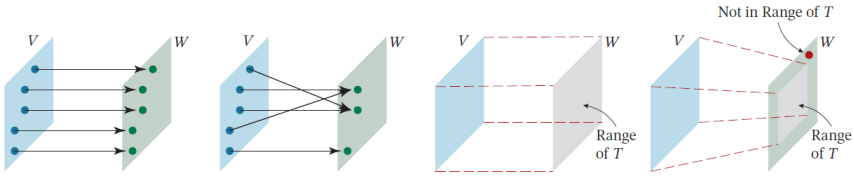
$$T(x_1) = T(x_2) = \dots = T(x_n) = 0.$$

Chứng minh rằng:  $T = 0$ .

**5.26** [hint] Cho  $T_1, T_2 : V \rightarrow W$  là các ánh xạ tuyến tính và hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_n$  là một cơ sở của  $V$ . Giả sử

$$T_1(v_i) = T_2(v_i) \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, n.$$

Chứng minh rằng:  $T_1 = T_2$ .



HÌNH 5.1

**5.27 [hint]** Cho  $V, W$  là các không gian véc tơ. Cho  $v_1, v_2, \dots, v_n$  là một cơ sở của  $V$  và  $w_1, w_2, \dots, w_n$  là các véc tơ bất kì trong  $W$ .

Chứng minh rằng tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính  $T: V \rightarrow W$  sao cho

$$T(v_1) = w_1, T(v_2) = w_2, \dots, T(v_n) = w_n.$$

**5.28 [hint]** Xác định khẳng định đúng trong các phát biểu sau đây

a. Một ánh xạ  $T: V \rightarrow W$  là ánh xạ tuyến tính khi và chỉ khi

$$T(k_1v_1 + k_2v_2) = k_1T(v_1) + k_2T(v_2)$$

với mọi  $v_1, v_2 \in V$  và  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ .

## 5.2 HỢP THÀNH CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH; ĐẲNG CẦU TUYẾN TÍNH

### ĐƠN CẤU VÀ TOÀN CẤU

**ĐỊNH NGHĨA 5.2.1.** Cho  $T: V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính.  $T$  được gọi là

- ▷ một **đơn cấu** nếu nó biến hai véc tơ khác nhau trong  $V$  thành hai véc tơ khác nhau trong  $W$ .
- ▷ một **toàn cấu** nếu mọi véc tơ trong  $W$  là ảnh của ít nhất một véc tơ trong  $V$ , tức là  $\text{Im}(T) = W$ .

Cho  $T: V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính. Xét phương trình

$$T(v) = w \tag{1}$$

với  $v \in V, w \in W$ .

- ▷  $T$  là một đơn cấu khi và chỉ khi phương trình (1) có nhiều nhất 1 nghiệm với mọi  $w \in W$ .
- ▷  $T$  là một toàn cấu khi và chỉ khi phương trình (1) có ít nhất 1 nghiệm với mọi  $w \in W$ .

**MỆNH ĐỀ 5.2.2.** Cho  $T : V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính. Hai khẳng định sau tương đương với nhau.

1.  $T$  là một đơn cấu.
2.  $\ker(T) = \{0\}$ .

**MỆNH ĐỀ 5.2.3.** Cho  $A$  là một ma trận cỡ  $m \times n$ . Các khẳng định sau đây tương đương với nhau.

1. Biến đổi ma trận  $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  là một đơn cấu.
2. Hệ véc tơ cột của  $A$  là độc lập tuyến tính.
3. Hạng của ma trận  $A$  bằng  $n$ .

**MỆNH ĐỀ 5.2.4.** Cho  $A$  là một ma trận cỡ  $m \times n$ . Các khẳng định sau đây tương đương với nhau.

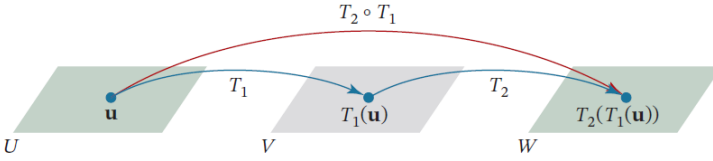
1. Biến đổi ma trận  $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  là một toàn cấu.
2. Hệ véc tơ cột của  $A$  là một hệ sinh của  $\mathbb{R}^m$ .
3. Hạng của ma trận  $A$  bằng  $m$ .

## HỢP THÀNH CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

**ĐỊNH NGHĨA 5.2.5.** Cho  $T_1 : U \rightarrow V$  và  $T_2 : V \rightarrow W$  là các ánh xạ tuyến tính. Ánh xạ hợp thành của  $T_2$  và  $T_1$ , ký hiệu  $T_2 \circ T_1$ , là ánh xạ  $U \rightarrow W$  cho bởi công thức

$$(T_2 \circ T_1)(u) = T_2(T_1(u))$$

với mọi  $u \in U$ .



HÌNH 5.2

**MỆNH ĐỀ 5.2.6.** Cho  $T_1 : U \rightarrow V$  và  $T_2 : V \rightarrow W$  là các ánh xạ tuyến tính. Khi đó, ánh xạ hợp thành  $T_2 \circ T_1 : U \rightarrow W$  cũng là một ánh xạ tuyến tính.

### ĐẲNG CẤU

**ĐỊNH NGHĨA 5.2.7.** Một ánh xạ tuyến tính  $T : V \rightarrow W$  được gọi là **đẳng cấu** nếu  $T$  đồng thời là đơn cấu và toàn cấu. Ta nói  $V$  **đẳng cấu** với  $W$  nếu tồn tại một đẳng cấu  $T : V \rightarrow W$ .

**ĐỊNH LÝ 5.2.8.** Tất cả các không gian véc tơ thực  $n$  chiều đều đẳng cấu với  $\mathbb{R}^n$ .

Cụ thể hơn, nếu  $V$  là một không gian véc tơ  $n$  chiều và  $\mathcal{B}$  là một cơ sở của  $V$  thì ánh xạ tọa độ

$$\begin{aligned} [-]_{\mathcal{B}} : V &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ v &\mapsto [v]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

là một đẳng cấu.

**Corollary 3.** Tất cả các không gian véc tơ có cùng số chiều đều đẳng cấu với nhau.

### 5.3 MA TRẬN CỦA ẢNH XẠ TUYẾN TÍNH

## MA TRẬN CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

**ĐỊNH NGHĨA 5.3.1.** Cho  $T : V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính trong đó  $V$  là một không gian véc tơ  $n$  chiều và  $W$  là một không gian véc tơ  $m$  chiều. Cho  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  là một cơ sở của  $V$  và  $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, \dots, u'_m\}$  là một cơ sở của  $W$ . Ma trận  $T$  đối với cơ sở  $\mathcal{B}$  của  $V$  và  $\mathcal{B}'$  của  $W$  là ma trận

$$[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} [T(u_1)]_{\mathcal{B}'} & [T(u_2)]_{\mathcal{B}'} & \cdots & [T(u_n)]_{\mathcal{B}'} \end{bmatrix} \in M_{m \times n}.$$

Cột thứ  $j$  của ma trận  $[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  là véc tơ tọa độ của véc tơ  $T(u_j) \in W$  trong cơ sở  $\mathcal{B}'$ .

Cột thứ  $j$  của ma trận của ánh xạ tuyến tính là nghiệm duy nhất của phương trình véc tơ

$$x_1 u'_1 + x_2 u'_2 + \dots + x_m u'_m = T(u_j).$$

Vì các phương trình véc tơ ứng với  $j = 1, 2, \dots, n$  này chỉ khác nhau ở phần véc tơ tự do nên ta có thể giải các phương trình véc tơ này một cách đồng thời.

**MỆNH ĐỀ 5.3.2.** Với mỗi véc tơ  $v \in V$ , ta có

- ▷ véc tơ tọa độ  $[v]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$  của  $v \in V$  trong cơ sở  $\mathcal{B}$ .
- ▷ véc tơ tọa độ  $[T(v)]_{\mathcal{B}'} \in \mathbb{R}^m$  của  $T(v) \in W$  trong cơ sở  $\mathcal{B}'$ .

Ta luôn có đẳng thức sau

$$[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} [v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}'}.$$

Nếu  $W = V$  và  $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ , ta kí hiệu  $[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$  đơn giản là  $[T]_{\mathcal{B}}$  và gọi nó là ma trận tự đồng cấu của  $T$  trong cơ sở  $\mathcal{B}$ . Khi đó với mọi véc tơ  $v \in V$ , ta có

$$[T]_{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}}.$$

**VÍ DỤ 5.3.3.** Cho  $A \in M_{m \times n}$  và  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  là biến đổi ma trận ứng với  $A$ . Khi đó ma trận của  $T$  đối với cơ sở chính tắc của  $\mathbb{R}^n$  và cơ sở chính tắc của  $\mathbb{R}^m$  chính là ma trận  $A$ .

**GIẢI.** Giả sử  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ . Cơ sở chính tắc của  $\mathbb{R}^n$  là  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , cơ sở chính tắc của  $\mathbb{R}^m$  là  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Với  $1 \leq j \leq n$ , ta có

$$\begin{aligned} T(e_j) = Ae_j &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \\ &= a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \dots + a_{mj}e_m. \end{aligned}$$

Do đó, vectơ cột thứ  $j$  của ma trận của biến đổi ma trận  $T$  trong các cơ sở chính tắc của  $\mathbb{R}^n$  và  $\mathbb{R}^m$  là  $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ . Đây chính là cột thứ  $j$  của ma trận  $A$ . Vậy ma trận của biến đổi ma trận ứng với ma trận  $A$  chính là ma trận  $A$ .  $\square$

**VÍ DỤ 5.3.4.** Cho  $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_3$  là ánh xạ tuyến tính cho bởi

$$T(p(x)) = (x+1)p(2x-1)$$

với mọi  $p(x) \in \mathcal{P}_2$ . Tìm ma trận của  $T$  đối với cơ sở chính tắc  $\{1, x, x^2\}$  của  $\mathcal{P}_2$  và cơ sở  $\left\{1, x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}\right\}$  của  $\mathcal{P}_3$ .

**GIẢI.** Ta có

$$\begin{aligned} T(1) &= (x+1) \cdot 1 = x+1 \\ &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot \frac{x^2}{2!} + 0 \cdot \frac{x^3}{3!} \\ T(x) &= (x+1)(2x-1) = 2x^2 + x - 1 \\ &= -1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 4 \cdot \frac{x^2}{2!} + 0 \cdot \frac{x^3}{3!} \\ T(x^2) &= (x+1)(2x-1)^2 = 4x^3 - 3x + 1 \\ &= 1 \cdot 1 - 3 \cdot x + 0 \cdot \frac{x^2}{2!} + 24 \cdot \frac{x^3}{3!}. \end{aligned}$$

Do đó, ma trận của ánh xạ tuyến tính  $T$  theo cặp cơ sở đã cho là

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}.$$

$\square$

## BÀI TẬP

**5.29** [hint] Cho  $T : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$  là tự đồng cấu cho bởi

$$T(p(x)) = p(x - 2).$$

Tìm ma trận của  $T$  đối với cơ sở chính tắc của  $\mathcal{P}_3$ .

**5.30** [hint] Tìm ma trận của ánh xạ đạo hàm  $D : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$  trong

a. cơ sở chính tắc của  $\mathcal{P}_3$ .

b. cơ sở  $\{1, 2x - 1, (2x - 1)^2, (2x - 1)^3\}$  của  $\mathcal{P}_3$ .

**5.31** [hint] Tìm ma trận của ánh xạ đạo hàm  $D : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n-1}$  trong cơ sở chính tắc của  $\mathcal{P}_n$  và của  $\mathcal{P}_{n-1}$ .

**5.32** [hint] Cho ma trận  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \in M_{2 \times 3}$ . Xét ánh xạ tuyến tính  $T : M_{3 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$  cho bởi

$$T(B) = AB$$

với mọi  $B \in M_{3 \times 2}$ . Tìm ma trận của  $T$  trong cơ sở  $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{31}, E_{32}\}$  của  $M_{3 \times 2}$  và cơ sở  $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$  của  $M_{2 \times 2}$ .

**5.33** [hint] Cho  $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  là ánh xạ tuyến tính cho bởi

$$T(p(x)) = (4p(1), -3p(2)).$$

Tìm ma trận của  $T$  trong cơ sở  $\{2x + 1, x - 3, x^2\}$  của  $\mathcal{P}_2$  trong cơ sở  $\{(1, 1), (0, 1)\}$  của  $\mathbb{R}^2$ .

## GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 5

**5.1.** Hãy biểu diễn  $T$  như là các biến đổi ma trận.

**5.2.** Để chứng minh  $T$  không là một ánh xạ tuyến tính, ta phải chỉ ra hoặc  $T$  không bảo toàn phép cộng vectơ hoặc  $T$  không bảo toàn phép nhân số với vectơ.

**5.4.**  $(2, 1, 3) = 2e_1 + 1e_2 + 3e_3$ . Sử dụng tính tuyến tính của ánh xạ  $T$ .

**5.5.** Biểu thị  $e_1$  như là một tổ hợp tuyến tính của hai vectơ  $(1, 1)$  và  $(2, 3)$ .

**5.10.**  $\ker(T) = \text{Nul}(A)$  và  $\text{Im}(T) = \text{Col}(A)$ .

**5.31.** Chú ý rằng trong bài tập này, ánh xạ đạo hàm  $D$  đi từ  $\mathcal{P}_n$  đến  $\mathcal{P}_{n-1}$ , không phải đến  $\mathcal{P}_n$ .



# 6

## Giá trị riêng và vectơ riêng

Chương này trình bày về các giá trị riêng, vectơ riêng của ma trận và bài toán chéo hóa ma trận.

### 6.1 GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ VÉCTƠ RIÊNG

---

Trong mục này, chúng ta sẽ định nghĩa khái niệm giá trị riêng, vectơ riêng của một ma trận và trình bày một vài tính chất cơ bản của chúng.

#### VÉCTƠ RIÊNG VÀ GIÁ TRỊ RIÊNG

Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$ . Khi đó,  $A$  xác định một ánh xạ tuyến tính  $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  biến mỗi vectơ  $x \in \mathbb{R}^n$  thành vectơ  $T_A(x) = Ax$ . Với hầu hết các vectơ  $x$ , vectơ ảnh  $Ax$  không cùng phương với  $x$ . Những vectơ  $x$  cùng phương với  $Ax$  đóng vai trò quan trọng đối với ma trận  $A$ .

**ĐỊNH NGHĨA 6.1.1.** Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$ . Một vectơ  $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$  được gọi là một **vectơ riêng** của  $A$  và cũng là một vectơ riêng của biến đổi ma trận  $T_A(x) = Ax$  nếu  $Ax$  cùng phương với  $x$ :

$$Ax = \lambda x$$

với vô hướng  $\lambda$  nào đó. Khi đó

- ▷ vô hướng  $\lambda$  được gọi là một **giá trị riêng** của  $A$  và cũng là của biến đổi ma trận  $T_A$ ,
- ▷ véctơ  $x$  là một véctơ riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda$ .

Với mỗi ma trận  $A$ , ta muốn xác định tất cả véctơ riêng và giá trị riêng của nó.

**VÍ DỤ 6.1.2.** Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

véctơ nào sau đây là véctơ riêng của  $A$  ?

$$u = (1, 2), \quad v = (2, 1).$$

**GIẢI.** Ta có

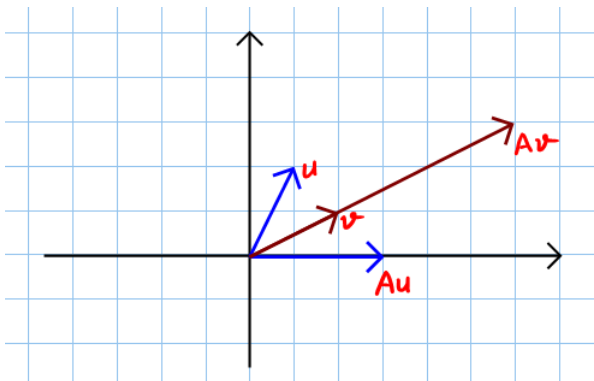
$$Au = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

với mọi  $\lambda$  nên  $u$  không là một véctơ riêng của  $A$ .

Ta có

$$Av = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 3v.$$

Suy ra  $v$  là một véctơ riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda = 3$ . □



**VÍ DỤ 6.1.3.** Cho ma trận  $A$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Tìm  $a$  để véctơ  $v = (1, 2, 1)$  là một véctơ riêng của  $A$ .

**GIẢI.** Ta có

$$Av = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 + a \\ 5 \end{bmatrix}.$$

véctơ  $v$  là một véctơ riêng của  $A$  khi và chỉ khi  $Av$  cùng phương với  $v$ , tức là  $Av = \lambda v$  với một vô hướng  $\lambda$  nào đó:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 8 + a \\ 5 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Phương trình này tương đương với

$$5 = \lambda, \quad 8 + a = 2\lambda, \quad 5 = \lambda.$$

Nghiệm duy nhất là  $\lambda = 5, a = 2$ . Vậy  $a = 2$ .

Khi  $a = 2$ , véctơ  $v$  là một véctơ riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda = 5$ .  $\square$

**MỆNH ĐỀ 6.1.4.** Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$ . Một vô hướng  $\lambda$  là một giá trị riêng của  $A$  khi và chỉ khi  $\text{Nul}(A - \lambda I) \neq \{0\}$ .

**CHỨNG MINH.** Theo định nghĩa, vô hướng  $\lambda$  là một giá trị riêng của  $A$  khi và chỉ phương trình

$$Ax = \lambda x$$

có nghiệm  $x \neq 0$ . Ta có

$$\begin{aligned} Ax = \lambda x &\Leftrightarrow Ax - \lambda x = 0 \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Nul}(A - \lambda I). \end{aligned}$$

Do đó,  $\lambda$  là một giá trị riêng của  $A$  khi và chỉ khi  $\text{Nul}(A - \lambda I) \neq \{0\}$ .  $\square$

**VÍ DỤ 6.1.5.** Cho ma trận

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vô hướng  $\lambda = -2$  có phải là một giá trị riêng của  $A$  hay không?

**GIẢI.** Vô hướng  $\lambda = -2$  là một giá trị riêng của  $A$  khi và chỉ khi  $\text{Nul}(A - (-2)I) \neq \{0\}$ . Khử Gauss ma trận  $A - (-2)I = A + 2I$  ta được

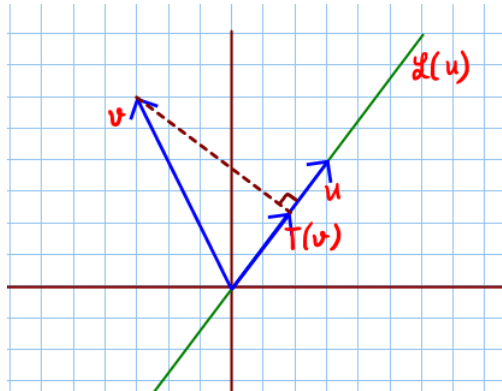
$$A + 2I = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -4 & -4 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Từ dạng bậc thang này, ta thấy  $\text{Nul}(A - \lambda I) \neq \{0\}$ . Do đó,  $\lambda = -2$  là một giá trị riêng của  $A$ . □

**VÍ DỤ 6.1.6.** Trong mặt phẳng Euclid  $\mathbb{R}^2$ , xét phép chiếu vuông góc  $T$  lên không gian con  $\mathcal{L}(u)$  với  $u = (3, 4)$ . Ta biết rằng  $T$  là một biến đổi tuyến tính với ma trận chính tắc là

$$\frac{1}{25} \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}.$$

Lý luận một cách hình học, tìm các véctơ riêng và giá trị riêng của  $T$ .



**CHỨNG MINH.** Theo định nghĩa, một véctơ  $v \in \mathbb{R}^2, v \neq 0$  là một véctơ riêng của  $T$  khi và chỉ khi  $T(v)$  cùng phương với  $v$ . Vì  $T$  là phép chiếu vuông góc lên đường thẳng  $\mathcal{L}(u)$  nên  $T(v)$  cùng phương với  $v$  khi và chỉ khi  $v \parallel u$  hoặc  $v \perp u$ . Hơn nữa

- ▷ Nếu  $v \parallel u$  thì  $T(v) = v$ . Do đó  $v$  là một véctơ riêng của  $T$  ứng với giá trị riêng  $\lambda = 1$ .
- ▷ Nếu  $v \perp u$  thì  $T(v) = 0 = 0v$ . Do đó  $v$  là một véctơ riêng của  $T$  ứng với giá trị riêng  $\lambda = 0$ .

Vậy  $T$  có hai giá trị riêng là  $\lambda = 0$  và  $\lambda = 1$  với các véctơ riêng tương ứng lần lượt là các véctơ  $v \perp u$  và các véctơ  $v \parallel u$ . □

Trong ví dụ trên, ta có thể xét phép chiếu vuông góc lên một đường thẳng  $\mathcal{L}(u)$  bất kỳ trong mặt phẳng Euclid  $\mathbb{R}^2$ .

## BÀI TẬP

**6.1** [hint] Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Chứng minh rằng các véctơ

$$v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (1, -6, 3), \quad v_3 = (4, 0, -3)$$

là các véctơ riêng của  $A$ . Tìm các giá trị riêng tương ứng.

**6.2** [hint] Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Tìm các số thực  $a, b, c$  sao cho các véctơ sau là các véctơ riêng của  $A$  và tìm các giá trị riêng tương ứng.

$$v_1 = (1, a, 1), \quad v_2 = (1, 0, b), \quad v_3 = (c, -1, 0).$$

### 6.3 [hint] Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vô hướng nào sau đây là giá trị riêng của  $A$ ?

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1.$$

### 6.4 [hint] Trong mặt phẳng Euclid $\mathbb{R}^2$ , xét phép quay $T$ góc $90^\circ$ tâm tại gốc tọa độ. Ánh xạ $T$ là một biến đổi tuyến tính với ma trận chính tắc là

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lý luận một cách hình học, tìm các véctơ riêng và giá trị riêng của  $T$ .

## TÌM GIÁ TRỊ RIÊNG

**ĐỊNH LÝ 6.1.7.** Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$ . Một vô hướng  $\lambda$  là một giá trị riêng của  $A$  khi và chỉ khi

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (1)$$

Phương trình (1) được gọi là **phương trình đặc trưng** của  $A$ , còn vế trái của nó được gọi là **đa thức đặc trưng** của  $A$ , kí hiệu là  $P_A(\lambda)$ .

**CHỨNG MINH.** Ta có

$$\begin{aligned} \lambda \text{ là một giá trị riêng của } A &\Leftrightarrow \text{Nul}(A - \lambda I) \neq \{0\} \\ &\Leftrightarrow A - \lambda I \text{ không khả nghịch} \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0. \end{aligned}$$

□

Định lý này cung cấp cho chúng ta một thuật toán để tìm tất cả giá trị riêng của một ma trận.

**Tìm giá trị riêng**

Để tìm các giá trị riêng của một ma trận vuông  $A$  cỡ  $n \times n$ , ta làm như sau.

1. Tính đa thức đặc trưng  $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ .  
Trong bước này, ta phải tính một định thức cỡ  $n \times n$  với ẩn  $\lambda$  xuất hiện trên đường chéo.
2. Giải phương trình đặc trưng  $P_A(\lambda) = 0$ .  
Các giá trị riêng của  $A$  chính là các nghiệm của phương trình đặc trưng.

**VÍ DỤ 6.1.8.** Tìm các giá trị riêng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

**GIẢI.** Đa thức đặc trưng của  $A$  là

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (3 - \lambda)(-1 - \lambda). \end{aligned}$$

Do đó, các nghiệm phương trình đặc trưng

$$P_A(\lambda) = 0$$

là  $\lambda = 3$  và  $\lambda = -1$ . Vậy các giá trị riêng của  $A$  là 3 và  $-1$ . □

**VÍ DỤ 6.1.9.** Tìm các giá trị riêng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

**GIẢI.** Đa thức đặc trưng của  $A$  là

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -5-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\quad + 3 \begin{vmatrix} -3 & -5-\lambda \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 + 4\lambda + 4) - 3(3\lambda + 6) + 3(3\lambda + 6) \\
&= -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2.
\end{aligned}$$

Vậy, các giá trị riêng của  $A$  là  $\lambda = 1$  và  $\lambda = -2$ . □

Trong hai ví dụ trên, ta thấy rằng đa thức đặc trưng  $P_A(\lambda)$  là một đa thức đối với  $\lambda$ . Ta có thể chứng minh rằng với một ma trận  $A$  bất kỳ, đa thức đặc trưng  $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  luôn là một đa thức đối với  $\lambda$ . Hơn nữa, nếu  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$  thì  $P_A(\lambda)$  là một đa thức bậc  $n$ :

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1} \lambda + c_n.$$

**ĐỊNH NGHĨA 6.1.10.** Với mỗi giá trị riêng  $\lambda$  của ma trận vuông  $A$ , **bội đại số** của  $\lambda$  là bội của  $\lambda$  như là một nghiệm của đa thức đặc trưng.

**VÍ DỤ 6.1.11.** Giả sử đa thức đặc trưng của một ma trận vuông  $A$  là

$$P_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda + 3)(\lambda - 5)^3(\lambda^2 + \lambda + 1).$$

Khi đó,  $A$  có các giá trị riêng thực là  $0, -3, 5$  với bội đại số lần lượt là  $2, 1, 3$ .

|               |   |    |   |
|---------------|---|----|---|
| Giá trị riêng | 0 | -3 | 5 |
| Bội đại số    | 2 | 1  | 3 |

Nếu ta xét cả các nghiệm phức, thì ma trận  $A$  có thêm 2 giá trị riêng là các nghiệm phức của phương trình  $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ , tức là  $\lambda = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$  và  $\lambda = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ . Cả hai giá trị riêng này đều có bội đại số bằng 1.

**VÍ DỤ 6.1.12.** Từ các ví dụ 6.1.8 và 6.1.9 ta có các kết quả sau. Các giá trị riêng và bội đại số của ma trận  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  là

|               |   |    |
|---------------|---|----|
| Giá trị riêng | 3 | -1 |
| Bội đại số    | 1 | 1  |

Các giá trị riêng và bội đại số của ma trận  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  là

|               |   |    |
|---------------|---|----|
| Giá trị riêng | 1 | -2 |
| Bội đại số    | 1 | 2  |

**MỆNH ĐỀ 6.1.13.** Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$ . Ma trận  $A$  có không quá  $n$  giá trị riêng tính cả bội đại số. Nói cách khác, tổng số bội đại số của tất cả giá trị riêng của ma trận nhỏ hơn hoặc bằng  $n$ .

**CHỨNG MINH.** Các giá trị riêng của  $A$  là các nghiệm của đa thức đặc trưng

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Vì  $A$  có cỡ  $n \times n$  nên  $P_A(\lambda)$  là một đa thức bậc  $n$ .

Theo định lý cơ bản của đại số học, một đa thức bậc  $n$  với hệ số thực có không quá  $n$  nghiệm thực, tính cả bội. Do đó, ma trận  $A$  có không quá  $n$  giá trị riêng tính cả bội đại số.  $\square$

**VÍ DỤ 6.1.14.** Tìm các giá trị riêng của ma trận và bội đại số của chúng

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}.$$

**GIẢI.** Đa thức đặc trưng của ma trận  $A$  là

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & -17 & 8-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -17 & 8-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 8-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda(\lambda^2 - 8\lambda + 17) - (-4) \\
&= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 4.
\end{aligned}$$

Ta có

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1).$$

Do đó, các giá trị riêng của  $A$  và bội đại số của chúng là

|               |   |                |                |
|---------------|---|----------------|----------------|
| Giá trị riêng | 4 | $2 + \sqrt{3}$ | $2 - \sqrt{3}$ |
| Bội đại số    | 1 | 1              | 1              |

□

### GIÁ TRỊ RIÊNG CỦA MA TRẬN TAM GIÁC

**VÍ DỤ 6.1.15.** Tìm các giá trị riêng của ma trận tam giác trên

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}.$$

**GIẢI.** Đa thức đặc trưng của  $A$  là

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Định thức của một ma trận tam giác trên đơn giản là tích các phần tử trên đường chéo của nó

$$P_A(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda).$$

Do đó, các giá trị riêng của  $A$  là  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  và  $a_{33}$ .

□

Ta có thể xác định các giá trị riêng của ma trận tam giác một cách tương tự.

**MỆNH ĐỀ 6.1.16.** Cho  $A$  là một ma trận tam giác trên hoặc tam giác dưới. Khi đó, các giá trị riêng của ma trận  $A$  chính là các phần tử trên đường chéo của ma trận, với bội đại số chính là số lần xuất hiện trên đường chéo.

**CHỨNG MINH.** Giả sử  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ . Đa thức đặc trưng của  $A$  là

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Vì  $A$  là một ma trận tam giác nên  $A - \lambda I$  cũng là một ma trận tam giác. Định thức của một ma trận tam giác đơn giản là tích các phần tử trên đường chéo của nó. Suy ra

$$P_A(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda).$$

Do đó, các giá trị riêng của  $A$  là  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  với số lần lặp lại của mỗi giá trị riêng chính là bội đại số của nó.  $\square$

**VÍ DỤ 6.1.17.** Các giá trị riêng của ma trận tam giác

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 5 & -8 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

là  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$  và  $-\frac{1}{4}$ .

**VÍ DỤ 6.1.18.** Chứng minh rằng đa thức đặc trưng của ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

là

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

**CHỨNG MINH.** Đa thức đặc trưng của ma trận  $A$  là

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \\
&= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\
&= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).
\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22}, \quad \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Vậy

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

□

**VÍ DỤ 6.1.19.** Chứng minh rằng đa thức đặc trưng của một ma trận vuông cỡ  $3 \times 3$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

là

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + \operatorname{tr}(A)\lambda^2 + c_2\lambda + c_3$$

với  $c_2$  và  $c_3$  là hai vô hướng nào đó.

**GIẢI.** Đa thức đặc trưng của  $A$  là

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} \\
&= (a_{11} - \lambda) \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} \\
&\quad + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} - \lambda & a_{23} \end{vmatrix} \\
&= (a_{11} - \lambda)(\lambda^2 - (a_{22} + a_{33})\lambda + (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})) \\
&\quad + (\text{một đa thức bậc nhỏ hơn 2}) \\
&= -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda + (\text{một đa thức bậc nhỏ hơn 2}).
\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

Vậy

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + \operatorname{tr}(A)\lambda^2 + c_2\lambda + c_3.$$

□

**MỆNH ĐỀ 6.1.20.** Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$ . Khi đó, đa thức đặc trưng của  $A$  là một đa thức bậc  $n$  có dạng

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A) \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_{n-1} \lambda + \det(A).$$

**CHỨNG MINH.** Ta thừa nhận kết quả này, ngoại trừ khẳng định về hệ số tự do của đa thức đặc trưng  $P_A(\lambda)$ . Hệ số tự do này chính là  $P_A(0)$ . Theo định nghĩa

$$P_A(0) = \det(A - 0I) = \det(A).$$

□

**MỆNH ĐỀ 6.1.21.** Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$ . Giả sử  $A$  có đủ  $n$  giá trị riêng tính cả bội đại số là  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Khi đó

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \operatorname{tr}(A), \quad \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = \det(A).$$

**CHỨNG MINH.** Vì  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$  nên đa thức đặc trưng  $P_A(\lambda)$  của nó là một đa thức bậc  $n$ . Theo giả thiết, đa thức  $P_A(\lambda)$  có đủ  $n$  nghiệm là  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Do đó

$$P_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n). \quad (2)$$

Ta có hệ số  $(-1)^n$  bên vế phải của đẳng thức trên vì hệ số của  $\lambda^n$  trong đa thức  $P_A(\lambda)$  là  $(-1)^n$ . Tích

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

là một đa thức bậc  $n$  với

$$\triangleright \text{hệ số của } \lambda^{n-1} \text{ là } (-\lambda_1) + (-\lambda_2) + \dots + (-\lambda_n) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n),$$

$$\triangleright \text{hệ số tự do là } (-\lambda_1)(-\lambda_2) \dots (-\lambda_n) = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.$$

So sánh hệ số của  $\lambda^{n-1}$  và hệ số tự do trong hai vế của đẳng thức (2) ta được

$$(-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A) = (-1)^n (-(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)).$$

và

$$\det(A) = (-1)^n ((-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n).$$

Vậy

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr}(A), \quad \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det(A).$$

□

## BÀI TẬP

**6.5** [hint] Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

trong đó  $a$  là một tham số.

- (a) Tính đa thức đặc trưng của  $A$ .
- (b) Tìm  $a$  để  $A$  có 3 giá trị riêng thực phân biệt.
- (c) Tìm  $a$  để  $A$  có 2 giá trị riêng thực phân biệt.

**6.6** [hint] Tìm một ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$  có đa thức đặc trưng là

$$\lambda^2 + a\lambda + b$$

với  $a, b$  là các hằng số thực.

**6.7** [hint]

- (a) Tính đa thức đặc trưng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix}.$$

- (b) Tìm một ma trận vuông cỡ  $3 \times 3$  có đa thức đặc trưng là

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 - 7\lambda + 11.$$

## TÌM VÉCTƠ RIÊNG

**MỆNH ĐỀ 6.1.22.** Cho  $\lambda$  là một giá trị riêng của một ma trận vuông  $A$  cỡ  $n \times n$ . Tập hợp véctơ riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda$  là  $\text{Nul}(A - \lambda I) \setminus \{0\}$ .

**CHỨNG MINH.** Theo định nghĩa, tập hợp các véctơ riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda$  là tập các nghiệm  $x \neq 0$  của phương trình  $Ax = \lambda x$ . Ta có

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow x \in \text{Nul}(A - \lambda I).$$

Do đó, tập hợp véctơ riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda$  là  $\text{Nul}(A - \lambda I) \setminus \{0\}$ .  $\square$

**ĐỊNH NGHĨA 6.1.23.** Cho  $\lambda$  là một giá trị riêng của một ma trận vuông  $A$  cỡ  $n \times n$ . Hạt nhân  $\text{Nul}(A - \lambda I)$  được gọi là **không gian con riêng** của  $A$  ứng với  $\lambda$ , kí hiệu là  $E_\lambda$ . Số chiều của không gian con riêng  $E_\lambda$  được gọi là **bội hình học** của  $\lambda$

$$\text{Bội hình học của } \lambda = \dim \text{Nul}(A - \lambda I) = n - \text{rank}(A - \lambda I).$$

Như vậy, với mỗi giá trị riêng  $\lambda$  của  $A$ , để tìm các véctơ riêng tương ứng, ta phải tìm hạt nhân  $\text{Nul}(A - \lambda I)$ , tức là tìm một cơ sở của không gian con riêng này.

#### Tìm véctơ riêng

Cho  $\lambda$  là một giá trị riêng của ma trận  $A$ . Để tìm không gian con riêng  $E_\lambda = \text{Nul}(A - \lambda I)$ , ta làm như sau.

1. Khử Gauss ma trận  $A - \lambda I$ .
2. Viết ra một cơ sở cho không gian con riêng  $E_\lambda$ .

**VÍ DỤ 6.1.24.** Tìm các giá trị riêng và véctơ riêng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

**GIẢI.**  $\triangleright$  Đa thức đặc trưng của ma trận  $A$  là

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 3 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6.$$

Vì

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$$

nên các giá trị riêng của  $A$  là 2 và  $-3$  với bội đại số lần lượt là 1 và 1.

▷ Không gian con riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda = 2$  là  $E_2 = \text{Nul}(A - 2I)$ . Khử Gauss ma trận  $A - 2I$ :

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Suy ra, bội hình học của giá trị riêng  $\lambda = 2$  là 1. Hơn nữa

$$x \in E_2 \Leftrightarrow x = (t, t) \Leftrightarrow x = t(1, 1).$$

Do đó, một cơ sở của không gian con riêng  $E_2$  véctơ  $(1, 1)$ .

▷ Không gian con riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda = -3$  là  $E_{-3} = \text{Nul}(A + 3I)$ . Khử Gauss ma trận  $A + 3I$ :

$$A + 3I = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Suy ra, bội hình học của giá trị riêng  $\lambda = -3$  là 1. Hơn nữa

$$x \in E_{-3} \Leftrightarrow x = (-3t, 2t) \Leftrightarrow x = t(-3, 2).$$

Do đó, một cơ sở của không gian con riêng  $E_{-3}$  là véctơ  $(-3, 2)$ .

Bảng các giá trị riêng, véctơ riêng của ma trận  $A$  là

| Giá trị riêng                     | 2                                      | -3                                      |
|-----------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------------|
| Bội đại số                        | 1                                      | 1                                       |
| Bội hình học                      | 1                                      | 1                                       |
| Cơ sở của<br>không gian con riêng | $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ |

□

**VÍ DỤ 6.1.25.** Tìm các giá trị riêng và véctơ riêng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

**GIẢI.** ▷ Đa thức đặc trưng của  $A$  là

$$\begin{aligned}
 P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
 &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= -\lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 6) - 2(\lambda - 2) \\
 &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4.
 \end{aligned}$$

Vì

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

nên các giá trị riêng của ma trận  $A$  là 1 và 2 với bội đại số lần lượt là 1 và 2.

▷ Không gian con riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda = 1$  là  $E_1 = \text{Nul}(A - I)$ . Khử Gauss ma trận  $A - I$ , ta được

$$A - I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Suy ra, giá trị riêng  $\lambda = 1$  có bội hình học là 1. Hơn nữa,

$$x \in E_1 \Leftrightarrow x = (-2t, t, t) \Leftrightarrow x = t(-2, 1, 1).$$

Vậy một cơ sở của không gian con riêng  $E_1$  vectơ  $(-2, 1, 1)$ .

▷ Không gian con riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda = 2$  là  $E_2 = \text{Nul}(A - 2I)$ . Khử Gauss ma trận  $A - 2I$ , ta được

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Suy ra, giá trị riêng  $\lambda = 2$  có bội hình học là 2. Hơn nữa,

$$x \in E_2 \Leftrightarrow x = (-s, t, s) \Leftrightarrow x = t(0, 1, 0) + s(-1, 0, 1).$$

Vậy một cơ sở của không gian con riêng  $E_2$  là hệ vectơ  $(0, 1, 0), (-1, 0, 1)$ .

Bảng các giá trị riêng, vectơ riêng của ma trận  $A$  là

| Giá trị riêng                     | 1                                            | 2                                                                                       |
|-----------------------------------|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| Bội đại số                        | 1                                            | 2                                                                                       |
| Bội hình học                      | 1                                            | 2                                                                                       |
| Cơ sở của<br>không gian con riêng | $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ |

□

**MỆNH ĐỀ 6.1.26.** Mọi giá trị riêng đều có bội hình học nhỏ hơn hoặc bằng bội đại số.

**MỆNH ĐỀ 6.1.27.** Một ma trận vuông  $A$  là khả nghịch khi và chỉ khi 0 không là một giá trị riêng của  $A$ .

**CHỨNG MINH.** Ta có các biến đổi tương đương

- 0 không là một giá trị riêng của  $A$
- $\Leftrightarrow$  Phương trình  $Ax = 0$  chỉ có nghiệm tầm thường
- $\Leftrightarrow A$  khả nghịch.

□

## BÀI TẬP

**6.8** [hint] Tìm các giá trị riêng và bội đại số tương ứng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

**6.9** [hint] Tìm các giá trị riêng và một cơ sở cho mỗi không gian con riêng của ma trận

(a)  $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$

(b)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$

**6.10** [hint] Tìm các giá trị riêng và một cơ sở cho mỗi không gian con riêng của ma trận

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

## BÀI TẬP TỔNG HỢP

---

**6.11** [hint] Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -11 & 3 & -6 \\ 8 & -2 & 4 \\ a & -6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Tìm  $a$  biết rằng véctơ  $v = (9, -8, -16)$  là một véctơ riêng của  $A$ .  
 Tìm giá trị riêng tương ứng.

**6.12** [hint] Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & b & 4 \end{bmatrix}.$$

Biết rằng các véctơ

$$v_1 = (1, 1, -1), \quad v_2 = (1, 0, -1), \quad v_3 = (3, 1, -1)$$

là các véctơ riêng của  $A$ . Tìm  $a$  và  $b$ . Tìm các giá trị riêng ứng với các véctơ riêng này.

**6.13** [hint] Tìm các giá trị riêng và véctơ riêng của phép đối xứng qua một đường thẳng  $\mathcal{L}(u)$  trong mặt phẳng Euclid  $\mathbb{R}^2$ .

**6.14** [hint] Tìm các giá trị riêng và véctơ riêng của phép quay góc  $180^\circ$  (tâm tại gốc tại độ) trong mặt phẳng Euclid  $\mathbb{R}^2$ .

**6.15** [hint] Giả sử ma trận  $A$  có đa thức đặc trưng là

(a)  $P_A(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 5,$

(b)  $P_A(\lambda) = \lambda^4 - 7\lambda^3 + \lambda^2.$

Tính định thức của ma trận  $A$ . Ma trận  $A$  có khả nghịch hay không?

**6.16** [hint] Tìm một ma trận  $A$  cỡ  $2 \times 2$  sao cho các véctơ  $(3, 1)$  và  $(1, 2)$  là các véctơ riêng của  $A$  với giá trị riêng tương ứng là 5 và 7.

**6.17** [hint] Tìm một ma trận  $A$  cỡ  $3 \times 3$  có các giá trị riêng là 1,  $-1$  và 2 và các véctơ riêng tương ứng là

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**6.18** [hint] Tìm ma trận vuông  $A$  cỡ  $3 \times 3$  có hai giá trị riêng phân biệt là 1 và  $-2$  sao cho  $(1, 1, -1)$  là một véctơ riêng của  $A$  ứng với 1 và  $(-1, 0, 1), (-1, 1, 0)$  là hai véctơ riêng của  $A$  ứng với  $-2$ .

**6.19** [hint] Cho  $A$  là một ma trận cỡ  $2 \times 2$ .

a. Chứng minh rằng đa thức đặc trưng của  $A$  là

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

b. Chứng minh rằng

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I = 0.$$

**6.20** [hint] Cho ma trận vuông

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

(a) Chứng minh rằng  $A^2 - 8A + 15I = 0$ .

(b) Tìm phần dư khi chia đa thức  $\lambda^{100}$  cho đa thức  $\lambda^2 - 8\lambda + 15$ .

(c) Tính  $A^{100}$ .

**6.21** [hint] Tính  $A^{100}$  với

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

**6.22** [hint] Cho  $\lambda$  là một giá trị riêng của ma trận vuông  $A$ .

- (a) Chứng minh rằng  $\lambda^2$  là một giá trị riêng của ma trận  $A^2$ .
- (b) Chứng minh rằng  $\lambda^3$  là một giá trị riêng của ma trận  $A^3$ .

**6.23** [hint] Cho  $\lambda$  là một giá trị riêng của ma trận vuông  $A$ . Chứng minh rằng  $\lambda^n$  là một giá trị riêng của  $A^n$  với mọi số nguyên dương  $n$ .

**6.24** [hint] Cho  $\lambda$  là một giá trị riêng của ma trận  $A$ . Cho  $f(t)$  là một đa thức. Chứng minh rằng  $f(\lambda)$  là một giá trị riêng của  $f(A)$ .

**6.25** [hint] Biết rằng ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 12 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

có các giá trị riêng là  $-3, -4, 5$ . Tìm các giá trị riêng của mỗi ma trận sau đây.

(a)  $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 12 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b)  $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 12 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

(c)  $D = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \\ 24 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

**6.26** [hint] Biết rằng ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -7 & a & -8 \\ 2 & b & c \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

có hai véctơ riêng là  $v_1 = (2, 1, -2)$  và  $v_2 = (0, 2, -1)$ .

- (a) Tìm  $a, b, c$ .
- (b) Tìm các giá trị riêng và một cơ sở cho mỗi không gian con riêng của ma trận  $A$ .

- (c) Tìm các giá trị riêng và một cơ sở cho mỗi không gian con riêng của ma trận  $B = A - 2A^3$ .

**6.27** [hint] Biết rằng ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

có các véctơ riêng là

$$v_1 = (-1, -2, 1), \quad v_2 = (1, -1, 1), \quad v_3 = (2, -1, 1).$$

- (a) Tìm các giá trị riêng của ma trận  $A^3$ .  
 (b) Tìm các giá trị riêng và véctơ riêng của ma trận  $B = A^2 - 5A$ .

**6.28** [hint] Cho  $\lambda$  là một giá trị riêng của ma trận  $A$ . Giả sử  $A$  khả nghịch.

- (a) Chứng minh  $\lambda \neq 0$ .  
 (b) Chứng minh rằng  $\frac{1}{\lambda}$  là một giá trị riêng của  $A^{-1}$ .

**6.29** [hint] Giả sử véctơ  $v$  đồng thời là véctơ riêng của hai ma trận  $A$  và  $B$ . Véctơ  $v$  có phải là một véctơ riêng của  $A + B$ ?

**6.30** [hint] Giả sử véctơ  $v$  đồng thời là véctơ riêng của hai ma trận  $A$  và  $B$ . Véctơ  $v$  có phải là một véctơ riêng của  $AB$ ?

**6.31** [hint] Tìm tất cả các ma trận cỡ  $2 \times 2$  nhận véctơ  $(2, 3)$  là một véctơ riêng với giá trị riêng tương ứng là  $-7$ .

**6.32** [hint] Tìm tất cả các ma trận cỡ  $2 \times 2$  nhận véctơ  $(-1, 2)$  là một véctơ riêng với giá trị riêng tương ứng là  $5$ .

**6.33** [hint] Ký hiệu  $V$  là tập hợp các ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$  có một véctơ riêng là  $(1, -3)$ . Chứng minh rằng  $V$  là một không gian véctơ con của  $M_{2 \times 2}$ . Tìm số chiều và một cơ sở của  $V$ .

**6.34** [hint] Ký hiệu  $V$  là tập hợp các ma trận vuông cỡ  $3 \times 3$  có hai véctơ riêng là  $(0, 1, -3)$  và  $(1, 0, 1)$ . Chứng minh rằng  $V$  là một không gian véctơ con của  $M_{3 \times 3}$ . Tìm số chiều và một cơ sở của  $V$ .

- 6.35** [hint] Ký hiệu  $V$  là tập hợp các ma trận vuông cỡ  $n \times n$  có  $n$  véctơ riêng là  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Chứng minh rằng  $V$  là một không gian véctơ con của  $M_{n \times n}$ . Tìm số chiều và một cơ sở của  $V$ .
- 6.36** [hint] Cho  $v$  là một véctơ riêng của ma trận vuông  $A$  ứng với giá trị riêng là 5. Chứng minh rằng  $v \in \text{Col}(A)$ .
- 6.37** [hint] Cho  $v$  là một véctơ riêng của ma trận vuông  $A$ . Chứng minh rằng  $v \in \text{Col}(A)$  hoặc  $v \in \text{Nul}(A)$ .
- 6.38** [hint] Cho  $A$  là một ma trận vuông có hạng bằng 1. Chứng minh rằng các véctơ khác không trong  $\text{Col}(A)$  đều là véctơ riêng của  $A$ .
- 6.39** [hint] Cho ma trận vuông  $A$  cỡ  $4 \times 4$

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

trong đó  $B, C, D$  là các ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$ . Tìm mối liên hệ giữa giá trị riêng của các ma trận  $A, B, C$  và  $D$ .

## 6.2 CHÉO HÓA MA TRẬN

### MA TRẬN ĐỒNG DẠNG

**ĐỊNH NGHĨA 6.2.1.** Cho  $A, B$  là hai ma trận vuông cùng cỡ. Ta nói  $A$  **đồng dạng** với  $B$  nếu

$$A = PBP^{-1}$$

với  $P$  là một ma trận khả nghịch nào đó.

Mệnh đề cho thấy rằng quan hệ đồng dạng của các ma trận là một quan hệ tương đương.

**MỆNH ĐỀ 6.2.2.** Cho  $A, B, C$  là các ma trận vuông cùng cỡ. Khi đó

- (a)  $A$  đồng dạng với  $A$ ,
- (b) Nếu  $A$  đồng dạng với  $B$  thì  $B$  cũng đồng dạng với  $A$ .
- (c) Nếu  $A$  đồng dạng với  $B$  và  $B$  đồng dạng với  $C$  thì  $A$  đồng dạng với  $C$ .

**CHỨNG MINH.** (a)  $A$  đồng dạng với  $A$  vì

$$A = IAI^{-1}.$$

(b) Nếu  $A$  đồng dạng với  $B$  thì tồn tại một ma trận khả nghịch  $P$  sao cho

$$A = PBP^{-1}.$$

Chuyển các ma trận  $P$  và  $P^{-1}$  từ vế phải sang vế trái, ta được

$$B = P^{-1}A(P^{-1})^{-1}.$$

Suy ra  $B$  đồng dạng với  $A$ .

(c) Nếu  $A$  đồng dạng với  $B$  và  $B$  đồng dạng với  $C$  thì tồn tại các ma trận khả nghịch  $P$  và  $Q$  sao cho

$$A = PBP^{-1}, \quad B = QCQ^{-1}.$$

Suy ra

$$A = PQCQ^{-1}P^{-1} = (PQ)C(PQ)^{-1}.$$

Do đó,  $A$  đồng dạng với  $C$ . □

Trong đa số các bài toán của đại số tuyến tính, ta không phân biệt hai ma trận đồng dạng với nhau.

**VÍ DỤ 6.2.3.** Chứng minh rằng hai ma trận đồng dạng với nhau có cùng định thức.

Để chứng minh kết quả này, ta sử dụng tính chất nhân của định thức, tức là

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

và hệ quả của nó về định thức của ma trận nghịch đảo

$$\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)}.$$

**GIẢI.** Giả sử hai ma trận  $A$  và  $B$  đồng dạng với nhau, tức là  $A = PBP^{-1}$  với một ma trận khả nghịch  $P$  nào đó. Sử dụng các tính chất nhân của định thức vừa nhắc lại bên trên, ta có

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(PBP^{-1}) = \det(P) \det(B) \det(P^{-1}) \\ &= \det(P) \det(B) \frac{1}{\det(P)} = \det(B). \end{aligned}$$

□

## BÀI TẬP

**6.40** [hint] Chứng minh rằng hai ma trận đồng dạng có cùng vết.

**6.41** [hint] Chứng minh rằng các cặp ma trận sau không đồng dạng với nhau.

(a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  và  $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ .

(b)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  và  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ .

## CHÉO HÓA MA TRẬN

**ĐỊNH NGHĨA 6.2.4.** Một ma trận vuông  $A$  được gọi là **chéo hóa được** nếu  $A$  đồng dạng với một ma trận chéo nào đó. Tức là, nếu ma trận  $A$  có phân tích

$$A = PDP^{-1}$$

trong đó  $D$  là một ma trận chéo và  $P$  là một ma trận khả nghịch.

## Bài toán chéo hóa ma trận

Bài toán chéo hóa một ma trận vuông  $A$  cho trước là bài toán:

1. Xác định xem ma trận  $A$  có chéo hóa được hay không.
2. Trong trường hợp  $A$  chéo hóa được, hãy chéo hóa ma trận  $A$ , tức là tìm phân tích  $A = PDP^{-1}$  với  $D$  chéo và  $P$  khả nghịch.

**ĐỊNH LÝ 6.2.5.** Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$ . Hai khẳng định sau đây tương đương với nhau.

- (a)  $A$  chéo hóa được.
- (b)  $\mathbb{R}^n$  có một cơ sở gồm toàn véctơ riêng của ma trận  $A$ .

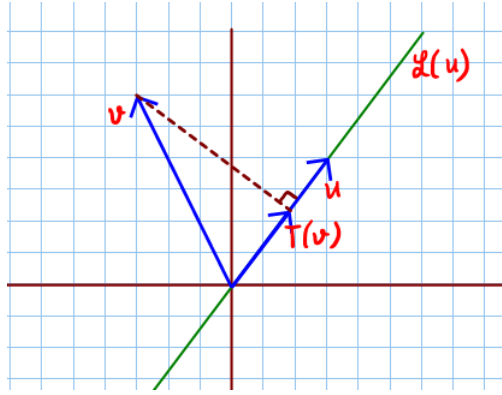
Cụ thể hơn, hệ véctơ  $v_1, v_2, \dots, v_n$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^n$  gồm toàn véctơ riêng của  $A$  và ứng với các giá trị riêng  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  khi và chỉ khi

$$A = PDP^{-1}$$

trong đó các ma trận khả nghịch  $P$  và ma trận chéo  $D$  lần lượt là

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

**VÍ DỤ 6.2.6.** Trong mặt phẳng Euclid  $\mathbb{R}^2$ , phép chiếu vuông góc lên một không gian con 1 chiều  $W = \mathcal{L}(u)$  có chéo hóa được hay không?



**GIẢI.** Phép chiếu vuông góc lên đường thẳng  $\mathcal{L}(u)$  có hai giá trị riêng là 0 và 1. Giả sử  $u = (a, b)$ .

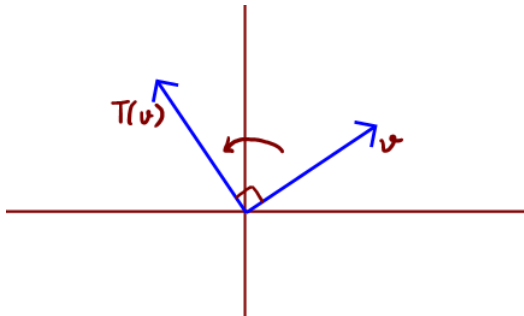
- ▷ Các vectơ riêng ứng với giá trị riêng  $\lambda = 1$  là các vectơ cùng phương với  $u = (a, b)$ .
- ▷ Các vectơ riêng ứng với giá trị riêng  $\lambda = 0$  là các vectơ vuông góc với  $u$ , tức là cùng phương với vectơ  $v = (-b, a)$ .

Vì hai vectơ riêng  $u = (a, b)$  và  $v = (-b, a)$  lập thành một cơ sở của  $\mathbb{R}^2$  nên phép chiếu vuông góc này là chéo hóa được. Hơn nữa, ma trận của  $T$  trong cơ sở  $u, v$  là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

□

**VÍ DỤ 6.2.7.** Trong mặt phẳng Euclid  $\mathbb{R}^2$ , phép quay góc  $90^\circ$  tâm tại gốc tọa độ có chéo hóa được hay không?



**CHỨNG MINH.** Phép quay này không có giá trị riêng, không có véctơ riêng, và do đó, nó không chéo hóa được.  $\square$

Để tạo ra một cơ sở của  $\mathbb{R}^n$  gồm toàn véctơ riêng của ma trận  $A$ , đầu tiên, với mỗi giá trị riêng của  $A$ , ta lấy một cơ sở của không gian con riêng tương ứng  $E_\lambda$ , rồi sau đó ghép lại các cơ sở này. Định lý sau cho thấy rằng hệ véctơ nhận được luôn là một hệ độc lập tuyến tính.

**ĐỊNH LÝ 6.2.8.** Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$ . Cho  $v_1, v_2, \dots, v_k$  là các véctơ riêng khác nhau của  $A$  ứng với các giá trị riêng đôi một khác nhau  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ . Khi đó, hệ véctơ  $v_1, v_2, \dots, v_k$  độc lập tuyến tính.

**ĐỊNH LÝ 6.2.9.** Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$ . Nếu  $A$  có  $n$  giá trị riêng phân biệt thì  $A$  chéo hóa được.

**CHỨNG MINH.** Giả sử ma trận  $A$  có  $n$  giá trị riêng phân biệt  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Với mỗi  $i = 1, 2, \dots, n$ , gọi  $v_i$  là một véctơ riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda_i$ .

Vì hệ véctơ  $v_1, v_2, \dots, v_n$  là một hệ gồm các véctơ riêng của  $A$  ứng với các giá trị riêng đôi một khác nhau nên hệ véctơ  $v_1, v_2, \dots, v_n$  độc lập tuyến tính.

Vì số phần tử của hệ véctơ độc lập tuyến tính  $v_1, v_2, \dots, v_n$  bằng đúng số chiều của không gian véctơ  $\mathbb{R}^n$  nên hệ véctơ  $v_1, v_2, \dots, v_n$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^n$ .

Do đó,  $\mathbb{R}^n$  có một cơ sở gồm toàn véctơ riêng của ma trận  $A$ . Vậy, ma trận  $A$  chéo hóa được.  $\square$

**ĐỊNH LÝ 6.2.10.** Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$ . Hai khẳng định sau đây tương đương với nhau.

- (a) Ma trận  $A$  chéo hóa được.
- (b) Ma trận  $A$  có đủ  $n$  giá trị riêng, tính cả bội đại số, và mỗi giá trị riêng của  $A$  có bội đại số bằng bội hình học.

## Thuật toán chéo hóa ma trận

Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$ . Để biết ma trận  $A$  có chéo hóa được hay không, và chéo hóa  $A$  khi nó chéo hóa được, ta làm như sau.

1. Bước 1. Tìm các giá trị riêng của  $A$  và bội đại số của chúng.
  - ▷ Nếu tổng các bội đại số của các giá trị riêng nhỏ hơn  $n$ , ta kết luận ma trận  $A$  không chéo hóa được.
  - ▷ Nếu ngược lại, tổng các bội đại số của các giá trị riêng bằng  $n$ , tiến hành bước tiếp theo.
2. Bước 2. Với mỗi giá trị riêng của  $A$ , tìm số chiều và một cơ sở cho không gian con riêng  $E_\lambda$ .
  - ▷ Nếu tồn tại một giá trị riêng có bội hình học nhỏ hơn bội đại số, ta kết luận ma trận  $A$  không chéo hóa được.
  - ▷ Nếu các giá trị riêng đều có bội hình học bằng bội đại số, ta kết luận ma trận  $A$  chéo hóa được. Trong trường hợp này, để chéo hóa  $A$ , tiến hành bước tiếp theo.
3. Bước 3. Ghép lại cơ sở của các không gian con riêng  $E_\lambda$  để được một cơ sở  $v_1, v_2, \dots, v_n$  của  $\mathbb{R}^n$  gồm toàn vectơ riêng của  $A$ ,  $v_i$  là vectơ riêng ứng với giá trị riêng  $\lambda_i$ . Khi đó

$$A = PDP^{-1}$$

trong đó

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

## Ví dụ 6.2.11. Chéo hóa ma trận vuông

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

**GIẢI.** Ta đã tìm các giá trị riêng và cơ sở cho mỗi không gian con riêng

của ma trận này trong ví dụ 6.1.25. Bảng các giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận này là

| Giá trị riêng                     | 1                                            | 2                                                                                       |
|-----------------------------------|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| Bội đại số                        | 1                                            | 2                                                                                       |
| Bội hình học                      | 1                                            | 2                                                                                       |
| Cơ sở của<br>không gian con riêng | $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ |

Vì  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $3 \times 3$ , tổng các bội đại số bằng 3, mỗi giá trị riêng có bội đại số bằng bội hình học, nên ma trận  $A$  chéo hóa được. Ma trận  $A$  có phân tích

$$A = PDP^{-1}$$

với ma trận khả nghịch  $P$  và ma trận chéo  $D$  lần lượt là

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

□

Ta có thể đổi chỗ cột của ma trận khả nghịch  $P$  trong ví dụ trên. Khi đó, các phần tử trên đường chéo của ma trận chéo  $D$  cũng phải được đổi chỗ tương ứng.

**VÍ DỤ 6.2.12.** Chứng minh rằng ma trận vuông

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

không chéo hóa được.

**GIẢI.** ▷ Vì  $A$  là một ma trận tam giác nên các giá trị riêng của  $A$  chính là các phần tử trên đường chéo của nó, với số lần lặp lại bằng đúng bội đại số. Do đó,  $A$  có hai giá trị riêng là  $\lambda = 1$  và  $\lambda = 2$  với các bội đại số lần lượt là 1 và 2.

Tiếp theo, ta xác bội hình học của mỗi giá trị riêng và một cơ sở cho mỗi không gian con riêng. Ta ưu tiên xét giá trị riêng  $\lambda = 2$  vì giá trị riêng  $\lambda = 1$  có bội đại số bằng 1 thì bội hình học của nó cũng phải là 1.

▷ Không gian con riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda = 2$  là  $E_2 = \text{Nul}(A - 2I)$ . Khử Gauss ma trận  $A - 2I$ :

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Suy ra, không gian con riêng  $E_2$  là một không gian véc tơ 1 chiều, tức là bội hình học của giá trị riêng  $\lambda = 2$  là 1.

Vì giá trị riêng  $\lambda = 2$  có bội hình học khác bội đại số, nên ma trận  $A$  không chéo hóa được.  $\square$

**VÍ DỤ 6.2.13.** Chứng minh rằng ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

chéo hóa được.

**GIẢI.** Vì ma trận  $A$  là một ma trận tam giác nên các giá trị riêng của  $A$  chính là các phần tử trên đường chéo của nó. Do đó, các giá trị riêng của  $A$  là  $-1, 3, 5, -2$ .

Vì ma trận vuông  $A$  cỡ  $4 \times 4$  có 4 giá trị riêng phân biệt nên  $A$  chéo hóa được.  $\square$

**VÍ DỤ 6.2.14.** Chứng minh rằng ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}.$$

chéo hóa được.

**GIẢI.** Ta đã tính các giá trị riêng của ma trận  $A$  trong ví dụ 6.1.14. Theo ví dụ này, ma trận vuông  $A$  cỡ  $3 \times 3$  có 3 giá trị riêng phân biệt là  $4, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$ . Do đó,  $A$  chéo hóa được.  $\square$

## BÀI TẬP

**6.42** [hint] Chéo hóa ma trận

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

**6.43** [hint] Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} d & 0 \\ a & d \end{bmatrix}.$$

- Tìm các giá trị riêng của  $A$  và bội đại số của nó.
- Tìm điều kiện cho  $a$  và  $d$  để ma trận  $A$  chéo hóa được.

### GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ VÉCTƠ RIÊNG CỦA LŨY THỪA CỦA MA TRẬN

**VÍ DỤ 6.2.15.** Cho  $\lambda$  là một giá trị riêng của ma trận  $A$ . Chứng minh rằng  $\lambda^2$  là một giá trị riêng của ma trận  $A^2$ . Ta có thể nói gì về các véctơ riêng tương ứng?

**GIẢI.** Gọi  $v$  là một véctơ riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda$ :

$$Av = \lambda v.$$

Ta có

$$A^2v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2v.$$

Do đó, vô hướng  $\lambda^2$  là một giá trị riêng của  $A$ . Hơn nữa, tính toán trên cho thấy rằng mỗi véctơ riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda$  đều là một giá trị riêng của  $A^2$  ứng với  $\lambda^2$ , tức là  $E_\lambda(A) \subset E_{\lambda^2}(A^2)$ .  $\square$

**MỆNH ĐỀ 6.2.16.** Cho  $\lambda$  là một giá trị riêng của một ma trận vuông  $A$ . Khi đó, với mọi số nguyên dương  $k$ , vô hướng  $\lambda$  cũng là một véctơ riêng của  $A^k$ . Hơn nữa  $E_\lambda(A) \subset E_{\lambda^k}(A^k)$ .

**CHỨNG MINH.** Ta chứng minh khẳng định bằng cách quy nạp theo số nguyên dương  $k$ .

Kết quả hiển nhiên đúng với  $k = 1$  vì  $A^1 = A$ . Giả sử khẳng định đúng với  $k = m$  với  $m$  là một số nguyên dương.

Gọi  $v$  là một vectơ riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda$ . Ta có

$$v \in E_\lambda(A) \subset E_{\lambda^m}(A^m).$$

Suy ra,  $v$  cũng là một vectơ riêng của  $A^m$  ứng với giá trị riêng  $\lambda^m$ . Do đó

$$A^{m+1}v = A(A^mv) = A(\lambda^mv) = \lambda^m(Av) = \lambda^m(\lambda v) = \lambda^{m+1}v.$$

Suy ra,  $\lambda^{m+1}$  là một giá trị riêng của  $A^{m+1}$ . Hơn nữa, mỗi vectơ riêng của  $A$  ứng với  $\lambda$  là một vectơ riêng của  $A^{m+1}$  ứng với  $\lambda^{m+1}$ , tức là  $E_\lambda(A) \subset E_{\lambda^{m+1}}(A^{m+1})$ . Điều này có nghĩa là khẳng định cần chứng minh đúng với  $k = m + 1$ .

Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định cần chứng minh đúng với mọi số nguyên dương  $k$ .  $\square$

**VÍ DỤ 6.2.17.** Tìm các giá trị riêng của ma trận  $A^7$  biết rằng

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}.$$

**GIẢI.** Theo ví dụ 6.1.14, ma trận  $A$  có 3 giá trị riêng phân biệt là  $4, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$ . Do đó

$$4^7, (2 + \sqrt{3})^7, (2 - \sqrt{3})^7$$

là các giá trị riêng của  $A^7$ . Ta nhận được 3 giá trị riêng phân biệt của  $A^7$ . Vì ma trận  $A^7$  là một ma trận vuông cỡ  $3 \times 3$  nên nó có tối đa 3 giá trị riêng, tính cả bội đại số. Do đó, ba giá trị riêng trên của  $A^7$  là tất cả các giá trị riêng của nó.  $\square$

## LŨY THỪA CỦA MA TRẬN CHÉO HÓA ĐƯỢC

Tính lũy thừa của ma trận là một bài toán quan trọng và phức tạp. Ta dễ dàng tính lũy thừa của ma trận chéo.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

**MỆNH ĐỀ 6.2.18.** Cho  $A$  và  $B$  là hai ma trận đồng dạng với nhau,  $A = PBP^{-1}$ . Khi đó

$$A^k = PB^kP^{-1}$$

với mọi số nguyên dương  $k$ . Đặc biệt, hai ma trận  $A^k$  và  $B^k$  đồng dạng với nhau.

**CHỨNG MINH.** Với  $k = 3$ , ta có

$$A^3 = AAA = (PBP^{-1})(PBP^{-1})(PBP^{-1}) = PB(P^{-1}P)B(P^{-1}P)BP^{-1} = A.$$

Tương tự, với số nguyên dương  $k$  bất kỳ, ta có

$$\begin{aligned} A^k &= \underbrace{AAA \cdots A}_{k \text{ lần } A} = \underbrace{(PBP^{-1})(PBP^{-1})(PBP^{-1}) \cdots (PBP^{-1})}_{k \text{ lần } A} \\ &= PB(P^{-1}P)B(P^{-1}P)B \cdots (P^{-1}P)BP^{-1} = PB^kP^{-1}. \end{aligned}$$

□

Mệnh đề trên chỉ ra rằng nếu ta có thể tính được lũy thừa của một ma trận  $A$  thì ta cũng có thể tính được lũy thừa của các ma trận đồng dạng với  $A$ . Vì ta dễ dàng tính lũy thừa của ma trận chéo, nên ta cũng có thể tính được lũy thừa của các ma trận chéo hóa được.

**Corollary 4.** Cho  $A$  là một ma trận chéo hóa được

$$A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Khi đó

$$A^k = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1}$$

với mọi số nguyên dương  $k$

**VÍ DỤ 6.2.19.** Tính lũy thừa  $A^{100}$  với

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

**GIẢI.** Ta đã chéo hóa ma trận  $A$  này trong ví dụ 6.2.11:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} A^{100} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2^{100} \\ 1 & 2^{100} & 0 \\ 1 & 0 & 2^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 - 2^{100} & 0 & 2 - 2^{101} \\ 2^{100} - 1 & 2^{100} & 2^{100} - 1 \\ 2^{100} - 1 & 0 & 2^{101} - 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

**VÍ DỤ 6.2.20.** Cho ma trận vuông

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tính lũy thừa  $A^n$ , với  $n$  là một số nguyên dương, biết  $A = PDP^{-1}$  trong đó

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**GIẢI.** Vì  $A = PDP^{-1}$  nên  $A^n = PD^nP^{-1}$ . Ta có

$$D^n = \begin{bmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

## BÀI TẬP

**6.44** [hint] Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Tìm một ma trận khả nghịch  $P$  và một ma trận chéo  $D$  thỏa mãn  $A = PDP^{-1}$ .
- Tính  $A^n$ , với  $n$  là một số nguyên dương.

**6.45** [hint] Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{bmatrix}.$$

Tính  $A^n$  với  $n$  là một số nguyên dương.

**6.46** [hint]

## BÀI TẬP TỔNG HỢP

**6.47** [hint] Chéo hóa ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

**6.48** [hint] Các ma trận sau đây có chéo hóa được hay không? Nếu chéo hóa được, hãy chéo hóa nó.

(a)  $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

**6.49** [hint] Phép đối xứng qua một không gian con 2 chiều trong không gian véc tơ Euclid  $\mathbb{R}^3$  có chéo hóa được hay không?

**6.50** [hint] Phép đối xứng qua một không gian con 1 chiều trong không gian véc tơ Euclid  $\mathbb{R}^3$  có chéo hóa được hay không?

**6.51** [hint] Phép chiếu vuông góc lên một không gian con 1 chiều trong không gian véc tơ Euclid  $\mathbb{R}^3$  có chéo hóa được hay không?

**6.52** [hint] Cho ma trận vuông

$$A = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ a & d & 0 \\ 0 & b & d \end{bmatrix}$$

trong đó  $a, b$  và  $d$  là các tham số thực.

- Tìm các giá trị riêng của  $A$  và bội hình học, bội đại số của nó.
- Biện luận các trường hợp có thể xảy ra cho bội hình học của các giá trị riêng. Trong mỗi trường hợp, cho biết ma trận  $A$  có chéo hóa được hay không?

**6.53** [hint] Tìm một ma trận vuông  $A$  cỡ  $6 \times 6$  có các giá trị riêng là  $2, -3, 5$ , các bội đại số tương ứng là  $1, 3, 2$  và các bội hình học của các giá trị riêng lần lượt là  $1, 2, 1$ .

**6.54** [hint] Tìm một ma trận  $A$  cùng với một giá trị riêng  $\lambda$  của  $A$  sao cho  $E_\lambda(A) \neq E_{\lambda^2}(A^2)$ .

**6.55** [hint] Giả sử ma trận  $A$  có đa thức đặc trưng là

$$-\lambda^3 - 5\lambda^2 - 3\lambda + 9.$$

- Tìm cỡ của ma trận  $A$ , các giá trị riêng của  $A$  và bội đại số của nó.
- Bội hình học của mỗi giá trị riêng có thể nhận những giá trị nào? Cho ví dụ minh họa về mỗi khả năng có thể, và cho biết ma trận  $A$  có chéo hóa được hay không?

**6.56** [hint] Đa thức đặc trưng của một ma trận  $A$  được cho bên dưới. Tìm cỡ của ma trận, các giá trị riêng và số chiều có thể của các không gian con riêng. Cho ví dụ về mỗi khả năng xảy ra và cho biết ma trận  $A$  có chéo hóa được hay không?

- $\lambda^2(\lambda^2 - 5\lambda - 6)$ .
- $-\lambda^3 - \lambda - 2$ .
- $-(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3)$ .
- $-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1$ .

**6.57** [hint] Cho các ma trận vuông cùng cỡ  $A, B$  và  $P$  với  $P$  khả nghịch thỏa mãn  $A = PBP^{-1}$ .

- Chứng minh  $A^n = PB^nP^{-1}$  với mọi số nguyên dương  $n$ .
- Cho  $f(\lambda)$  là một đa thức hệ số thực. Chứng minh  $f(A) = Pf(B)P^{-1}$ .
- Giả sử  $A$  khả nghịch. Chứng minh rằng
  - $B$  khả nghịch.
  - $A^{-1} = PB^{-1}P^{-1}$ .
  - $A^n = PB^nP^{-1}$  với mọi số nguyên âm  $n$ .

**6.58** [hint] Cho  $A$  và  $B$  là hai ma trận đồng dạng với nhau. Chứng minh các khẳng định sau.

- $A^n$  đồng dạng với  $B^n$  với mọi số nguyên dương  $n$ .

- (b)  $f(A)$  đồng dạng với  $f(B)$  với mọi đa thức hệ số thực  $f(\lambda)$ .  
 (c) Giả sử  $A$  khả nghịch. Khi đó  $A^n$  đồng dạng với  $B^n$  với mọi  $n$  nguyên âm.

**6.59** [hint] Cho  $A$  và  $B$  là hai ma trận đồng dạng với nhau,  $A = PBP^{-1}$ . Chứng minh các khẳng định sau.

- (a)  $x \in \text{Nul}(A) \Leftrightarrow P^{-1}x \in \text{Nul}(B)$ .  
 (b) Hai không gian vectơ  $\text{Nul}(A)$  và  $\text{Nul}(B)$  có cùng số chiều.  
 (c) Hai ma trận  $A$  và  $B$  có cùng hạng.

**6.60** [hint] Giả sử hai ma trận vuông  $A$  và  $B$  đồng dạng với nhau,  $A = PBP^{-1}$ . Chứng minh các khẳng định sau.

- (a)  $\det(A) = \det(B)$ .  
 (b)  $A - \lambda I = P(B - \lambda I)P^{-1}$ .  
 (c) Hai ma trận  $A$  và  $B$  có cùng đa thức đặc trưng.  
 (d) Hai ma trận  $A$  và  $B$  có cùng giá trị riêng, tính cả bội đại số.  
 (e) Các giá trị riêng chung của  $A$  và  $B$  có cùng bội hình học.

**6.61** [hint] Giả sử ma trận vuông  $A$  chéo hóa được.

- (a) Chứng minh rằng ma trận chuyển vị  $A^T$  cũng chéo hóa được.  
 (b) Chứng minh rằng  $A^T$  đồng dạng với  $A$ .

**6.62** [hint] Cho ví dụ về hai ma trận vuông  $A$  và  $B$  cỡ  $2 \times 2$  có cùng vết nhưng không đồng dạng với nhau.

**6.63** [hint] Chứng minh rằng nếu ma trận  $A$  chéo hóa được thì  $\text{rank}(A)$  là số các giá trị riêng khác không của  $A$ , tính cả bội đại số.

## ÔN TẬP CHƯƠNG 6

---

Chéo hóa ma trận trong các bài tập 6.64 đến 6.70.

**6.64** [hint] 
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

**6.65** [hint]  $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ -10 & -7 & -6 \end{bmatrix}.$

**6.66** [hint]  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -7 & -5 & -5 \end{bmatrix}.$

**6.67** [hint]  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$

**6.68** [hint]  $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$

**6.69** [hint]  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -6 & -6 & -5 \\ 10 & 11 & 10 \end{bmatrix}.$

**6.70** [hint]  $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -6 & -6 & -5 \end{bmatrix}.$

**6.71** [hint] Tìm một ma trận vuông  $A$  cỡ  $2 \times 2$  sao cho  $A$  có đúng một giá trị riêng là  $\lambda = 3$  và không gian con riêng tương ứng là  $E_3 = \mathcal{L}(u)$  với  $u = (2, -1)$ .

**6.72** [hint] Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $6 \times 6$ . Giả sử  $\det(A) < 0$ . Chứng minh rằng  $A$  có ít nhất một giá trị riêng dương.

**6.73** [hint] Tìm đa thức đặc trưng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

**6.74** [hint] Tìm một ma trận vuông cỡ  $4 \times 4$  không có giá trị riêng thực.

**6.75** [hint] Tìm một ma trận vuông cỡ  $4 \times 4$  có đúng 2 giá trị riêng thực.

**6.76** [hint] Tìm điều kiện cho các hằng số  $a, b, c$  để ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

chéo hóa được.

**6.77** [hint] Tìm điều kiện cho các hằng số  $a, b, c$  để ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

chéo hóa được.

**6.78** [hint] Tìm điều kiện cho các hằng số  $a, b, c$  để ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

chéo hóa được.

**6.79** [hint] Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận cỡ  $n \times n$

$$J_n(a) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \end{bmatrix}.$$

**6.80** [hint] Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Biết rằng ma trận  $A$  chéo hóa được, với  $A = PDP^{-1}$  với ma trận khả nghịch  $P$  và ma trận chéo  $D$  lần lượt là

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Chéo hóa các ma trận sau

(a)  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$

(b)  $\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}.$

**6.81** [hint] Cho ma trận vuông cỡ  $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Chứng minh rằng  $\lambda = 0$  là một giá trị riêng của  $A$ . Bội hình học của giá trị riêng  $\lambda = 1$  bằng bao nhiêu?
- (b) Tìm các giá trị riêng của ma trận  $A$  và các bội đại số, bội hình học của chúng.

**6.82** [hint] Cho ma trận vuông cỡ  $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{bmatrix}.$$

- (a) Tìm các giá trị riêng của ma trận  $A$  và các bội đại số, bội hình học của chúng.
- (b) Tính  $\det(A)$ .

## GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 6

**6.15.** Vì  $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  nên  $P_A(0) = \det(A)$ .

**6.17.** Nếu  $Av_1 = u_1, Av_2 = u_2, Av_3 = u_3$  với các  $v_i, u_i \in \mathbb{R}^3$  thì

$$A \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}.$$

Nếu ma trận  $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$  khả nghịch thì ta có thể tính  $A$  từ đẳng thức này.

**6.19.**  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . Tính  $P_A(\lambda)$  theo  $a, b, c, d$ . Với ý b) hãy tính tường minh vế trái của đẳng thức cần chứng minh.

**6.22.** Gọi  $x$  là một vectơ riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda$ , tức là  $Ax = \lambda x$ . Hãy tính  $A^2x$  và  $A^3x$ .

**6.23.** Gọi  $x$  là một vectơ riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda$ , tức là  $Ax = \lambda x$ . Dự đoán công thức của  $A^n x$  rồi chứng minh nó bằng quy nạp.

**6.24.** Gọi  $x$  là một vectơ riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda$ , tức là  $Ax = \lambda x$ . Tính  $f(A)x$ .

**6.25.** Để nhận được các giá trị riêng của các ma trận  $B, C$  và  $D$  từ các giá trị riêng của  $A$ , ta cần biểu thị mỗi ma trận  $B, C$  và  $D$  này qua ma trận  $A$ .

**6.28.** Gọi  $x$  là một vectơ riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda$ . Tính  $A^{-1}x$ .

**6.40.** Nếu  $A$  và  $B$  là hai ma trận vuông cùng cỡ thì  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ . Lưu ý rằng nói chung  $\text{tr}(AB) \neq \text{tr}(A) \text{tr}(B)$ .

**6.41.** Tính vết hoặc định thức của các cặp ma trận này.

**6.53.** Tìm ma trận  $A$  có dạng chéo khối với ba ma trận khối trên đường chéo là các ma trận

$$\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ a & -3 & 0 \\ 0 & b & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ c & 5 \end{bmatrix}$$

với  $a, b, c$  là các số thực nào đó.

**6.56.** Bội hình học của mỗi giá trị riêng nhỏ hơn hoặc bằng bội đại số của nó.

**6.61.** Sử dụng công thức chuyển vị của tích và của nghịch đảo

$$(AB)^T = B^T A^T, (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

Để chứng minh  $A$  và  $A^T$  đồng dạng với nhau, hãy chỉ ra  $A$  và  $A^T$  cùng đồng dạng với một ma trận chéo  $D$ .

**6.63.** Hai ma trận đồng dạng có cùng hạng. Hạng của ma trận chéo được tính thế nào?



# Không gian có tích vô hướng

Tích vô hướng Euclid trong  $\mathbb{R}^n$  là sự tổng quát hóa tự nhiên của tích vô hướng quen thuộc trong  $\mathbb{R}^2$  và  $\mathbb{R}^3$ . Trong chương này, chúng ta sẽ định nghĩa khái niệm tích vô hướng tổng quát trên một không gian véc tơ thực bất kỳ.

## 7.1 TÍCH VÔ HƯỚNG

### TÍCH VÔ HƯỚNG TỔNG QUÁT

Để định nghĩa tích vô hướng tổng quát, chúng ta sẽ lấy các tính chất cơ bản của của tích vô hướng Euclid trong  $\mathbb{R}^n$  làm tiên đề.

**ĐỊNH NGHĨA 7.1.1.** Một **tích vô hướng** trên một không gian véc tơ thực  $V$  là một ánh xạ

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

thỏa mãn các điều kiện sau đây, với mọi véc tơ  $u, v, w$  trong  $V$  và vô hướng  $k \in \mathbb{R}$ :

1. Đối xứng:  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
2. Cộng tính:  $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

3. Thuần nhất:  $\langle ku, v \rangle = k\langle u, v \rangle$

4. Xác định dương:  $\langle v, v \rangle \geq 0$  và  $\langle v, v \rangle = 0$  nếu và chỉ nếu  $v = 0$

Một không gian vectơ thực trang bị một tích vô hướng được gọi là một **không gian vectơ có tích vô hướng**, hoặc **không gian vectơ Euclid**.

**VÍ DỤ 7.1.2.** Tích vô hướng Euclid trên  $\mathbb{R}^n$  là một tích vô hướng theo định nghĩa bên trên. Tích vô hướng Euclid này còn lại là **tích vô hướng chính tắc** của  $\mathbb{R}^n$ :

$$\langle u, v \rangle = u \cdot v = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

với  $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  và  $v = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  là hai vectơ trong  $\mathbb{R}^n$ .

Nhắc lại rằng độ dài Euclid của một vectơ và khoảng cách Euclid giữa hai vectơ trong  $\mathbb{R}^n$  được định nghĩa thông qua tích vô hướng Euclid bởi công thức

$$|v| = \sqrt{v \cdot v}, \quad d(u, v) = |u - v| = \sqrt{(u - v) \cdot (u - v)}.$$

Ta định nghĩa độ dài và khoảng cách trong một không gian có tích vô hướng bất kỳ.

**ĐỊNH NGHĨA 7.1.3.** Cho  $V$  là một không gian vectơ có tích vô hướng.

▷ **Độ dài** của một vectơ  $v$  trong  $V$ , kí hiệu là  $|v|$ , được định nghĩa bởi

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

▷ Vectơ có độ dài bằng 1 được gọi là vectơ **đơn vị**.

▷ **Khoảng cách** giữa hai vectơ  $u, v$  trong  $V$ , kí hiệu  $d(u, v)$ , được định nghĩa bởi

$$d(u, v) = |u - v| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}.$$

Vì  $\langle v, v \rangle \geq 0$  với mọi vectơ  $v$  trong không gian có tích vô hướng  $V$  nên luôn tồn tại độ dài của vectơ  $v$ .

Trong định nghĩa trên, độ dài và khoảng cách phụ thuộc vào tích vô hướng của không gian vectơ. Nếu tích vô hướng thay đổi, độ dài và khoảng cách

cũng thay đổi theo.

Sau đây là một số tính chất cơ bản của độ dài và khoảng cách trong không gian có tích vô hướng.

**MỆNH ĐỀ 7.1.4.** Cho  $V$  là một không gian vectơ có tích vô hướng. Cho  $u, v$  là các vectơ trong  $V$  và  $k$  là một vô hướng. Khi đó

- (a)  $|v| \geq 0$  và  $|v| = 0$  khi và chỉ khi  $v = 0$ .
- (b)  $|kv| = |k||v|$
- (c)  $d(u, v) = d(v, u)$
- (d)  $d(u, v) \geq 0$  và  $d(u, v) = 0$  khi và chỉ khi  $u = v$ .

**CHỨNG MINH.** (a) Theo định nghĩa

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Do đó,  $|v| \geq 0$  với mọi vectơ  $v$ . Hơn nữa,  $|v| = 0$  khi và chỉ khi  $\langle v, v \rangle = 0$ . Theo định nghĩa của tích vô hướng, đẳng thức  $\langle v, v \rangle = 0$  có nghĩa là  $v = 0$ .

(b) Ta có

$$|kv| = \sqrt{\langle kv, kv \rangle} = \sqrt{k^2 \langle v, v \rangle} = |k| \sqrt{\langle v, v \rangle} = |k| |v|.$$

(c) Ta có

$$d(u, v) = |u - v| = |(-1)(v - u)| = |-1| |v - u| = d(v, u).$$

(d) Ta có

$$d(u, v) = |u - v| \geq 0.$$

Hơn nữa

$$d(u, v) = 0 \Leftrightarrow |u - v| = 0 \Leftrightarrow u - v = 0 \Leftrightarrow u = v.$$

□

**ĐỊNH NGHĨA 7.1.5.** *Mặt cầu đơn vị* trong không gian vectơ có tích vô hướng  $V$  là tập con của  $V$  bao gồm các vectơ có độ dài bằng 1:

$$\{v \in V : |v| = 1\}.$$

Nếu  $V = \mathbb{R}^2$  thì mặt cầu đơn vị còn được gọi là *đường tròn đơn vị*.

*vị.*

**7.1** [hint] Khai triển các biểu thức sau

- (a)  $\langle 5u_1 - 7u_2, 8v_1 + 6v_2 \rangle$ ,
- (b)  $\langle u - 4v, 5u + 2v \rangle$ ,
- (c)  $|3u - 2v|^2$ .

**7.2** [hint] Cho  $V$  là một không gian vectơ thực được trang bị một tích vô hướng. Giả sử các vectơ  $u, v, w$  trong  $V$  thỏa mãn

$$\langle u, v \rangle = 2, \quad \langle u, w \rangle = -3, \quad \langle v, w \rangle = 4$$

$$|u| = 1, \quad |v| = 2, \quad |w| = 3.$$

Tính giá trị các biểu thức

- (a)  $\langle 2u - v, v + w \rangle$
- (b)  $|2v - w|$
- (c)  $d(u, v)$ .

## TÍCH VÔ HƯỚNG TRÊN $\mathbb{R}^n$

**VÍ DỤ 7.1.6.** Cho  $w_1, w_2, \dots, w_n$  là các số thực dương. Chứng minh rằng công thức

$$\langle u, v \rangle = w_1 a_1 b_1 + w_2 a_2 b_2 + \dots + w_n a_n b_n$$

với các vectơ  $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  và  $v = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  trong  $\mathbb{R}^n$ , là một tích vô hướng trên  $\mathbb{R}^n$ . Tích vô hướng này của  $\mathbb{R}^n$  được gọi là **tích vô hướng Euclid có trọng số** với dãy trọng số là  $w_1, w_2, \dots, w_n$ .

**CHỨNG MINH.** Ta cần phải chứng minh hàm  $\langle u, v \rangle$  định nghĩa bên trên thỏa mãn các tiên đề định tích vô hướng. Chứng minh được tiến hành gần như giống hệt trường hợp tích vô hướng Euclid thông thường.

Đặt  $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $v = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  và  $w = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  là các vectơ trong  $\mathbb{R}^n$  và  $k \in \mathbb{R}$ .

(a) Chứng minh tính đối xứng:  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ . Sử dụng tính chất giao hoán của phép nhân các số, ta có

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle &= w_1 a_1 b_1 + w_2 a_2 b_2 + \cdots + w_n a_n b_n \\ &= w_1 b_1 a_1 + w_2 b_2 a_2 + \cdots + w_n b_n a_n \\ &= \langle v, u \rangle.\end{aligned}$$

(b) Chứng minh tính cộng tính:  $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ . Ta có

$$v + w = (b_1 + c_1, b_2 + c_2, \dots, b_n + c_n).$$

Sử dụng tính chất phân phối giữa hai phép toán cộng và nhân, ta có

$$\begin{aligned}\langle u, v + w \rangle &= w_1 a_1 (b_1 + c_1) + w_2 a_2 (b_2 + c_2) + \cdots + w_n a_n (b_n + c_n) \\ &= (w_1 a_1 b_1 + w_1 a_1 c_1) + (w_2 a_2 b_2 + w_2 a_2 c_2) + \cdots \\ &\quad + (w_n a_n b_n + w_n a_n c_n) \\ &= (w_1 a_1 b_1 + w_2 a_2 b_2 + \cdots + w_n a_n b_n) \\ &\quad + (w_1 a_1 c_1 + w_2 a_2 c_2 + \cdots + w_n a_n c_n) \\ &= \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle.\end{aligned}$$

(c) Chứng minh tính thuần nhất:  $k \langle u, v \rangle = \langle ku, v \rangle$ . Ta có

$$\begin{aligned}k \langle u, v \rangle &= k (w_1 a_1 b_1 + w_2 a_2 b_2 + \cdots + w_n a_n b_n) \\ &= w_1 (ka_1) b_1 + w_2 (ka_2) b_2 + \cdots + w_n (ka_n) b_n \\ &= \langle ku, v \rangle\end{aligned}$$

(d) Chứng minh tính xác định dương:  $\langle v, v \rangle \geq 0$  và  $\langle v, v \rangle = 0$  khi và chỉ khi  $v = 0$ . Ta có

$$\langle v, v \rangle = w_1 b_1^2 + w_2 b_2^2 + \cdots + w_n b_n^2.$$

Vì  $w_i > 0$  và  $b_i^2 \geq 0$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, n$  nên  $v \cdot v \geq 0$ , hơn nữa,  $v \cdot v = 0$  khi và chỉ khi  $b_i = 0$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, n$ , tức là  $v = 0$ .  $\square$

Từ chứng minh trên, ta thấy rằng nếu không có điều kiện  $w_i > 0$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, n$  thì ba tiên đề đầu tiên của tích vô hướng vẫn đúng.

Tích vô hướng Euclid của  $\mathbb{R}^n$  là trường hợp riêng của tích vô hướng Euclid với trọng số, với dãy trọng số là  $1, 1, \dots, 1$ . Đối với tích vô hướng Euclid của  $\mathbb{R}^n$ , sự đóng góp của các thành phần của các vectơ vào tích vô hướng là như nhau. Còn đối với tích vô hướng Euclid với trọng, sự đóng góp của mỗi thành phần của các vectơ vào tích vô hướng phụ thuộc vào các trọng số.

**VÍ DỤ 7.1.7.** Trong không gian vectơ  $\mathbb{R}^2$ , cho các vectơ

$$e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (0, 1).$$

Tính độ dài của vectơ  $e_1, e_2$  và khoảng cách giữa hai vectơ  $e_1, e_2$  đối với

- (a) tích vô hướng Euclid của  $\mathbb{R}^2$ ,
- (b) tích vô hướng Euclid có trọng số của  $\mathbb{R}^2$  với dãy trọng số là 3, 2.

**GIẢI.** (a) Tích vô hướng Euclid của  $\mathbb{R}^2$  là

$$(a_1, a_1) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Suy ra

$$|e_1| = \sqrt{e_1 \cdot e_1} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1,$$

$$|e_2| = \sqrt{e_2 \cdot e_2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1,$$

và

$$d(e_1, e_2) = |e_1 - e_2| = |(1, -1)| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

(b) Tích vô hướng Euclid có trọng số của  $\mathbb{R}^2$  với dãy trọng số 3, 2 là

$$\langle (a_1, a_1), (b_1, b_2) \rangle = 3a_1 b_1 + 2a_2 b_2.$$

Suy ra

$$|e_1| = \sqrt{\langle e_1, e_1 \rangle} = \sqrt{3(1)^2 + 2(0)^2} = \sqrt{3},$$

$$|e_2| = \sqrt{\langle e_2, e_2 \rangle} = \sqrt{3(0)^2 + 2(1)^2} = \sqrt{2},$$

và

$$d(e_1, e_2) = |e_1 - e_2| = |(1, -1)| = \sqrt{3(1)^2 + 2(-1)^2} = \sqrt{5}.$$

□

**VÍ DỤ 7.1.8.** Cho không gian vectơ  $\mathbb{R}^3$  trang bị tích vô hướng Euclid với trọng số

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 4x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + \frac{1}{2} x_3 y_3.$$

Cho các vectơ

$$u = (-1, 1, 0), \quad v = (2, 1, -4), \quad w = (-1, 2, 5).$$

Tính

$$\langle u, v \rangle, \quad \langle u + v, w \rangle, \quad |v|, \quad d(u, v).$$

**GIẢI.** Ta có

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \langle (1, -1, 0), (2, 1, -4) \rangle \\ &= 4(1)(2) + 3(-1)(1) + \frac{1}{2}(0)(-4) \\ &= 5. \end{aligned}$$

Vì  $u + v = (1, -1, 0) + (2, 1, -4) = (3, 0, -4)$  nên

$$\begin{aligned} \langle u + v, w \rangle &= \langle (3, 0, -4), (-1, 2, 5) \rangle \\ &= 4(3)(-1) + 3(0)(2) + \frac{1}{2}(-4)(5) \\ &= -22. \end{aligned}$$

Ta có  $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ ,

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle &= \langle (2, 1, -4), (2, 1, -4) \rangle \\ &= 4(2)^2 + 3(1)^2 + \frac{1}{2}(-4)^2 \\ &= 27 \end{aligned}$$

Suy ra  $|v| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ . Ta có

$$d(u, w) = |u - w| = \sqrt{\langle u - w, u - w \rangle},$$

$$\begin{aligned} u - w &= (1, -1, 0) - (-1, 2, 5) \\ &= (2, -3, 5) \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} \langle u - w, u - w \rangle &= \langle (2, -3, 5), (2, -3, 5) \rangle \\ &= 4(2)^2 + 3(-3)^2 + \frac{1}{2}(-5)^2 \\ &= \frac{111}{2} \end{aligned}$$

Suy ra  $d(u, w) = \sqrt{\frac{111}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{222}$ . □

**VÍ DỤ 7.1.9.** Cho  $A \in M_{n \times n}$  là một ma trận vuông khả nghịch. Chứng minh rằng công thức

$$\langle u, v \rangle = (Au) \cdot (Av)$$

với  $u, v \in \mathbb{R}^n$  là một tích vô hướng trên  $\mathbb{R}^n$ . Tích vô hướng này được gọi là **tích vô hướng ma trận**, ứng với ma trận  $A$ .

**GIẢI.** Cho  $u, v, w$  là các vectơ trong  $\mathbb{R}^n$  và  $k \in \mathbb{R}$ .

(a) Chúng minh tính đối xứng:  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ . Ta có

$$\langle u, v \rangle = (Au) \cdot (Av) = (Av) \cdot (Au) = \langle v, u \rangle.$$

(b) Chúng minh tính cộng tính:  $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ . Ta có

$$\begin{aligned} \langle u, v + w \rangle &= (Au) \cdot (A(v + w)) = (Au) \cdot (Av + Aw) \\ &= (Au) \cdot (Av) + (Au) \cdot (Aw) = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle. \end{aligned}$$

(c) Chúng minh tính thuần nhất:  $k \langle u, v \rangle = \langle ku, v \rangle$ . Ta có

$$k \langle u, v \rangle = k((Au) \cdot (Av)) = (kAu) \cdot (Av) = (A(ku)) \cdot (Av) = \langle ku, v \rangle.$$

(d) Chúng minh tính xác định dương:  $\langle v, v \rangle \geq 0$  và  $\langle v, v \rangle = 0$  khi và chỉ khi  $v = 0$ . Ta có

$$\langle v, v \rangle = (Av) \cdot (Av) \geq 0.$$

Hơn nữa,  $\langle v, v \rangle = 0$  khi và chỉ khi  $(Av) \cdot (Av) = 0$ , tức là  $Av = 0$ . Vì  $A$  là một ma trận khả nghịch nên đẳng thức  $Av = 0$  tương đương với  $v = 0$ .  $\square$

Lưu ý rằng nếu  $A$  là một ma trận bất kỳ thì ba tiên đề đầu tiên vẫn thỏa mãn.

**VÍ DỤ 7.1.10.** Trong không gian vectơ  $\mathbb{R}^2$ , cho các vectơ

$$e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (0, 1).$$

Tính độ dài của vectơ  $e_1, e_2$  và khoảng cách giữa hai vectơ  $e_1, e_2$  đối với tích vô hướng ma trận ứng với ma trận khả nghịch

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

**GIẢI.** Theo định nghĩa, tích vô hướng ma trận ứng với ma trận  $A$  là

$$\langle u, v \rangle = (Au) \cdot (Av)$$

với mọi  $u, v \in \mathbb{R}^2$ . Suy ra

$$\begin{aligned}|e_1| &= \sqrt{\langle e_1, e_1 \rangle} = \sqrt{(Ae_1) \cdot (Ae_1)} = \sqrt{(1, 3) \cdot (1, 3)} = \sqrt{10}, \\|e_2| &= \sqrt{\langle e_2, e_2 \rangle} = \sqrt{(Ae_2) \cdot (Ae_2)} = \sqrt{(2, 4) \cdot (2, 4)} = 2\sqrt{5},\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}d(e_1, e_2) &= \sqrt{\langle e_1 - e_2, e_1 - e_2 \rangle} = \sqrt{\langle (1, -1), (1, -1) \rangle} \\&= \sqrt{\left(A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) \cdot \left(A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)} \\&= \sqrt{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

□

**VÍ DỤ 7.1.11.** Chứng minh rằng tích vô hướng Euclid và tích vô hướng Euclid có trọng số là các trường hợp riêng của tích vô hướng ma trận.

**GIẢI.** Tích vô hướng Euclid trong  $\mathbb{R}^n$  là tích vô hướng ma trận ứng với ma trận đơn vị  $I$ .

Tích vô hướng Euclid có trọng số trên  $\mathbb{R}^n$  với dãy trọng số  $w_1, w_2, \dots, w_n$  là tích vô hướng ma trận ứng với ma trận chéo

$$\begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{w_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \sqrt{w_n} \end{bmatrix}$$

□

## BÀI TẬP

**7.3** [hint] Cho không gian véc tơ  $\mathbb{R}^4$  trang bị tích vô hướng Euclid với trọng

$$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3 + 4x_4 y_4$$

và các vectơ

$$u = (1, 0, 2, -1), v = (-1, 1, 3, 2).$$

Tính

$$\langle u, v \rangle, |u + 2v|, d(u, v).$$

- 7.4** [hint] Cho không gian vectơ  $\mathbb{R}^2$  trang bị tích vô hướng sinh ra từ ma trận khả nghịch

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Cho các vectơ  $u = (1, 3), v = (-2, 0)$ . Tính

$$\langle u, v \rangle, |u - v|, d(u, v).$$

- 7.5** [hint] Cho không gian vectơ  $\mathbb{R}^3$  trang bị tích vô hướng sinh ra từ ma trận khả nghịch

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cho các vectơ  $u = (1, 2, 3), v = (-2, 1, 0)$ . Tính

$$\langle u, v \rangle, |u - v|, d(u + v, v).$$

- 7.6** [hint] Chứng minh rằng ánh xạ cho tương ứng mỗi cặp vectơ  $u = (x_1, x_2)$  và  $v = (y_1, y_2)$  trong  $\mathbb{R}^2$  với

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

không phải là một tích vô hướng trên  $\mathbb{R}^2$ .

- 7.7** [hint] Chứng minh rằng ánh xạ cho tương ứng mỗi cặp vectơ  $u = (x_1, x_2)$  và  $v = (y_1, y_2)$  trong  $\mathbb{R}^2$  với

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 + x_2 y_2$$

không phải là một tích vô hướng trên  $\mathbb{R}^2$ .

- 7.8** [hint] Chứng minh rằng ánh xạ cho tương ứng mỗi cặp vectơ  $u = (x_1, x_2)$  và  $v = (y_1, y_2)$  trong  $\mathbb{R}^2$  với

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_2$$

không phải là một tích vô hướng trên  $\mathbb{R}^2$ .

**7.9** [hint] Chứng minh rằng ánh xạ cho tương ứng mỗi cặp véc tơ  $u = (x_1, x_2)$  và  $v = (y_1, y_2)$  trong  $\mathbb{R}^2$  với

$$\langle u, v \rangle = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$$

không phải là một tích vô hướng trên  $\mathbb{R}^2$ .

### TÍCH VÔ HƯỚNG TRÊN KHÔNG GIAN VÉCTƠ TỔNG QUÁT

Bằng cách cố định một cơ sở  $\mathcal{B}$  của không gian véc tơ  $n$  chiều  $V$ , ánh xạ tọa độ

$$[\ ]_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

cho phép ta đồng nhất mỗi véc tơ  $v \in V$  với véc tơ tọa độ  $[v]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$  của nó. Nhờ đó, ta có thể dịch chuyển tích vô hướng trên  $\mathbb{R}^n$  thành tích vô hướng trên  $V$ .

**VÍ DỤ 7.1.12.** Cho  $V$  là một không gian véc tơ và  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  là một cơ sở của  $V$ . Chứng minh rằng công thức

$$\langle u, v \rangle = [u]_{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$$

với mọi  $u, v$  trong  $V$ , là một tích vô hướng trên  $V$ . Ta gọi tích vô hướng này trên  $V$  là tích vô hướng sinh ra từ cơ sở  $\mathcal{B}$ .

**VÍ DỤ 7.1.13.** Chứng minh rằng công thức

$$\langle A, B \rangle = \text{tr} \left( A^T B \right)$$

với mọi  $A, B$  trong  $M_{m \times n}$ , là một tích vô hướng trên  $M_{m \times n}$ . Tích vô hướng này được gọi là tích vô hướng chính tắc trên  $M_{m \times n}$ .

**GIẢI.** Giả sử  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  và  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ . Khi đó ma trận  $A^T B$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$  với phần tử ở vị trí  $(j, j)$  là

$$a_{1j}b_{1j} + a_{2j}b_{2j} + \dots + a_{mj}b_{mj} = \sum_{i=1}^m a_{ij}b_{ij}.$$

Suy ra

$$\langle A, B \rangle = \text{tr} \left( A^T B \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}b_{ij}.$$

Ta chứng minh công thức  $\langle A, B \rangle$  là một tích vô hướng trên  $M_{m \times n}$  bằng cách chỉ ra rằng nó là tích vô hướng sinh ra từ một cơ sở của  $M_{m \times n}$ .

Thật vậy, gọi  $\mathcal{S} = (E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{m1}, E_{m2}, \dots, E_{mn})$  là cơ sở chính tắc của  $M_{m \times n}$ . Khi đó, vectơ tọa độ của ma trận  $A$  đối với cơ sở  $\mathcal{S}$  là

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}).$$

Ta có công thức tương tự cho vectơ tọa độ của ma trận  $B$  đối với cơ sở  $\mathcal{S}$ . Do đó

$$\langle A, B \rangle = [A]_{\mathcal{S}} \cdot [B]_{\mathcal{S}}.$$

Suy ra, công thức  $\langle A, B \rangle$  là một tích vô hướng trên  $M_{m \times n}$ . □

**VÍ DỤ 7.1.14.**  $\triangleright$  Tích vô hướng chính tắc trên không gian vectơ  $\mathcal{P}_n$  là

$$\langle p(x), q(x) \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

với  $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$  và  $q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$ . Vì vectơ  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  chính là tọa độ của  $p(x)$  trong cơ sở chính tắc

$$1, x, x^2, \dots, x^n$$

của  $\mathcal{P}_n$ , tương tự,  $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  là tọa độ của  $q(x)$  trong cơ sở chính tắc của  $\mathcal{P}_n$  nên tích vô hướng chính tắc  $\langle p(x), q(x) \rangle$  chính là tích vô hướng Euclid của các vectơ tọa độ của  $p(x)$  và  $q(x)$  trong cơ sở chính tắc  $\mathcal{P}_n$ .

$\triangleright$  Với mỗi bộ  $(n+1)$  số thực phân biệt  $x_0, x_1, \dots, x_n$  sinh ra một tích vô hướng trên  $\mathcal{P}_n$  như sau

$\triangleright$

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(x_0)q(x_0) + p(x_1)q(x_1) + \dots + p(x_n)q(x_n).$$

Chú ý rằng về phải chính là tích vô hướng Euclid của các vectơ

$\triangleright$

$$(p(x_0), p(x_1), \dots, p(x_n)), (q(x_0), q(x_1), \dots, q(x_n))$$

trong  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

$\triangleright$  Trên không gian vectơ  $\mathcal{P}_n$ , ta còn có thể trang bị tích vô hướng sử dụng tích phân trên một đoạn hữu hạn  $[a, b]$  bất kỳ

▷

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_a^b p(x)q(x)dx.$$

**VÍ DỤ 7.1.15.** Cho không gian vectơ  $M_{2 \times 2}$  trang bị tích vô hướng chính tắc. Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tính

$$\langle A, B \rangle, d(A, B).$$

**GIẢI.** Theo định nghĩa  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ . Ta có

$$A^T B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 13 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}.$$

Suy ra  $\langle A, B \rangle = 1 + 2 = 3$ . Theo định nghĩa  $d(A, B) = |A - B| = \sqrt{\langle A - B, A - B \rangle}$ . Ta có

$$A - B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, \langle A - B, A - B \rangle = 99.$$

Do đó  $d(A, B) = |A - B| = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}$ . □

**VÍ DỤ 7.1.16.** Cho không gian vectơ  $\mathcal{P}_2$  trang bị tích vô hướng chính tắc. Cho các đa thức

$$p(x) = 3 + x - 2x^2, q(x) = -1 - 2x + 5x^2.$$

Tính

$$\langle p(x), q(x) \rangle, |p(x)|, d(p(x), q(x)).$$

## BÀI TẬP

**7.10 [hint]** Cho không gian vectơ  $\mathcal{P}_3$  trang bị tích vô hướng tính giá trị tại các điểm 1, 0, 2, 3. Cho hai đa thức

$$p(x) = 1 + x - x^3, q(x) = x + x^2.$$

Tính

$$\langle p(x), q(x) \rangle, d(p(x), q(x)).$$

**7.11** [hint] Cho không gian vec tơ  $\mathcal{P}_2$  trang bị tích vô hướng

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx.$$

Cho các đa thức

$$p(x) = 1 - x + 2x^2, q(x) = 3 + x.$$

Tính

$$\langle p(x), q(x) \rangle, |p(x)|, d(p(x), q(x)).$$

**7.12** [hint] Cho không gian vectơ  $M_{2 \times 3}$  với tích vô hướng chính tắc. Cho

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tính

$$|A|, d(A, B).$$

## GÓC VÀ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN CÓ TÍCH VÔ HƯỚNG

**ĐỊNH LÝ 7.1.17 (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz).** Cho  $u$  và  $v$  là các vectơ trong một không gian có tích vô hướng. Khi đó

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u| |v|. \quad (1)$$

**CHỨNG MINH.** Nếu  $u = 0$  thì  $|\langle u, v \rangle| = 0, |u| |v| = 0$ . Do đó  $|\langle u, v \rangle| = |u| |v|$ .

Bây giờ giả sử  $u \neq 0$ . Với mọi  $t$ , ta có

$$\langle tu + v, tu + v \rangle \geq 0.$$

Mặt khác

$$\langle tu + v, tu + v \rangle = \langle u, u \rangle t^2 + 2 \langle u, v \rangle t + \langle v, v \rangle.$$

Vì  $u \neq 0$  nên  $\langle u, u \rangle \neq 0$ . Do đó, tam thức bậc hai  $\langle u, u \rangle t^2 + 2 \langle u, v \rangle t + \langle v, v \rangle$  luôn lớn hơn hoặc bằng không với mọi  $t \in \mathbb{R}$ . Điều này có nghĩa là biệt thức của nó nhỏ hơn hoặc bằng không. Ta được

$$4 \langle u, v \rangle^2 - 4 \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \leq 0.$$

Khai căn bậc hai cả hai vế, ta được

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u| |v|.$$

□

**VÍ DỤ 7.1.18.** Nêu một số trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

Góc Euclid giữa hai vectơ khác không  $u$  và  $v$  trong  $\mathbb{R}^n$  đã được định nghĩa bởi công thức

$$\angle(u, v) = \cos^{-1} \left( \frac{u \cdot v}{|u| |v|} \right).$$

Thay tích vô hướng Euclid bởi tích vô hướng tổng quát, ta có định nghĩa góc sau đây.

**ĐỊNH NGHĨA 7.1.19.** Trong một không gian có tích vô hướng, **góc** giữa hai vectơ khác không  $u$  và  $v$  là

$$\angle(u, v) = \cos^{-1} \left( \frac{\langle u, v \rangle}{|u| |v|} \right).$$

**VÍ DỤ 7.1.20.** Trong không gian vectơ  $M_{2 \times 2}$  với tích vô hướng chính tắc, tính cos của góc giữa hai vectơ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

**GIẢI.** Ta có

$$\langle A, B \rangle = 16, \quad |A| = \sqrt{30}, \quad |B| = \sqrt{14}.$$

Do đó

$$\cos \angle(A, B) = \frac{\langle A, B \rangle}{|A| |B|} = \frac{16}{\sqrt{30} \sqrt{14}} = \frac{8}{\sqrt{105}}.$$

□

**MỆNH ĐỀ 7.1.21.** Cho  $u, v, w$  là các vectơ trong một không gian có tích vô hướng  $V$ . Ta có

1.  $|u + v| \leq |u| + |v|$ .
2.  $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ .

**CHỨNG MINH.** (a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$|u + v|^2 \leq (|u| + |v|)^2.$$

Ta có

$$\begin{aligned} |u + v|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= |u|^2 + 2\langle u, v \rangle + |v|^2 \\ &\leq |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2 && \text{(Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz)} \\ &= (|u| + |v|)^2. \end{aligned}$$

(b) Ta có

$$\begin{aligned} d(u, v) &= |u - v| = |(u - w) + (w - v)| \\ &\leq |u - w| + |w - v| = d(u, w) + d(w, v). \end{aligned}$$

□

**ĐỊNH NGHĨA 7.1.22.** Ta nói rằng hai vectơ  $u, v$  trong không gian có tích vô hướng  $V$  là **vuông góc với nhau**, ký hiệu  $u \perp v$ , nếu  $\langle u, v \rangle = 0$ .

Nếu hai vectơ  $u, v$  khác không thì tồn tại góc  $\angle(u, v)$  giữa chúng và khi đó

$$u \perp v \Leftrightarrow \angle(u, v) = \frac{\pi}{2}.$$

Trong trường hợp  $u = 0$  hoặc  $v = 0$ , ta luôn có  $\langle u, v \rangle = 0$ , suy ra  $u \perp v$ . Tuy nhiên, lúc này, ta không định nghĩa góc giữa  $u$  và  $v$ .

**VÍ DỤ 7.1.23.** Trong không gian vectơ  $\mathbb{R}^2$ , cho hai vectơ

$$u = (1, 1), \quad v = (1, -1).$$

Chứng minh các khẳng định sau.

- (a)  $u$  vuông góc với  $v$  đối với tích vô hướng Euclid.
- (b)  $u$  không vuông góc với  $v$  đối với tích vô hướng Euclid có trọng với dãy trọng số  $3, 2$ .

**GIẢI.** (a) Sử dụng tích vô hướng Euclid, ta có

$$u \cdot v = (1, 1) \cdot (1, -1) = (1)(1) + (1)(-1) = 0.$$

Suy ra,  $u$  vuông góc với  $v$ .

(b) Sử dụng tích vô hướng Euclid có trọng với dãy trọng số  $3, 2$ , ta có

$$\langle u, v \rangle = \langle (1, 1), (1, -1) \rangle = 3(1)(1) + 2(1)(-1) = 1 \neq 0.$$

Do đó,  $u$  không vuông góc với  $v$ . □

**VÍ DỤ 7.1.24.** Trong không gian vectơ  $M_{2 \times 2}$  trang bị tích vô hướng chính tắc, hai ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vuông góc với nhau vì

$$\langle A, B \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0.$$

**VÍ DỤ 7.1.25.** Trong không gian vectơ  $\mathcal{P}_2$  trang bị tích vô hướng tích phân

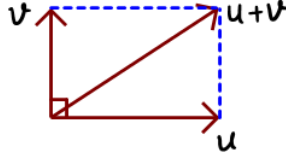
$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x) q(x) dx,$$

hai đa thức  $p = x$  và  $q = x^2$  vuông góc với nhau vì

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 x x^2 dx = \int_{-1}^1 x^3 dx = \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = 0.$$

**ĐỊNH LÝ 7.1.26 (Định lý Pythagoras tổng quát).** Cho  $u$  và  $v$  là hai vectơ vuông góc với nhau trong một không gian có tích vô hướng  $V$ . Khi đó

$$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2.$$



**CHỨNG MINH.** Vì  $u \perp v$  nên  $\langle u, v \rangle = 0$ . Do đó

$$\begin{aligned} |u + v|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= |u|^2 + |v|^2. \end{aligned}$$

□

## BÀI TẬP

**7.13 [hint]** Cho không gian vectơ  $\mathcal{P}_4$  trang bị tích vô hướng chính tắc. Tính  $\cos$  của góc giữa hai đa thức

$$p = 1 + 4x + 2x^2 + 3x^3, \quad q = -1 + 2x + 3x^3.$$

**7.14 [hint]** Trong không gian vectơ  $\mathbb{R}^3$ , cho hai vectơ

$$u = (1, -2, 3), \quad v = (-3, 1, 2).$$

- Hai vectơ  $u$  và  $v$  có vuông góc với nhau đối với tích vô hướng chính tắc của  $\mathbb{R}^3$  hay không?
- Tìm số thực dương  $a$  để hai vectơ  $u$  và  $v$  vuông góc với nhau đối với tích vô hướng Euclid có trọng số

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = ax_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3.$$

**7.15 [hint]** Cho không gian vectơ  $\mathcal{P}_\infty$  trang bị tích vô hướng

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx.$$

- (a) Chứng minh rằng hai đa thức  $x$  và  $x^2$  vuông góc với nhau.  
 (b) Tìm điều kiện cần và đủ cho các số tự nhiên  $m, n$  để hai đa thức  $x^m$  và  $x^n$  vuông góc với nhau.

**7.16** [hint] Tính cos của góc giữa hai vectơ

$$u = (1, 4, 8), \quad v = (0, 1, -3)$$

- (a) đối với tích vô hướng chính tắc của  $\mathbb{R}^3$ ,  
 (b) đối với tích vô hướng của  $\mathbb{R}^3$  sinh ra từ ma trận khả nghịch

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**7.17** [hint] Trong không gian vectơ  $\mathcal{P}_2$ , tính cos của góc giữa hai đa thức

$$p(x) = 2 + 5x - x^2, \quad q(x) = 1 - 4x - 2x^2$$

- (a) đối với tích vô hướng chính tắc,  
 (b) đối với tích vô hướng tính giá trị tại các điểm  $-1, 0, 1$ .

## PHẦN BÙ TRỰC GIAO

**ĐỊNH NGHĨA 7.1.27.** Cho  $V$  là một không gian có tích vô hướng và  $W$  là một không gian con của  $V$ . **Phần bù trực giao** của  $W$ , ký hiệu  $W^\perp$ , là tập hợp con của  $V$  bao gồm các vectơ vuông góc với  $W$ :

$$W^\perp = \{v \in V : v \perp W\}.$$

**MỆNH ĐỀ 7.1.28.** Cho  $W$  là một không gian con của một không gian có tích vô hướng  $V$ . Khi đó

- (a) Phần bù trực giao  $W^\perp$  là một không gian con của  $V$ .  
 (b)  $W \cap W^\perp = 0$ .

**MỆNH ĐỀ 7.1.29.** Cho  $W$  là một không gian con của một không gian có tích vô hướng  $V$ . Khi đó, phần bù trực giao của  $W^\perp$  chính

là  $W$ :

$$(W^\perp)^\perp = W.$$

Nhận xét rằng nếu  $w_1, w_2, \dots, w_p$  là một hệ sinh của  $W$  thì một vectơ  $v \in V$  thuộc vào  $W^\perp$  khi và chỉ khi  $v$  vuông góc với tất cả các vectơ  $w_i, i = 1, 2, \dots, p$ . Nói cách khác, phần bù trực giao  $W^\perp$  là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{aligned}\langle v, w_1 \rangle &= 0 \\ \langle v, w_2 \rangle &= 0 \\ &\vdots \\ \langle v, w_p \rangle &= 0\end{aligned}$$

với  $v \in V$ . Trong các bài tập thực hành bên dưới, hệ phương trình này sẽ được biến đổi tương đương thành một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất. Do đó, bằng cách giải hệ này, ta có thể xác định được số chiều và một cơ sở cho  $W^\perp$ .

**VÍ DỤ 7.1.30.** Cho không gian vectơ  $\mathbb{R}^4$  trang bị tích vô hướng chính tắc. Tìm số chiều và một cơ sở cho phần bù trực giao của không gian con của  $\mathbb{R}^4$  sinh bởi hệ vectơ

$$v_1 = (1, 2, 4, 5), \quad v_2 = (2, 0, 1, 3), \quad v_3 = (-1, 2, 3, 2).$$

**GIẢI.** Phần bù trực giao của không gian con  $\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$  của  $\mathbb{R}^4$  là không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\langle x, v_1 \rangle = 0, \quad \langle x, v_2 \rangle = 0, \quad \langle x, v_3 \rangle = 0.$$

Hệ phương trình này tương đương với hệ phương trình tuyến tính có ma trận hệ số mở rộng là

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Khử Gauss ma trận này, ta nhận được ma trận bậc thang

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)^\perp &\Leftrightarrow x = (-2t - 6s, -7t - 7s, 4t, 4s) \\ &\Leftrightarrow x = t(-2, -7, 4, 0) + s(-6, -7, 0, 4). \end{aligned}$$

Vậy phần bù trực giao cần tìm là một không gian véc tơ con 2 chiều của  $\mathbb{R}^4$  với một cơ sở là hệ véc tơ

$$(-2, -7, 4, 0), (-6, -7, 0, 4).$$

□

## BÀI TẬP

**7.18** [hint] Trong không gian véc tơ  $M_{2 \times 3}$  trang bị tích vô hướng chính tắc, tìm số chiều và một cơ sở cho phần bù trực giao của không gian con sinh bởi hệ ma trận

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 15 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## BÀI TẬP TỔNG HỢP

**7.19** [hint] Trong không gian véc tơ  $\mathbb{R}^3$ , chứng minh rằng ánh xạ

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$$

từ  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  đến  $\mathbb{R}$  không là một tích vô hướng.

**7.20** [hint] Chứng minh rằng định nghĩa sau không là một tích vô hướng nên không gian véc tơ  $\mathbb{R}^2$ :

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2.$$

**7.21** [hint] Tìm các số thực  $\lambda$  sao cho ánh xạ cho tương ứng mỗi cặp véc tơ  $u = (x_1, x_2)$  và  $v = (y_1, y_2)$  với

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + \lambda x_2 y_2$$

là một tích vô hướng trên  $\mathbb{R}^2$ .

**7.22** [hint] Cho không gian vectơ  $C[0, 1]$  các hàm liên tục  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , trang bị tích vô hướng

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

- (a) Tính  $\langle \sin 2\pi x, \cos 2\pi x \rangle$   
 (b)  $\langle 1 + x^2, e^x \rangle$ .

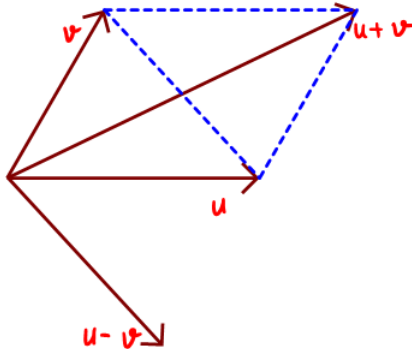
**7.23** [hint] Tính cos của góc giữa hai ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

đối với tích vô hướng chính tắc trên  $M_{3 \times 2}$

**7.24** [hint] Cho  $V$  là một không gian vectơ thực trang bị một tích vô hướng. Cho  $u, v \in V$ . Chứng minh công thức hình bình hành

$$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2).$$



**7.25** [hint] Trong một không gian vectơ trang bị tích vô hướng, chứng minh rằng

$$4\langle u, v \rangle = |u + v|^2 - |u - v|^2.$$

Đẳng thức này cho thấy rằng ta có thể tính tích vô hướng của hai véc tơ theo độ dài của véc tơ.

**7.26** [hint] Trong không gian véc tơ  $\mathbb{R}^4$  trang bị tích vô hướng chính tắc, tìm  $k$  sao cho hai véc tơ

$$u = (1, 3, k, 2), \quad v = (3, -5, 7, k)$$

vuông góc với nhau.

**7.27** [hint] Trong không gian véc tơ  $\mathbb{R}^4$  với tích vô hướng Euclid, tìm số chiều và một cơ sở cho  $\mathcal{L}(v)^\perp$  với

$$v = (1, 3, 2, 1).$$

**7.28** [hint] Trong một không gian có tích vô hướng, giả sử hai véc tơ  $u$  và  $v$  thỏa mãn

$$|\langle u, v \rangle| = |u| |v|.$$

Chứng minh rằng hệ véc tơ  $u, v$  phụ thuộc tuyến tính.

**7.29** [hint] Trong không gian véc tơ  $M_{2 \times 2}$ , trang bị tích vô hướng chính tắc, tìm một cơ sở cho phần bù trực giao của  $\mathcal{L}(A, B)^\perp$  với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

**7.30** [hint] Trong không gian véc tơ  $\mathcal{P}_2$  với tích vô hướng kiểu tích phân

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) q(x) dx,$$

tìm một cơ sở cho phần bù trực giao của không gian véc tơ con sinh ra từ đa thức  $2 + x$ .

## 7.2 TRỰC GIAO HÓA GRAM-SCHMIDT; PHÂN TÍCH QR

Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt là quá trình chính tắc để biến đổi một hệ vectơ thành một hệ vectơ trực chuẩn.

### HỆ TRỰC VECTƠ TRỰC GIAO VÀ HỆ VECTƠ TRỰC CHUẨN

**ĐỊNH NGHĨA 7.2.1.** Trong một không gian vectơ có tích vô hướng, một hệ vectơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$  được gọi là

- ▷ một **hệ trực giao** nếu  $v_i \perp v_j$  với mọi  $i \neq j$ ,
- ▷ một **hệ trực chuẩn** nếu nó là một hệ trực giao vào  $|v_i| = 1$  với mọi  $i$ .

**VÍ DỤ 7.2.2.** Trong không gian vectơ Euclid  $\mathbb{R}^3$  hệ vectơ

$$v_1 = (0, 1, 0), \quad v_2 = (1, 0, 1), \quad v_3 = (1, 0, -1)$$

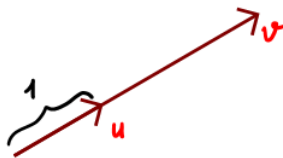
là một hệ trực giao vì

$$v_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot v_3 = v_2 \cdot v_3 = 0.$$

Hệ vectơ trực giao này không phải là một hệ trực chuẩn vì  $|v_2| = \sqrt{2} \neq 1$ .

Vectơ đơn vị cùng hướng với một vectơ  $v \neq 0$  là

$$u = \frac{1}{|v|}v.$$



Thật vậy, ta có

$$|u| = \left| \frac{1}{|v|} v \right| = \left| \frac{1}{|v|} \right| |v| = \frac{1}{|v|} |v| = 1.$$

Ta nói rằng vectơ  $v \neq 0$  được chuẩn hóa thành vectơ đơn vị  $u = \frac{1}{|v|}v$ . Một cách tổng quát, ta có thể chuẩn hóa một hệ vectơ trực giao để có được một hệ vectơ trực chuẩn.

### Chuẩn hóa hệ vectơ trực giao

Chuẩn hóa hệ vectơ trực giao  $v_1, v_2, \dots, v_r$  để thu được một hệ vectơ trực chuẩn gồm có 2 bước:

1. Loại bỏ các vectơ không khỏi hệ vectơ.
2. Chuẩn hóa các vectơ khác không.

### VÍ DỤ 7.2.3. Chuẩn hóa hệ vectơ trực giao

$$v_1 = (0, 1, 0), \quad v_2 = (1, 0, 1), \quad v_3 = (1, 0, -1)$$

trong ví dụ trên.

**GIẢI.** Các vectơ trong hệ trực giao  $v_1, v_2, v_3$  đều khác không. Độ dài của các vectơ trong hệ lần lượt là

$$|v_1| = 1, \quad |v_2| = \sqrt{2}, \quad |v_3| = \sqrt{2}.$$

Chuẩn hóa hệ vectơ  $v_1, v_2, v_3$  ta được

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = (0, 1, 0), \quad u_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

và

$$u_3 = \frac{v_3}{|v_3|} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

□

**MỆNH ĐỀ 7.2.4.** Trong một không gian có tích vô hướng, mọi hệ vectơ trực giao gồm các vectơ khác không là một hệ độc lập tuyến tính.

**CHỨNG MINH.** Cho  $v_1, v_2, \dots, v_n$  là một hệ véc tơ trực giao trong một không gian có tích vô hướng trong đó  $v_i \neq 0$  với mọi  $i$ . Hệ véc tơ này độc lập tuyến tính khi và chỉ khi phương trình véc tơ

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = 0 \quad (2)$$

chỉ có nghiệm tầm thường.

Với mỗi  $i = 1, 2, \dots, n$  cố định, lấy tích vô hướng của cả hai vế của phương trình (2) với véc tơ  $v_i$  ta được

$$\langle x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n, v_i \rangle = \langle 0, v_i \rangle$$

Suy ra

$$x_1 \langle v_1, v_i \rangle + x_2 \langle v_2, v_i \rangle + \dots + x_n \langle v_n, v_i \rangle = 0.$$

Vì hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_n$  là trực giao nên  $\langle v_j, v_i \rangle = 0$  với mọi  $j \neq i$ . Do đó, phương trình trên trở thành

$$x_i \langle v_i, v_i \rangle = 0.$$

Vì  $v_i \neq 0$  nên  $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$ . Do đó, phương trình trên kéo theo  $x_i = 0$ . Vậy phương trình véc tơ (2) chỉ có nghiệm tầm thường, tức là hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_n$  là một hệ độc lập tuyến tính.  $\square$

**ĐỊNH NGHĨA 7.2.5.** Trong một không gian có tích vô hướng, một cơ sở được gọi là

- ▷ **cơ sở trực giao** nếu cơ sở này là một hệ véc tơ trực giao,
- ▷ **cơ sở trực chuẩn** nếu cơ sở này là một hệ véc tơ trực chuẩn.

**VÍ DỤ 7.2.6.** Trong không gian véc tơ  $\mathbb{R}^n$ , cơ sở chính tắc

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

là một cơ sở trực chuẩn đối với tích vô hướng Euclid.

**VÍ DỤ 7.2.7.** Trong không gian véc tơ  $\mathcal{P}_n$ , cơ sở chính tắc

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad \dots, \quad x^n$$

là một cơ sở trực chuẩn đối với tích vô hướng chính tắc.

Nhắc lại rằng tích vô hướng chính tắc của hai đa thức

$$p = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad q = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$$

là

$$\langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + \dots + a_nb_n.$$

**VÍ DỤ 7.2.8.** Hệ vectơ

$$u_1 = (0, 1, 0), \quad u_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad u_3 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

là một cơ sở trực chuẩn của không gian vectơ Euclid  $\mathbb{R}^3$ .

**GIẢI.** Hệ vectơ  $u_1, u_2, u_3$  là một hệ trực chuẩn đã được chứng minh trong ví dụ 7.2.3. Hệ vectơ này không có vectơ không, do đó, nó là một hệ vectơ độc lập tuyến tính.

Vì số phần tử của hệ vectơ bằng đúng số chiều của  $\mathbb{R}^3$  nên nó là một cơ sở, và do đó, một cơ sở trực chuẩn của không gian vectơ Euclid  $\mathbb{R}^3$ .  $\square$

## BÀI TẬP

**7.31** [hint] Trong không gian vectơ Euclid  $\mathbb{R}^4$ , cho hệ vectơ

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), \quad v_2 = (-2, -1, a, 2), \quad v_3 = (b, -17, -13, c).$$

1. Tìm các số thực  $a, b, c$  sao cho hệ vectơ là một hệ trực giao trong không gian vectơ Euclid  $\mathbb{R}^4$ .
2. Tìm một vectơ  $v_4$  sao cho hệ vectơ  $v_1, v_2, v_3, v_4$  là một cơ sở trực giao của  $\mathbb{R}^4$ .

**7.32** [hint] Cho  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_r)$  là một hệ trực giao trong một không gian vectơ có tích vô hướng  $V$ . Chứng minh rằng

$$|u_1 + u_2 + \dots + u_r|^2 = |u_1|^2 + |u_2|^2 + \dots + |u_r|^2.$$

## TỌA ĐỘ ĐỐI VỚI CƠ SỞ TRỰC CHUẨN

Thông thường, để xác định vectơ tọa độ của một vectơ  $u$  đối với một cơ sở  $v_1, v_2, \dots, v_n$  là phải biến đổi phương trình vectơ

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n = u$$

thành một hệ phương trình tuyến tính bao gồm  $n$  phương trình đối với  $n$  ẩn  $x_1, x_2, \dots, x_n$  rồi tiến hành giải hệ phương trình tuyến tính này. Tình huống trở nên đơn giản hơn nhiều nếu cơ sở đã cho là một cơ sở trực giao hoặc một cơ sở trực chuẩn trong một không gian vectơ có tích vô hướng.

**ĐỊNH LÝ 7.2.9.** Cho  $v_1, v_2, \dots, v_n$  là một cơ sở trực giao của một không gian vectơ có tích vô hướng  $V$ . Biểu thị tuyến tính của một vectơ  $u \in V$  trong cơ sở  $v_1, v_2, \dots, v_n$  là

$$u = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{|v_1|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{|v_2|^2} v_2 + \dots + \frac{\langle u, v_n \rangle}{|v_n|^2} v_n.$$

Hơn nữa, nếu  $v_1, v_2, \dots, v_n$  là một cơ sở trực chuẩn thì

$$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n.$$

**CHỨNG MINH.** Vì hệ  $v_1, v_2, \dots, v_n$  nên phương trình vectơ

$$u = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n \quad (3)$$

có nghiệm duy nhất. Với mỗi  $i = 1, 2, \dots, n$ , lấy tích vô hướng của cả hai vế của phương trình (3) với vectơ  $v_i$  ta được

$$\langle x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n, v_i \rangle = \langle u, v_i \rangle$$

Suy ra

$$x_1 \langle v_1, v_i \rangle + x_2 \langle v_2, v_i \rangle + \dots + x_n \langle v_n, v_i \rangle = \langle u, v_i \rangle.$$

Vì hệ vectơ  $v_1, v_2, \dots, v_n$  là trực giao nên  $\langle v_j, v_i \rangle = 0$  với mọi  $j \neq i$ . Do đó, phương trình trên trở thành

$$x_i \langle v_i, v_i \rangle = \langle u, v_i \rangle.$$

Suy ra  $x_i = \frac{\langle u, v_i \rangle}{|v_i|^2}$ . Vậy, vectơ  $u$  có biểu thị tuyến tính

$$u = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{|v_1|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{|v_2|^2} v_2 + \dots + \frac{\langle u, v_n \rangle}{|v_n|^2} v_n.$$

Trong trường hợp hệ vectơ  $v_1, v_2, \dots, v_n$  là một cơ sở trực chuẩn thì các vectơ  $v_i$  có độ dài bằng 1,  $|v_i| = 1$  với mọi  $i$ . Khi đó, biểu thị tuyến tính trên trở thành

$$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n.$$

□

**ĐỊNH LÝ 7.2.10.** Cho  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  là một cơ sở trực giao của một không gian vectơ có tích vô hướng  $V$ . Vectơ tọa độ của một vectơ  $u \in V$  trong cơ sở  $\mathcal{B}$  là

$$[u]_{\mathcal{B}} = \left( \frac{\langle u, v_1 \rangle}{|v_1|^2}, \frac{\langle u, v_2 \rangle}{|v_2|^2}, \dots, \frac{\langle u, v_n \rangle}{|v_n|^2} \right).$$

Hơn nữa, nếu  $\mathcal{B}$  là một cơ sở trực chuẩn thì

$$[u]_{\mathcal{B}} = \left( \langle u, v_1 \rangle, \langle u, v_2 \rangle, \dots, \langle u, v_n \rangle \right).$$

**VÍ DỤ 7.2.11.** Trong không gian vectơ Euclid  $\mathbb{R}^3$ , cho hệ vectơ  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$  với

$$v_1 = (0, 1, 0), \quad v_2 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right), \quad v_3 = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right).$$

- (a) Chứng minh rằng  $\mathcal{B}$  là một cơ sở trực chuẩn của  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Tìm vectơ tọa độ của vectơ  $u = (1, 1, 1)$  trong cơ sở  $\mathcal{B}$ .

**GIẢI.** (a) Từ biểu thức tọa độ của  $v_1, v_2, v_3$ , ta có

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle = 0$$

và

$$|v_1| = |v_2| = |v_3| = 1.$$

Do đó, hệ vectơ  $\mathcal{B}$  là một hệ vectơ trực chuẩn. Vì số phần tử của hệ vectơ này bằng đúng số chiều của  $\mathbb{R}^3$  nên  $\mathcal{B}$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^3$ .

(b) Vì  $\mathcal{B}$  là một cơ sở trực chuẩn của  $\mathbb{R}^3$  nên vectơ tọa độ của  $u$  đối với  $\mathcal{B}$  là

$$[u]_{\mathcal{B}} = (\langle u, v_1 \rangle, \langle u, v_2 \rangle, \langle u, v_3 \rangle).$$

Ta có

$$\langle u, v_1 \rangle = 1, \quad \langle u, v_2 \rangle = -\frac{1}{5}, \quad \langle u, v_3 \rangle = \frac{7}{5}.$$

Vậy

$$[u]_{\mathcal{B}} = \left( 1, -\frac{1}{5}, \frac{7}{5} \right).$$

□

**VÍ DỤ 7.2.12.** Trong không gian vectơ Euclid  $\mathbb{R}^3$  cho vectơ  $u = (1, 2, 4)$  và hệ vectơ  $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$  với

$$w_1 = (0, 2, 0), \quad w_2 = (3, 0, 3), \quad w_3 = (-4, 0, 4).$$

- (a) Chứng minh rằng hệ vectơ  $\mathcal{B}$  là một cơ sở trực giao của  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Tìm biểu thị tuyến tính của vectơ  $u$  trong cơ sở trực giao  $\mathcal{B}$ .
- (c) Tìm biểu thị tuyến tính của vectơ  $u$  trong cơ sở trực chuẩn thu được bằng cách chuẩn hóa cơ sở trực giao  $\mathcal{B}$ .

**GIẢI.** (a) Từ công thức tọa độ của các vectơ  $w_1, w_2, w_3$ , ta có

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_1, w_3 \rangle = \langle w_2, w_3 \rangle = 0.$$

Do đó, hệ vectơ  $\mathcal{B}$  là một hệ trực giao. Vì hệ trực giao  $\mathcal{B}$  không chứa vectơ không nên nó là một hệ độc lập tuyến tính. Hơn nữa, số phần tử của  $\mathcal{B}$  bằng đúng số chiều của  $\mathbb{R}^3$ . Do đó,  $\mathcal{B}$  là một cơ sở trực giao của  $\mathbb{R}^3$ .

(b) Biểu thị tuyến tính của vectơ  $u$  trong cơ sở trực giao  $\mathcal{B}$  là

$$u = \frac{\langle u, w_1 \rangle}{|w_1|^2} w_1 + \frac{\langle u, w_2 \rangle}{|w_2|^2} w_2 + \frac{\langle u, w_3 \rangle}{|w_3|^2} w_3.$$

Ta có

$$|w_1|^2 = 4, \quad |w_2|^2 = 18, \quad |w_3|^2 = 32$$

và

$$\langle u, w_1 \rangle = 4, \quad \langle u, w_2 \rangle = 16, \quad \langle u, w_3 \rangle = 12.$$

Do đó, biểu thị tuyến tính của  $u$  trong cơ sở  $\mathcal{B}$  là

$$u = w_1 + \frac{8}{9} w_2 + \frac{3}{8} w_3.$$

(c) Chuẩn hóa cơ sở trực giao  $\mathcal{B}$  ta thu được cơ sở trực chuẩn  $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$  với

$$v_1 = \frac{w_1}{|w_1|} = (0, 1, 0), \quad v_2 = \frac{w_2}{|w_2|} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$v_3 = \frac{w_3}{|w_3|} = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Biểu thị tuyến tính của vectơ  $u$  trong cơ sở trực chuẩn  $\mathcal{C}$  là

$$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \langle u, v_3 \rangle v_3.$$

Ta có

$$\langle u, v_1 \rangle = 2, \quad \langle u, v_2 \rangle = \frac{5}{\sqrt{2}}, \quad \langle u, v_3 \rangle = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Do đó, biểu thị tuyến tính của  $u$  trong cơ sở trực chuẩn  $\mathcal{C}$  nhận được bằng cách chuẩn hóa cơ sở trực giao  $\mathcal{B}$  là

$$u = 2v_1 + \frac{5}{\sqrt{2}}v_2 + \frac{3}{\sqrt{2}}v_3.$$

□

## BÀI TẬP

**7.33** [hint] Trong không gian véc tơ Euclid  $\mathbb{R}^4$ , xét hệ véc tơ  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  với

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 0, 1, -1), \quad u_2 = (1, 1, 2, 3), \\ u_3 &= (1, -9, 1, 2), \quad u_4 = (16, 1, -13, 3). \end{aligned}$$

- (a) Chứng minh rằng hệ véc tơ  $\mathcal{B}$  là một cơ sở trực giao của  $\mathbb{R}^4$ .
- (b) Tìm véc tơ tọa độ của một véc tơ bất kỳ  $v = (a, b, c, d)$  của  $\mathbb{R}^4$  trong cơ sở  $\mathcal{B}$ .

**7.34** [hint] Cho  $V$  là một không gian véc tơ có tích vô hướng và  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  là một cơ sở trực chuẩn của  $V$ . Cho  $u, v \in V$ .

- (a) Chứng minh rằng  $\langle u, v \rangle = [u]_{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$ .
- (b) Chứng minh rằng

$$\langle u, v \rangle = \langle u, e_1 \rangle \langle v, e_1 \rangle + \langle u, e_2 \rangle \langle v, e_2 \rangle + \cdots + \langle u, e_n \rangle \langle v, e_n \rangle.$$

Khẳng định (a) cho thấy rằng tất cả các tích vô hướng trên một không gian véc tơ  $V$  đều là tích vô hướng sinh ra từ một cơ sở nào đó của  $V$ .

## PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC

Phép chiếu vuông góc lên một không gian con là một phép biến đổi hình học quan trọng.

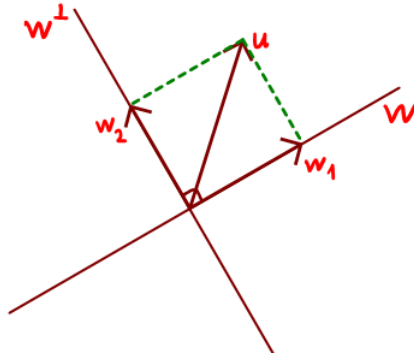
Nhắc lại rằng phần bù trực giao của một không gian con  $W$  trong một không gian véc tơ có tích vô hướng  $V$  là

$$W^{\perp} = \{v \in V : v \perp W\}.$$

**ĐỊNH LÝ 7.2.13.** Cho  $W$  là một không gian véc tơ con hữu hạn chiều của một không gian véc tơ có tích vô hướng  $V$ . Khi đó, mọi véc tơ  $u \in V$  có phân tích duy nhất

$$u = w_1 + w_2 \quad (4)$$

với  $w_1 \in W$  và  $w_2 \in W^\perp$ .



Trong phân tích (4):

- ▷ véc tơ  $w_1$  được gọi là **hình chiếu vuông góc** của  $u$  trên  $W$ , ký hiệu  $\text{proj}_W(u)$ .
- ▷ véc tơ  $w_2$  được gọi là **thành phần vuông góc** của  $u$  đối với  $W$ . Vì véc tơ  $w_2$  này chính là hình chiếu vuông góc của  $u$  trên phần bù trực giao  $W^\perp$  nên  $w_2 = \text{proj}_{W^\perp}(u)$ .

Phân tích (4) được viết lại là

$$u = \text{proj}_W(u) + \text{proj}_{W^\perp}(u).$$

Kết quả sau cho ta cách tìm hình chiếu vuông góc.

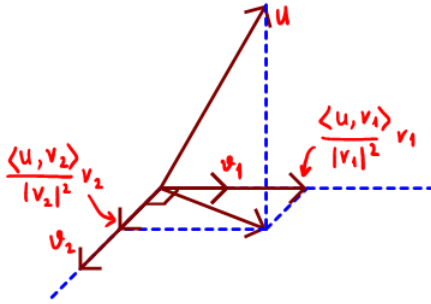
**ĐỊNH LÝ 7.2.14.** Cho  $W$  là một không gian véc tơ con hữu hạn chiều của một không gian có tích vô hướng  $V$ . Giả sử  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_r)$  là một cơ sở trực giao của  $W$ . Khi đó, hình chiếu vuông góc của

một véctơ  $u \in V$  trên  $W$  là

$$\text{proj}_W(u) = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{|v_1|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{|v_2|^2} v_2 + \cdots + \frac{\langle u, v_r \rangle}{|v_r|^2} v_r.$$

Hơn nữa, nếu  $\mathcal{B}$  là một cơ sở trực chuẩn của  $W$  thì

$$\text{proj}_W(u) = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \cdots + \langle u, v_r \rangle v_r.$$



**CHỨNG MINH.** Ta có

$$u = \text{proj}_W(u) + \text{proj}_{W^\perp}(u).$$

Vì  $\text{proj}_W(u) \in W$  và  $\mathcal{B}$  là một cơ sở trực giao của  $W$  nên

$$\begin{aligned} \text{proj}_W(u) &= \frac{\langle \text{proj}_W(u), v_1 \rangle}{|v_1|^2} v_1 + \frac{\langle \text{proj}_W(u), v_2 \rangle}{|v_2|^2} v_2 + \cdots \\ &\quad + \frac{\langle \text{proj}_W(u), v_r \rangle}{|v_r|^2} v_r. \end{aligned} \quad (5)$$

Vì  $\text{proj}_{W^\perp}(u) \perp W$  nên với mọi  $i = 1, 2, \dots, r$ , ta có

$$\begin{aligned} \langle u, v_i \rangle &= \langle \text{proj}_W(u) + \text{proj}_{W^\perp}(u), v_i \rangle \\ &= \langle \text{proj}_W(u), v_i \rangle + \langle \text{proj}_{W^\perp}(u), v_i \rangle = \langle \text{proj}_W(u), v_i \rangle. \end{aligned}$$

Do đó, phương trình (5) trở thành

$$\text{proj}_W(u) = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{|v_1|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{|v_2|^2} v_2 + \cdots + \frac{\langle u, v_r \rangle}{|v_r|^2} v_r.$$

Nếu  $\mathcal{B}$  là một cơ sở trực chuẩn thì  $|v_i| = 1$  với mọi  $i$ . Khi đó, phương trình trên tương đương với

$$\text{proj}_W(u) = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle u, v_r \rangle v_r.$$

□

**VÍ DỤ 7.2.15.** Trong không gian véctơ Euclid  $\mathbb{R}^3$ , cho hệ véctơ

$$v_1 = (0, 1, 0), \quad v_2 = (-4, 0, 3).$$

- (a) Tìm hình chiếu vuông góc của véctơ  $u = (1, 1, 1)$  trên không gian con  $W = \mathcal{L}(v_1, v_2)$  của  $\mathbb{R}^3$ .  
 (b) Tìm thành phần vuông góc của véctơ  $u$  đối với  $W$ .

**GIẢI.** Vì hệ véctơ  $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$  độc lập tuyến tính nên  $\mathcal{B}$  là một cơ sở của  $W$ . Cơ sở  $\mathcal{B}$  là trực giao vì  $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ .

Do đó, hình chiếu vuông góc của  $u$  trên không gian con  $W$  là

$$\text{proj}_W(u) = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{|v_1|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{|v_2|^2} v_2.$$

Ta có

$$|v_1|^2 = 1, \quad |v_2|^2 = 25, \quad \langle u, v_1 \rangle = 1, \quad \langle u, v_2 \rangle = -1.$$

Do đó

$$\text{proj}_W(u) = \frac{1}{1} (0, 1, 0) + \frac{-1}{25} (-4, 0, 3) = \left( \frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25} \right).$$

Thành phần vuông góc của  $u$  đối với  $W$  là

$$\begin{aligned} \text{proj}_{W^\perp}(u) &= u - \text{proj}_W(u) \\ &= (1, 1, 1) - \left( \frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25} \right) = \left( \frac{21}{25}, 0, \frac{28}{25} \right). \end{aligned}$$

□

Để tính hình chiếu vuông góc trên không gian con  $W$  theo định lý 7.2.14, ta cần một cơ sở trực giao của  $W$ . Phần tiếp theo trình bày kỹ thuật biến đổi một cơ sở bất kỳ của  $W$  thành một cơ sở trực giao của nó.

## BÀI TẬP

**7.35** [hint] Trong không gian véc tơ Euclid  $\mathbb{R}^4$ , cho các véc tơ

$$u = (1, -2, 1, -2), \quad v = (1, 2, 3, 4).$$

Tìm hình chiếu vuông góc của  $u$  trên  $\mathcal{L}(v)$ .

**7.36** [hint] Trong không gian véc tơ Euclid  $\mathbb{R}^4$ , tìm hình chiếu vuông góc của véc tơ  $u = (1, -3, -5, 7)$  trên không gian con sinh ra từ hệ véc tơ trực giao

$$v_1 = (-1, -1, 0, 2), \quad v_2 = (1, 3, -6, 2).$$

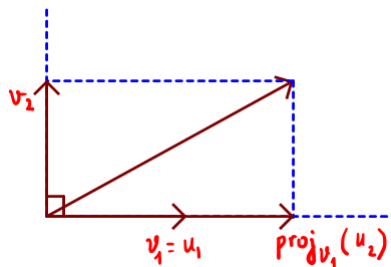
## TRỰC CHUẨN HÓA GRAM-SCHMIDT

Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt là quá trình chính tắc để biến đổi một hệ véc tơ thành một hệ véc tơ trực chuẩn. Trong nhiều trường hợp, ta chỉ cần một cơ sở trực giao, và do đó, ta bỏ qua bước chuẩn hóa trong quá trình trực chuẩn hóa Gram-Schmidt.

**ĐỊNH LÝ 7.2.16.** Cho  $W$  là một không gian véc tơ con của một không gian có tích vô hướng  $V$ . Gọi  $u_1, u_2, \dots, u_r$  là một cơ sở của  $W$ . Với  $i = 0, 1, 2, \dots, r$ , gọi  $W_i = \mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_i)$  và  $v_i$  là thành phần vuông góc của véc tơ  $u_i$  đối với không gian con  $W_{i-1}$

$$v_i = u_i - \text{proj}_{W_{i-1}}(u_i).$$

Khi đó hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_r$  là một cơ sở trực giao của  $W$ . Hơn nữa, với mọi  $i = 1, 2, \dots, r$ , hệ véc tơ  $v_1, v_2, \dots, v_i$  là một cơ sở trực giao của  $W_i$ .

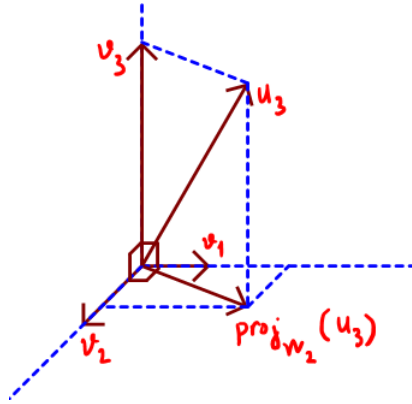


Để sử dụng định lý trên một cách hiệu quả, ta cần tính các hình chiếu vuông góc  $\text{proj}_{W_{i-1}}(u_i)$  của vectơ  $u_i$  lên không gian con  $W_{i-1}$ . Muốn thế, sử dụng cơ sở trực giao  $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$  của  $W_{i-1}$ :

$$\text{proj}_{W_{i-1}}(u_i) = \frac{\langle u_i, v_1 \rangle}{|v_1|^2} v_1 + \frac{\langle u_i, v_2 \rangle}{|v_2|^2} v_2 + \dots + \frac{\langle u_i, v_{i-1} \rangle}{|v_{i-1}|^2} v_{i-1}.$$

Do đó

$$v_i = u_i - \frac{\langle u_i, v_1 \rangle}{|v_1|^2} v_1 - \frac{\langle u_i, v_2 \rangle}{|v_2|^2} v_2 - \dots - \frac{\langle u_i, v_{i-1} \rangle}{|v_{i-1}|^2} v_{i-1}.$$



### Thực giao hóa Gram-Schmidt

Cho  $u_1, u_2, \dots, u_r$  là một cơ sở của một không gian vectơ con  $W$  trong một không gian vectơ có tích vô hướng  $V$ . Quá trình thực giao hóa Gram-Schmidt biến đổi cơ sở này thành một cơ sở trực giao  $v_1, v_2, \dots, v_r$  của  $W$  như sau:

- ▷  $v_1 = u_1,$
- ▷  $v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{|v_1|^2} v_1$
- ▷  $v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{|v_1|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{|v_2|^2} v_2$
- ▷ ...
- ▷  $v_i = u_i - \frac{\langle u_i, v_1 \rangle}{|v_1|^2} v_1 - \frac{\langle u_i, v_2 \rangle}{|v_2|^2} v_2 - \dots - \frac{\langle u_i, v_{i-1} \rangle}{|v_{i-1}|^2} v_{i-1}.$
- ▷ ...

Bằng cách chuẩn hóa cơ sở trực giao  $v_1, v_2, \dots, v_r$  của  $W$ , ta nhận được một cơ sở trực chuẩn của  $W$ .

Ta có thể thực hiện quá trình trực giao hóa hoặc trực chuẩn hóa Gram-Schmidt trên một hệ vectơ bất kỳ  $u_1, u_2, \dots, u_r$ . Khi đó, hãy loại bỏ các vectơ  $v_i$  bằng không.

**Corollary 5.** *Tồn tại cơ sở trực chuẩn cho mọi không gian vectơ hữu hạn chiều có tích vô hướng.*

**CHỨNG MINH.** Lấy một cơ sở bất kỳ của không gian vectơ này rồi trực chuẩn hóa Gram-Schmidt nó, ta nhận được một cơ sở trực chuẩn.  $\square$

**VÍ DỤ 7.2.17.** Trong không gian vectơ Euclid  $\mathbb{R}^3$ , cho hệ vectơ

$$u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (0, 1, 1), \quad u_3 = (0, 0, 1).$$

Trực giao hóa Gram-Schmidt hệ vectơ  $u_1, u_2, u_3$  để được một hệ vectơ trực giao, rồi chuẩn hóa hệ vectơ này để được một hệ vectơ trực chuẩn.

**GIẢI.** Trực giao hóa Gram-Schmidt hệ vectơ  $u_1, u_2, u_3$ :

$$\triangleright v_1 = u_1 = (1, 1, 1).$$

$$\triangleright v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{|v_1|^2} v_1 = (0, 0, 1) - \frac{2}{3} (1, 1, 1) = \frac{1}{3} (-2, 1, 1).$$

$$\triangleright v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{|v_1|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{|v_2|^2} v_2 = (0, 0, 1) - \frac{1}{3} (1, 1, 1) - \frac{1}{6} (-2, 1, 1) = \frac{1}{2} (0, -1, 1).$$

Trong khi tính  $v_3$ , ta đã sử dụng vectơ  $3v_2$  thay cho vectơ  $v_2$ . Điều này được phép vì

$$\frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{|v_2|^2} v_2 = \frac{\langle u_3, 3v_2 \rangle}{|3v_2|^2} (3v_2).$$

Việc thay thế vectơ  $v_2$  này đã hạn chế phân số trong tính toán trung gian.

Hệ vectơ trực giao nhận được sau quá trình trực giao hóa Gram-Schmidt là

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad v_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Chuẩn hóa hệ vectơ trực giao này ta nhận được hệ vectơ trực chuẩn

$$q_1 = \frac{1}{|v_1|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{1}{|v_2|} v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (-2, 1, 1) = \left( -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \\ q_3 &= \frac{1}{|v_3|} v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, -1, 1) = \left( 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Trong khi chuẩn hóa các vectơ  $v_2$  và  $v_3$ , ta đã sử dụng vectơ  $3v_2$  thay thế cho vectơ  $v_2$  và vectơ  $2v_3$  thay thế cho vectơ  $v_3$ . Điều này được phép vì

$$\frac{1}{|v_2|} v_2 = \frac{1}{|3v_2|} (3v_2), \quad \frac{1}{|v_3|} v_3 = \frac{1}{|2v_3|} (2v_3).$$

Việc thay thế các vectơ  $v_2$  và  $v_3$  này làm cho tính toán trung gian đơn giản hơn.  $\square$

Ta có thể tiến hành đồng thời trực giao hóa Gram-Schmidt và chuẩn hóa để thu được hệ vectơ trực chuẩn, thay vì trực giao hóa Gram-Schmidt trước rồi chuẩn hóa hệ vectơ trực giao thu được.

Trong tính toán trung gian của quá trình trực giao hóa Gram-Schmidt và chuẩn hóa, ta nên thay thế các vectơ  $v_i$  bởi  $kv_i$  với một số  $k$  thích hợp.

**VÍ DỤ 7.2.18.** Xét không gian vectơ  $\mathcal{P}_2$  trang bị tích vô hướng tích phân

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx.$$

Hãy trực giao hóa Gram-Schmidt cơ sở chính tắc  $1, x, x^2$  của  $\mathcal{P}_2$ .

**GIẢI.** Trực giao hóa Gram-Schmidt cơ sở  $u_1 = 1, u_2 = x, u_3 = x^2$ , ta được

$$\triangleright v_1 = u_1 = 1,$$

$$\triangleright v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{|v_1|^2} v_1. \text{ Ta có}$$

$$\langle u_2, v_1 \rangle = \int_{-1}^1 x dx = 0.$$

Do đó  $v_2 = x$ .

▷  $v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{|v_1|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{|v_2|^2} v_2$ . Ta có

$$\langle u_3, v_1 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

$$|v_1|^2 = \int_{-1}^1 dx = [x]_{-1}^1 = 2$$

$$\langle u_3, v_2 \rangle = \int_{-1}^1 x^3 dx = \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = 0.$$

$$\text{Do đó } v_3 = x^2 - \frac{\frac{2}{3}}{2} (1) = x^2 - \frac{1}{3}.$$

□

Cơ sở trực giao trong ví dụ trên thường đường nhân với các hằng số một cách thích hợp để giá trị của chúng bằng 1 tại  $x = 1$ . Ta nhận được các đa thức

$$1, x, \frac{1}{2} (3x^2 - 1).$$

Các đa thức này được gọi là các **đa thức Legendre**.

## BÀI TẬP

**7.37** [hint] Trong không gian véc tơ Euclid  $\mathbb{R}^4$  cho hệ véc tơ

$$u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = (2, 2, 3, 5), u_3 = (2, 3, -2, 1).$$

- Trực giao hóa Gram-Schmidt hệ véc tơ  $u_1, u_2, u_3$ .
- Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt hệ véc tơ  $u_1, u_2, u_3$ .

## MỞ RỘNG HỆ VÉCTƠ TRỰC CHUẨN THÀNH CƠ SỞ TRỰC CHUẨN

**MỆNH ĐỀ 7.2.19.** Cho  $V$  là một không gian véc tơ hữu hạn chiều có tích vô hướng.

- Mọi hệ véc tơ trực giao độc lập tuyến tính trong  $V$  đều có thể bổ sung véc tơ để trở thành một cơ sở trực giao.
- Mọi hệ véc tơ trực chuẩn trong  $V$  đều có thể bổ sung véc tơ để trở thành một cơ sở trực chuẩn.

**CHỨNG MINH.** (a) Gọi  $v_1, v_2, \dots, v_r$  là một hệ trực giao độc lập tuyến tính trong  $V$ . Đặt  $W = \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_r)$ . Khi đó, với mọi cơ sở trực giao  $u_1, u_2, \dots, u_s$  của phần bù trực giao  $W^\perp$ , hệ véc tơ

$$v_1, v_2, \dots, v_r, u_1, u_2, \dots, u_s$$

là một cơ sở trực giao của  $V$ .

(b) Ý này được chứng minh giống hệt như trên. Gọi  $v_1, v_2, \dots, v_r$  là một hệ trực chuẩn trong  $V$ . Đặt  $W = \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_r)$ . Khi đó, với mọi cơ sở trực chuẩn  $u_1, u_2, \dots, u_s$  của phần bù trực giao  $W^\perp$ , hệ véc tơ

$$v_1, v_2, \dots, v_r, u_1, u_2, \dots, u_s$$

là một cơ sở trực chuẩn của  $V$ . □

**VÍ DỤ 7.2.20.** Trong không gian véc tơ Euclid  $\mathbb{R}^3$ , cho véc tơ  $v_1 = (1, 1, 1)$ . Tìm hai véc tơ  $v_2, v_3$  sao cho hệ véc tơ  $v_1, v_2, v_3$  là một cơ sở trực giao của  $\mathbb{R}^3$ .

**CHỨNG MINH.** Tập hợp các véc tơ vuông góc với véc tơ  $v_1$  là phần bù trực giao  $\mathcal{L}(v_1)^\perp$ . Hệ véc tơ  $v_2, v_3$  cần tìm chính là một cơ sở trực giao của  $\mathcal{L}(v_1)^\perp$ . Ta có

$$\begin{aligned} x \perp v_1 &\Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x &= (-t - s, t, s) \\ x &= t(-1, 1, 0) + s(-1, 0, 1). \end{aligned}$$

Do đó, một cơ sở của  $\mathcal{L}(v_1)^\perp$  là hệ véc tơ

$$u_1 = (-1, 1, 0), \quad u_2 = (-1, 0, 1).$$

Vì  $u_1 \cdot u_2 = 1 \neq 0$  nên cơ sở  $u_1, u_2$  của  $\mathcal{L}(v_1)^\perp$  không phải là một cơ sở trực giao. Để có được một cơ sở trực giao  $v_2, v_3$ , ta trực giao hóa Gram-Schmidt hệ véc tơ  $u_1, u_2$ :

$$\triangleright v_2 = u_1 = (-1, 1, 0)$$

$$\triangleright v_3 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_2 \rangle}{|v_2|^2} v_2 = (-1, 0, 1) - \frac{1}{2}(-1, 1, 0) = \frac{1}{2}(-1, -1, 2).$$

□

Hai véc tơ  $v_2, v_3$  cần tìm trong ví dụ trên là một cơ sở trực giao bất kỳ của phần bù trực giao  $\mathcal{L}(v_1)^\perp$  nên nó không duy nhất. Trong các bài tập bên dưới, ta trình bày các cách khác để tìm các véc tơ này.

## BÀI TẬP

**7.38** [hint] Trong không gian véc tơ Euclid  $\mathbb{R}^3$ , cho véc tơ  $v_1 = (1, 1, 1)$ . Tìm hai véc tơ  $v_2, v_3$  sao cho hệ véc tơ  $v_1, v_2, v_3$  là một cơ sở trực giao của  $\mathbb{R}^3$  bằng cách trực giao hóa Gram-Schmidt hệ sinh  $v_1, e_1, e_2, e_3$  của  $\mathbb{R}^3$  trong đó

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1).$$

**7.39** [hint] Trong không gian véc tơ Euclid  $\mathbb{R}^3$ , cho véc tơ  $v_1 = (1, 1, 1)$ .

1. Chứng minh rằng hệ véc tơ  $v_1, v_2, v_3$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^3$  với

$$v_2 = (1, 1, 0), \quad v_3 = (1, 0, 0).$$

2. Trực giao hóa Gram-Schmidt hệ véc tơ  $v_1, v_2, v_3$  để được một cơ sở trực giao của  $\mathbb{R}^3$  chứa véc tơ  $v_1$ .

## PHÂN TÍCH QR

Quá trình trực chuẩn hóa Gram-Schmidt đã biến đổi một cơ sở  $u_1, u_2, \dots, u_n$  thành cơ sở trực chuẩn  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Mỗi liên hệ giữa hai cơ sở này được lưu trữ trong ma trận chuyển cơ sở  $R$ .

Cụ thể hơn, ma trận chuyển cơ sở  $R$  từ cơ sở trực chuẩn  $q_1, q_2, \dots, q_n$  sang cơ sở ban đầu  $u_1, u_2, \dots, u_n$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$  với cột thứ  $j$  là véc tơ tọa độ của véc tơ  $u_j$  trong cơ sở  $q_1, q_2, \dots, q_n$

$$u_j = r_{1j}q_1 + r_{2j}q_2 + \dots + r_{nj}q_n.$$

Vì  $q_1, q_2, \dots, q_n$  là cơ sở trực chuẩn nên

$$r_{ij} = \langle u_j, q_i \rangle.$$

Ta có

$$\triangleright r_{ij} = 0 \text{ nếu } i > j.$$

$$\triangleright r_{ii} \text{ là độ dài của thành phần vuông góc của véc tơ } u_i \text{ đối với không gian con } \mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_{i-1}) = \mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}).$$

Do đó,  $R$  là một ma trận tam giác trên, với các phần tử trên đường chéo là các số dương.

**ĐỊNH LÝ 7.2.21 (Phân tích QR).** Cho  $A$  là một ma trận cỡ  $m \times n$  với các cột độc lập tuyến tính. Khi đó, tồn tại duy nhất phân tích

$$A = QR$$

trong đó

- ▷ ma trận  $Q$  có cỡ  $m \times n$ , và hệ vectơ cột của nó là một hệ trực chuẩn
- ▷ ma trận  $R$  có cỡ  $n \times n$  là một ma trận tam giác trên, với các phần tử trên đường chéo là các số dương.

**CHỨNG MINH.** Gọi  $u_1, u_2, \dots, u_n$  là hệ vectơ cột của ma trận  $A$ . Theo giả thiết, hệ vectơ  $u_1, u_2, \dots, u_n$  độc lập tuyến tính trong không gian vectơ  $\mathbb{R}^m$ . Trang bị cho  $\mathbb{R}^m$  tích vô hướng Euclid.

Thực chuẩn hóa Gram-Schmidt cơ sở  $u_1, u_2, \dots, u_n$  để được cơ sở trực chuẩn  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Ta có

$$\begin{aligned} u_1 &= \langle u_1, q_1 \rangle q_1 + \langle u_1, q_2 \rangle q_2 + \dots + \langle u_1, q_n \rangle q_n \\ u_2 &= \langle u_2, q_1 \rangle q_1 + \langle u_2, q_2 \rangle q_2 + \dots + \langle u_2, q_n \rangle q_n \\ &\vdots \\ u_n &= \langle u_n, q_1 \rangle q_1 + \langle u_n, q_2 \rangle q_2 + \dots + \langle u_n, q_n \rangle q_n. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix}}_Q \underbrace{\begin{bmatrix} \langle u_1, q_1 \rangle & \langle u_2, q_1 \rangle & \dots & \langle u_n, q_1 \rangle \\ \langle u_1, q_2 \rangle & \langle u_2, q_2 \rangle & \dots & \langle u_n, q_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle u_1, q_n \rangle & \langle u_2, q_n \rangle & \dots & \langle u_n, q_n \rangle \end{bmatrix}}_R. \end{aligned}$$

□

**VÍ DỤ 7.2.22.** Tìm phân tích QR của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**CHỨNG MINH.** Hệ vectơ cột của ma trận  $A$  là

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt hệ vectơ này, ta nhận được cơ sở trực chuẩn (xem ví dụ 7.2.17)

$$q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad q_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad q_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở trực chuẩn  $q_1, q_2, q_3$  sang cơ sở ban đầu  $u_1, u_2, u_3$  là

$$R = \begin{bmatrix} \langle u_1, q_1 \rangle & \langle u_2, q_1 \rangle & \langle u_3, q_1 \rangle \\ 0 & \langle u_2, q_2 \rangle & \langle u_3, q_2 \rangle \\ 0 & 0 & \langle u_3, q_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Do vậy, phân tích QR của ma trận  $A$  là

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_Q \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_R \end{aligned}$$

□

## BÀI TẬP

## BÀI TẬP TỔNG HỢP

**7.40** [hint] Trong không gian véc tơ Euclid  $\mathbb{R}^4$ , gọi  $W$  là không gian con sinh ra từ hai véc tơ

$$u_1 = (0, -1, 2, 1), \quad u_2 = (1, 1, 4, 4).$$

1. Tìm một cơ sở trực giao của  $W^\perp$ .
2. Tìm một cơ sở trực chuẩn của  $W^\perp$ .

**7.41** [hint] Trong không gian véc tơ  $M_{2 \times 2}$  với tích vô hướng chính tắc, cho hệ ma trận  $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$  với

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Chứng minh rằng  $\mathcal{B}$  là một cơ sở trực giao của  $M_{2 \times 2}$ .
2. Viết ma trận  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$  như là một tổ hợp tuyến tính của hệ ma trận  $\mathcal{B}$ .
3. Chuẩn hóa  $\mathcal{B}$  để được một cơ sở trực chuẩn của  $M_{2 \times 2}$ .

**7.42** [hint] Trong không gian véc tơ  $M_{2 \times 2}$  trang bị tích vô hướng chính tắc, ký hiệu  $W$  là không gian con của các ma trận đối xứng.

1. Tìm một cơ sở trực giao của  $W$ .
2. Tìm một cơ sở trực giao của phần bù trực giao  $W^\perp$ .

**7.43** [hint] Trong không gian véc tơ  $M_{2 \times 2}$  trang bị tích vô hướng chính tắc, ký hiệu  $W$  là không gian con của các ma trận chéo.

1. Tìm một cơ sở trực giao của  $W$ .
2. Tìm một cơ sở trực giao của phần bù trực giao  $W^\perp$ .

**7.44** [hint] Trong không gian véc tơ  $M_{2 \times 2}$  trang bị tích vô hướng chính tắc, ký hiệu  $W$  là không gian con của các ma trận tam giác trên.

1. Tìm một cơ sở trực giao của  $W$ .
2. Tìm một cơ sở trực giao của phần bù trực giao  $W^\perp$ .

**7.45** [hint] Cho  $V$  là một không gian véc tơ hữu hạn chiều có tích vô hướng. Cho  $U$  và  $W$  là các không gian con của  $V$ . Chứng minh rằng

1.  $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$ .
2.  $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$ .

## 7.3 MA TRẬN TRỰC GIAO; CHÉO HÓA TRỰC GIAO

Ta đã có điều kiện cần và đủ để một ma trận là chéo hóa được. Mục này trình bày một kết quả quan trọng của đại số tuyến tính nói rằng *tất cả các ma trận đối xứng với hệ số thực đều chéo hóa được*. Kết quả này được sử dụng trong nhiều ứng dụng một cách cốt yếu.

### MA TRẬN TRỰC GIAO

Ma trận trực giao là một lớp ma trận quan trọng trong hình học, tương ứng với các phép biến đổi hình học bảo toàn khoảng cách giữa các vectơ.

**ĐỊNH NGHĨA 7.3.1.** Một ma trận vuông  $A$  cỡ  $n \times n$  được gọi là **trực giao** nếu  $A$  khả nghịch với nghịch đảo là

$$A^{-1} = A^T.$$

Một phép biến đổi ma trận  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $T(x) = Ax$  được gọi là một **biến đổi trực giao** hoặc một **toán tử trực giao** nếu  $A$  là một ma trận trực giao.

Từ định nghĩa, ta thấy rằng một ma trận vuông  $A$  là trực giao khi và chỉ khi

$$AA^T = I = A^T A.$$

Thông thường, ta sẽ sử dụng điều kiện này để kiểm tra tính trực giao của ma trận, vì nó tránh việc phải tìm nghịch đảo của ma trận rồi so sánh nó với ma trận chuyển vị.

**VÍ DỤ 7.3.2.** Ma trận đơn vị  $I_n$  là một ma trận trực giao

$$I_n^{-1} = I_n = I_n^T.$$

Một ma trận chéo

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

là trực giao khi và chỉ khi  $d_i = 1$  hoặc  $-1$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, n$  vì

$$D^T D = D D = \begin{bmatrix} d_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^2 \end{bmatrix}.$$

**VÍ DỤ 7.3.3.** Chứng minh rằng ma trận

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

là trực giao.

**GIẢI.** Ta có

$$A^T A = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

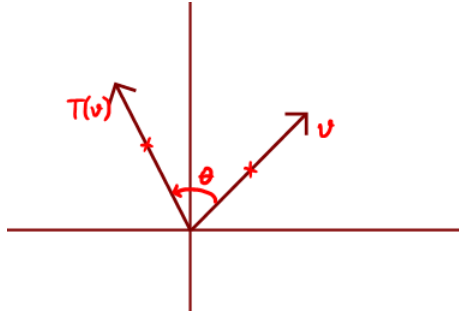
Do đó,  $A$  là một ma trận trực giao. □

**VÍ DỤ 7.3.4.** Trong mặt phẳng Euclid  $\mathbb{R}^2$ , chứng minh rằng

- (a) Phép quay tâm tại gốc tọa độ là một phép biến đổi trực giao.
- (b) Phép đối xứng trục qua một đường thẳng đi qua gốc tọa độ là một phép biến đổi trực giao.

**GIẢI.** (a) Trong mặt phẳng  $\mathbb{R}^2$ , phép quay tâm tại gốc tọa độ với góc quay  $\theta$  là một biến đổi ma trận với ma trận chính tắc là

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$



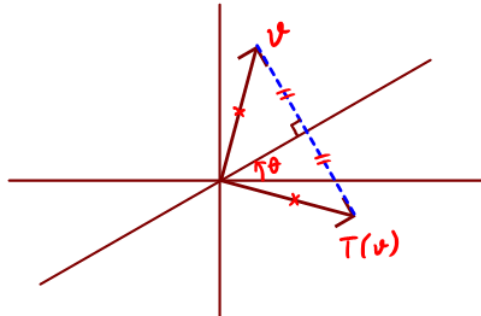
Ta có

$$A^T A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Suy ra  $A$  là một ma trận trực giao. Vậy phép quay là một phép biến đổi trực giao.

(b) Trong mặt phẳng  $\mathbb{R}^2$ , phép đối xứng trục qua đường thẳng đi qua gốc tọa độ với vectơ chỉ phương  $(\cos \theta, \sin \theta)$  là

$$A = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}.$$



Ta có

$$A^T A = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Suy ra  $A$  là một ma trận trực giao. Vậy phép đối xứng trục là một phép biến đổi trực giao. □

Sau đây là một số tính chất cơ bản của ma trận trực giao.

**ĐỊNH LÝ 7.3.5.** (a) Ma trận chuyển vị của một ma trận trực giao cũng là một ma trận trực giao.

(b) Ma trận nghịch đảo của một ma trận trực giao cũng là một ma trận trực giao.

(c) Tích của các ma trận trực giao cũng là một ma trận trực giao.

(d) Định thức của một ma trận trực giao bằng 1 hoặc  $-1$ .

**GIẢI.** Cho  $A$  và  $B$  là các ma trận trực giao cỡ  $n \times n$ . Ta có

$$A^T A = I = A A^T, \quad B^T B = I = B B^T.$$

(a) Vì  $(A^T)^T = A$  nên đẳng thức  $A^T A = I$  có thể viết lại là

$$A^T (A^T)^T = I.$$

Suy ra,  $A^T$  là một ma trận trực giao.

(b) Nghịch đảo hai vế của đẳng thức  $A^T A = I$  và sử dụng đẳng thức  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ , ta được

$$A^{-1} (A^{-1})^T = I.$$

Suy ra,  $A^{-1}$  là một ma trận trực giao.

(c) Ta có

$$(AB)^T (AB) = B^T A^T AB = B^T IB = B^T B = I.$$

Suy ra, ma trận tích  $AB$  là một ma trận trực giao.

(d) Lấy định thức hai vế  $A^T A = I$ , ta được

$$\det(A^T A) = 1.$$

Suy ra

$$(\det(A))^2 = \det(A^T) \det(A) = \det(A^T A) = 1.$$

Suy ra  $\det(A) = 1$  hoặc  $\det(A) = -1$ . □

Kết quả sau cho ta mối liên hệ giữa ma trận trực giao và cơ sở trực chuẩn.

**ĐỊNH LÝ 7.3.6.** Với một ma trận vuông  $A$  cỡ  $n \times n$ , các khẳng định sau tương đương với nhau.

- (a)  $A$  trực giao.
- (b) Hệ vectơ cột của  $A$  là một cơ sở trực chuẩn của không gian vectơ Euclid  $\mathbb{R}^n$ .
- (c) Hệ vectơ hàng của  $A$  là một cơ sở trực chuẩn của không gian vectơ Euclid  $\mathbb{R}^n$ .

**CHỨNG MINH.** Để chứng minh sự tương đương của hai khẳng định đầu tiên, ta tính  $A^T A$  thông qua các hàng của ma trận  $A$ .

Ký hiệu hệ vectơ cột của ma trận  $A$  là  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Khi đó, hệ vectơ hàng của ma trận chuyển vị  $A^T$  là  $v_1^T, v_2^T, \dots, v_n^T$ . Ta có

$$A^T A = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^T v_1 & v_1^T v_2 & \dots & v_1^T v_n \\ v_2^T v_1 & v_2^T v_2 & \dots & v_2^T v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n^T v_1 & v_n^T v_2 & \dots & v_n^T v_n \end{bmatrix}.$$

Phần tử ở vị trí  $(i, j)$  của tích  $A^T A$  là

$$v_i^T v_j = v_i \cdot v_j.$$

Vậy

$$\begin{aligned} A \text{ trực giao} &\Leftrightarrow A^T A = I \\ &\Leftrightarrow v_i \cdot v_i = 1 \text{ với mọi } i \text{ và} \\ &\quad v_i \cdot v_j = 0 \text{ với mọi } i \neq j \\ &\Leftrightarrow v_1, v_2, \dots, v_n \text{ là một hệ trực chuẩn.} \end{aligned}$$

Để chứng minh sự tương đương của khẳng định thứ nhất và thứ ba, ta sử dụng sự tương đương của hai khẳng định đầu và ma trận chuyển vị.

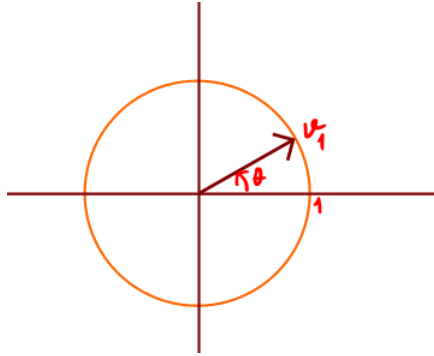
$$\begin{aligned} A \text{ trực giao} &\Leftrightarrow A^T \text{ trực giao} \\ &\Leftrightarrow \text{Hệ vectơ cột của } A^T \text{ là trực chuẩn} \\ &\Leftrightarrow \text{Hệ vectơ hàng của } A \text{ là trực chuẩn.} \end{aligned}$$



**VÍ DỤ 7.3.7.** Tìm tất cả các ma trận trực giao cỡ  $2 \times 2$ .

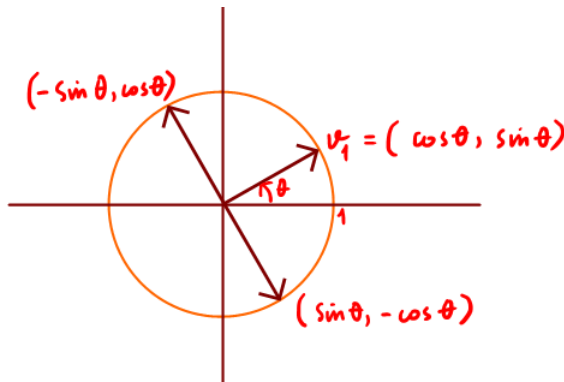
**GIẢI.** Cho  $A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$  là một ma trận cỡ  $2 \times 2$ . Theo định lý trên, ma trận  $A$  trực giao khi và chỉ hệ vectơ  $v_1, v_2$  là một cơ sở trực chuẩn của  $\mathbb{R}^2$ . Do đó, ta cần xác định tất cả các cơ sở trực chuẩn của  $\mathbb{R}^2$ :  $|v_1| = 1, |v_2| = 1, v_1 \perp v_2$ .

▷  $|v_1| = 1$  khi và chỉ khi  $v_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$ .



▷ Khi đó, hệ điều kiện  $|v_2| = 1, v_1 \perp v_2$  tương đương với  $v_2 = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$

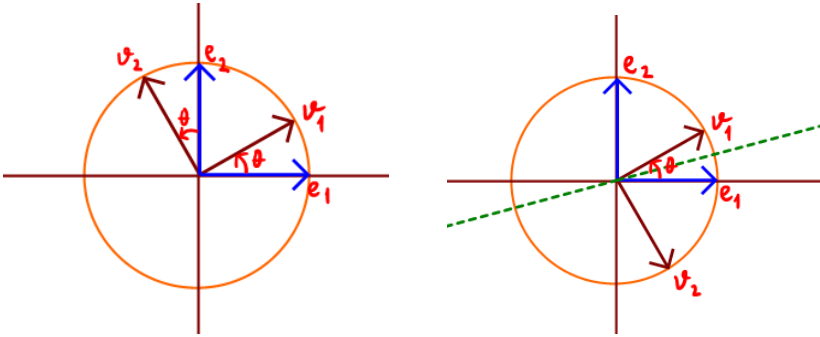
hoặc  $v_2 = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{bmatrix}$



Do đó, tất cả các ma trận trực giao cỡ  $2 \times 2$  là

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \text{ hoặc } A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}.$$

Lưu ý rằng phép biến đổi ma trận ứng với ma trận đầu tiên là phép quay, còn phép biến đổi ma trận ứng với ma trận thứ hai là phép đối xứng trục.  $\square$



### TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI TRỰC GIAO

**ĐỊNH LÝ 7.3.8.** Với mỗi ma trận trực giao  $A$  cỡ  $n \times n$ , các khẳng định sau đây tương đương với nhau.

- (a)  $A$  trực giao.
- (b)  $|Ax| = |x|$  với mọi vectơ  $x \in \mathbb{R}^n$ .
- (c)  $(Ax) \cdot (Ay) = x \cdot y$  với mọi vectơ  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

**MỆNH ĐỀ 7.3.9.** Cho  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  là một cơ sở trực chuẩn của một không gian có tích vô hướng  $V$ . Cho  $u, v \in V$ , với các vectơ tọa độ trong cơ sở  $\mathcal{B}$  là

$$[u]_{\mathcal{B}} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad [v]_{\mathcal{B}} = (b_1, b_2, \dots, b_n).$$

Khi đó

- (a)  $\langle u, v \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$ .
- (b)  $|u| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ .
- (c)  $d(u, v) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$ .

### BÀI TẬP

**7.46** [hint] Tìm ma trận trực giao trong các ma trận sau.

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

$$(c) \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$(d) \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

**7.47** [hint] Cho  $A, B$  là hai ma trận trực giao. Tìm ma trận trực giao trong các ma trận sau.

$$(a) 2A$$

$$(e) A^T$$

$$(b) AB$$

$$(f) -B$$

$$(c) A + B$$

$$(g) B^{-1}AB$$

$$(d) B^{-1}$$

**7.48** [hint] Tìm  $a, b$  để ma trận

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

là một ma trận trực giao.

**7.49** [hint] Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -5 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Hệ véc tơ hàng của  $A$  có phải là một hệ trực giao?

(b) Ma trận  $A$  có phải là một ma trận trực giao?

(c) Hệ véc tơ cột của  $A$  có phải là một hệ trực giao?

**7.50** [hint] Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -5 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Gọi  $B$  là ma trận cỡ  $3 \times 3$  có hệ véc tơ hàng là chuẩn hóa của hệ véc tơ hàng của ma trận  $A$ . Chứng minh rằng  $B$  là một ma trận trực giao.

**7.51** [hint] Tìm  $a, b, c$  để ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & b \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & c \end{bmatrix}.$$

là một ma trận trực giao.

### CHÉO HÓA TRỰC GIAO

Mục này trình bày về tính chéo hóa được của các ma trận thực đối xứng. Đây là một kết quả quan trọng, có nhiều ứng dụng.

Nhắc lại rằng một ma trận  $A$  là chéo hóa được nếu nó đồng dạng với một ma trận chéo. Ma trận  $A$  đồng dạng với ma trận  $B$  có nghĩa là tồn tại một ma trận khả nghịch  $P$  sao cho  $A = PBP^{-1}$ . Ta định nghĩa phiên bản mạnh hơn của khái niệm đồng dạng, khi yêu cầu ma trận  $P$  trong đẳng thức  $A = PBP^{-1}$  phải là một ma trận trực giao.

**ĐỊNH NGHĨA 7.3.10.** Ma trận  $A$  là **đồng dạng trực giao** với ma trận  $B$  nếu tồn tại một ma trận trực giao  $P$  sao cho

$$A = PBP^{-1} = PAP^T.$$

Theo định nghĩa, nếu  $A$  đồng dạng trực giao với  $B$  thì  $A$  cũng đồng dạng với  $B$ . Khẳng định ngược lại không đúng.

Tương tự như trường hợp đồng dạng, quan hệ đồng dạng trực giao cũng là một quan hệ tương đương trong lớp các ma trận vuông, tức là

- ▷ Mọi ma trận vuông đều đồng dạng trực giao với chính nó:  $A$  đồng dạng trực giao với  $A$ .

- ▷ Nếu  $A$  đồng dạng trực giao với  $B$  thì  $B$  cũng đồng dạng trực giao với  $A$ .
- ▷ Nếu  $A$  đồng dạng trực giao với  $B$  và  $B$  đồng dạng trực giao với  $C$  thì  $A$  đồng dạng trực giao với  $C$ .

**ĐỊNH NGHĨA 7.3.11.** Ta nói một ma trận vuông  $A$  là **chéo hóa trực giao được** nếu  $A$  đồng dạng với một ma trận chéo, tức là nếu  $A$  có **phân tích chéo hóa trực giao**

$$A = PDP^{-1} = PDP^T$$

trong đó  $D$  là một ma trận chéo và  $P$  là một ma trận trực giao.

Theo định nghĩa, một ma trận chéo hóa trực giao được thì cũng chéo hóa được.

### TIÊU CHUẨN CHÉO HÓA TRỰC GIAO ĐƯỢC

**MỆNH ĐỀ 7.3.12.** Nếu  $A$  chéo hóa trực giao được thì  $A$  đối xứng.

**CHỨNG MINH.** Cho  $A$  là một ma trận chéo hóa trực giao được, tức là

$$A = PDP^T$$

với  $D$  là một ma trận chéo và  $P$  là một ma trận trực giao. Lấy chuyển vị cả hai vế, ta được

$$A^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A.$$

Vì  $A^T = A$  nên  $A$  đối xứng. □

**ĐỊNH LÝ 7.3.13.** Cho  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$ . Các khẳng định sau đây tương đương với nhau.

- (a)  $A$  chéo hóa trực giao được.
- (b)  $\mathbb{R}^n$  có một cơ sở trực chuẩn gồm toàn vectơ riêng của  $A$ .

**CHỨNG MINH.**  $(a) \Rightarrow (b)$ . Giả sử  $A$  chéo hóa trực giao được. Khi đó,  $A$  có phân tích chéo hóa trực giao

$$A = PDP^{-1}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Vì  $P$  là một ma trận trực giao nên hệ vectơ cột  $v_1, v_2, \dots, v_n$  của  $P$  là một cơ sở trực chuẩn của  $\mathbb{R}^n$ . Mặt khác, các vectơ  $v_1, v_2, \dots, v_n$  đều là các vectơ riêng của  $A$ , với  $Av_i = \lambda_i v_i$ .

Do đó,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  là một cơ sở trực chuẩn của  $\mathbb{R}^n$  gồm toàn vectơ riêng của  $A$ .

$(b) \Rightarrow (a)$ . Giả sử  $\mathbb{R}^n$  có một cơ sở trực chuẩn  $v_1, v_2, \dots, v_n$  gồm toàn vectơ riêng của  $A$ , với  $Av_i = \lambda_i v_i$ . Khi đó  $A = PDP^{-1}$  với

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}.$$

Vì hệ vectơ  $v_1, v_2, \dots, v_n$  là một cơ sở trực chuẩn của  $\mathbb{R}^n$  nên  $P$  là một ma trận trực giao. Do đó, ma trận  $A$  chéo hóa trực giao được.  $\square$

**ĐỊNH LÝ 7.3.14.** *Tất cả các ma trận thực đối xứng đều chéo hóa trực giao được.*

### Thuật toán chéo hóa trực giao

Cho  $A$  là một ma trận thực đối xứng. Để chéo hóa trực giao  $A$ , ta tiến hành các bước như sau.

1. Tìm các giá trị riêng của  $A$ .
2. Tìm một cơ sở cho mỗi không gian con riêng của  $A$ .
3. Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt cơ sở của mỗi không gian con riêng để được cơ sở trực chuẩn.
4. Ghép lại các cơ sở trực chuẩn của các không gian con riêng để được cơ sở trực chuẩn  $v_1, v_2, \dots, v_n$  của  $\mathbb{R}^n$  gồm toàn vectơ riêng của  $A$  với các giá trị riêng tương ứng lần lượt là  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Ta nhận được phân tích chéo hóa trực giao của ma trận  $A$

$$A = PDP^{-1}$$

với ma trận chéo  $D$  và ma trận trực giao  $P$  lần lượt là

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}.$$

**VÍ DỤ 7.3.15.** Chéo hóa trực giao ma trận thực đối xứng

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

**GIẢI.** Tiến hành chéo hóa ma trận  $A$ , ta thu được bảng giá trị riêng và vectơ riêng sau

|                                    |                                                                                                      |                                                    |
|------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| Giá trị riêng                      | 2                                                                                                    | 8                                                  |
| Bội đại số                         | 2                                                                                                    | 1                                                  |
| Bội hình học                       | 2                                                                                                    | 1                                                  |
| Một cơ sở của không gian con riêng | $u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$ |

Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt cơ sở  $u_1, u_2$  của không gian con riêng  $E_2$ , ta nhận được cơ sở trực chuẩn

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Chuẩn hóa cơ sở  $u_3$  của không gian con riêng, ta nhận được cơ sở trực chuẩn

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Do đó, phân tích chéo hóa trực giao của ma trận  $A$  là

$$A = PDP^{-1}$$

với

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

□

## BÀI TẬP

**7.52** [hint] Chéo hóa trực giao các ma trận thực đối xứng

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**7.53** [hint] Chéo hóa trực giao ma trận thực đối xứng

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

## PHÂN TÍCH PHỔ

Cho  $A$  là một ma trận thực đối xứng cỡ  $n \times n$ . Giả sử ma trận  $A$  có phân tích chéo hóa trực giao

$$A = PDP^{-1} = PDP^T$$

với ma trận trực giao  $P$  và ma trận chéo  $D$  lần lượt là

$$P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \dots & \lambda_n u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} \\
&= \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \dots + \lambda_n u_n u_n^T.
\end{aligned}$$

Công thức

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \dots + \lambda_n u_n u_n^T$$

được gọi là **phân tích phổ** của ma trận  $A$ .

**MỆNH ĐỀ 7.3.16.** Cho  $u \in \mathbb{R}^n$  là một vectơ đơn vị. Khi đó, ma trận cỡ  $n \times n$

$$uu^T$$

là ma trận chính tắc của phép chiếu vuông góc lên đường thẳng  $\mathcal{L}(u)$ .

**CHỨNG MINH.** Cho  $x \in \mathbb{R}^n$  là một vectơ bất kỳ. Ta cần chứng minh

$$(uu^T)x = \text{proj}_{\mathcal{L}(u)}(x).$$

Vì vectơ  $u$  chính là một cơ sở trực chuẩn của đường thẳng  $\mathcal{L}(u)$  lên hình chiếu vuông góc của  $x$  trên  $\mathcal{L}(u)$  là

$$\text{proj}_{\mathcal{L}(u)}(x) = (u \cdot x)u.$$

Vậy

$$(uu^T)x = u(u^T x) = u[u \cdot x] = (u \cdot x)u = \text{proj}_{\mathcal{L}(u)}(x).$$

□

Từ phân tích phổ của ma trận  $A$ , và mệnh đề trên, ta nhận được kết quả sau đây.

**Corollary 6.** Cho  $A$  là một ma trận thực đối xứng cỡ  $n \times n$ . Giả sử  $u_1, u_2, \dots, u_n$  là một cơ sở trực chuẩn của  $\mathbb{R}^n$  gồm toàn vectơ riêng của  $A$  với các giá trị riêng tương ứng lần lượt là  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Khi đó

$$Ax = \lambda_1 \text{proj}_{\mathcal{L}(u_1)}(x) + \lambda_2 \text{proj}_{\mathcal{L}(u_2)}(x) + \dots + \lambda_n \text{proj}_{\mathcal{L}(u_n)}(x).$$

**VÍ DỤ 7.3.17.** Tìm phân tích phổ của ma trận thực đối xứng

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Vẽ hình minh họa tích  $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  sử dụng phân tích phổ của ma trận  $A$ .

**GIẢI.** Tiến hành chéo hóa trực giao ma trận  $A$ , ta nhận được các thông tin sau

|                                               |                                                                  |                                                                 |
|-----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| Giá trị riêng                                 | -3                                                               | 2                                                               |
| Bội đại số                                    | 1                                                                | 1                                                               |
| Bội hình học                                  | 1                                                                | 1                                                               |
| Một cơ sở của không gian con riêng            | $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$                    | $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$                    |
| Một cơ sở trực chuẩn của không gian con riêng | $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ | $u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ |

Do đó, phân tích phổ của ma trận  $A$  là

$$\begin{aligned} A &= \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T \\ &= (-3) \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} + (2) \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\ &= (-3) \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}}_{A_1} + (2) \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}}_{A_2} \end{aligned}$$

Các ma trận  $A_1$  và  $A_2$  lần lượt là ma trận chính tắc của phép chiếu vuông góc lên các đường thẳng  $\mathcal{L}(u_1)$  và  $\mathcal{L}(u_2)$ . □



**7.60** [hint] Chứng minh rằng các biến đổi trực giao đều bảo toàn góc giữa các véc tơ khác không. Khẳng định ngược lại có đúng hay không?

**7.61** [hint] Tìm tất cả các ma trận trực giao cỡ  $3 \times 3$  với véc tơ cột thứ ba là  $(0, 1, 0)$ .

**7.62** [hint] Tìm một biến đổi trực giao  $T$  từ  $\mathbb{R}^3$  đến  $\mathbb{R}^3$  thỏa mãn

$$T(3, 0, 2) = (0, 2, 3), \quad T(2, 0, -3) = (-3, 0, 2).$$

**7.63** [hint] Tìm tất cả các ma trận trực giao  $A$  sao cho  $A$  là một ma trận tam giác trên với các phần tử trên đường chéo là các số thực dương.

**7.64** [hint] Cho  $T$  là phép đối xứng qua đường thẳng  $\mathcal{L}(u)$  trong không gian véc tơ Euclid  $\mathbb{R}^3$  với  $u = (1, 2, 2)$ .

1. Chéo hóa trực giao biến đổi tuyến tính  $T$ .
2. Tìm ma trận  $A$  của  $T$  trong cơ sở chính tắc.

**7.65** [hint] Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ a & 0 & 3 & 0 \\ 0 & a & 0 & 3 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

trong đó  $a$  là một hằng số.

1. Tìm một giá trị của  $a$  sao cho  $A$  chéo hóa được.
2. Tìm một giá trị của  $a$  sao cho  $a$  không chéo hóa được.

**7.66** [hint] Chéo hóa trực giao ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**7.67** [hint] Chéo hóa trực giao ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**7.68** [hint] Cho  $A$  là một ma trận thực đối xứng cỡ  $3 \times 3$  với ba giá trị riêng phân biệt là 1, 2 và 3. Có bao nhiêu ma trận trực giao  $P$  sao cho  $P^{-1}AP$  là một ma trận chéo?

**7.69** [hint] Xét một phân tích QR

$$A = QR.$$

Chứng minh rằng  $R = Q^T A$ .

**7.70** [hint] Cho  $A$  là một ma trận khả nghịch. Chứng minh rằng ma trận  $A$  có phân tích

$$A = LQ$$

trong đó  $L$  là một ma trận tam giác dưới và  $Q$  là một ma trận trực giao.

**7.71** [hint] Cho  $A$  là một ma trận đối xứng cỡ  $n \times n$ . Chứng minh rằng tồn tại ma trận  $B$  sao cho  $B^3 = A$ .

## 7.4 DẠNG TOÀN PHƯƠNG

### ĐỊNH NGHĨA DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Các biểu thức

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \quad (6)$$

xuất hiện khi ta nghiên cứu về phương trình tuyến tính và hệ phương trình tuyến tính. Khi cố định các  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , biểu thức (6) được gọi là một **dạng tuyến tính** trên  $\mathbb{R}^n$ .

**ĐỊNH NGHĨA 7.4.1.** Một **dạng toàn phương** trên  $\mathbb{R}^n$  là một biểu thức có dạng

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} c_{ij}x_ix_j &= c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + \cdots + c_{1n}x_1x_n \\ &\quad + c_{22}x_2^2 + \cdots + c_{2n}x_2x_n + \cdots + c_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

trong đó  $c_{ij}$  là các số cố định.

Các số hạng  $c_{ij}x_ix_j$  với  $i \neq j$  xuất hiện trong dạng toàn phương được gọi là các **số hạng chéo**.

Ta nói dạng toàn phương có **dạng chính tắc** nếu nó không có chứa số hạng chéo.

**VÍ DỤ 7.4.2.** (a) Dạng toàn phương trên  $\mathbb{R}$  có dạng

$$a_{11}x_1^2.$$

(b) Dạng toàn phương trên  $\mathbb{R}^2$  có dạng

$$c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2.$$

(c) Dạng toàn phương trên  $\mathbb{R}^3$  có dạng

$$c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + c_{22}x_2^2 + c_{23}x_2x_3 + c_{33}x_3^2.$$

**Ví dụ 7.4.3.** Với mọi ma trận  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}$ , biểu thức

$$x^T Ax = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

là một dạng toàn phương.

**GIẢI.** Ta có

$$\begin{aligned} x^T Ax &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2)x_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2)x_2 \\ &= a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2. \end{aligned}$$

Do đó, biểu thức  $x^T Ax$  là một dạng toàn phương.

Nhận xét rằng dạng toàn phương  $x^T Ax$  chỉ phụ thuộc vào  $a_{11}, a_{22}$  và tổng  $a_{12} + a_{21}$ . □

**Ví dụ 7.4.4.** Với mọi ma trận  $A = [a_{ij}]$  cỡ  $3 \times 3$ , biểu thức

$$x^T Ax$$

với  $x \in \mathbb{R}^3$  là một dạng toàn phương.

**GIẢI.** Tính toán tương tự như ví dụ trên, ta có

$$\begin{aligned} &x^T Ax \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 & a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3)x_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3)x_2 \\ &\quad + (a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3)x_3 \\ &= a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + (a_{13} + a_{31})x_1x_3 + a_{22}x_2^2 \end{aligned}$$

$$+ (a_{23} + a_{32}) x_2 x_3 + a_{33} x_3^2.$$

Do đó,  $x^T A x$  là một dạng toàn phương.

Nhận xét rằng dạng toàn phương  $x^T A x$  chỉ phụ thuộc vào  $a_{11}, a_{22}, a_{33}$  và các tổng  $a_{12} + a_{21}, a_{13} + a_{31}, a_{23} + a_{32}$ .  $\square$

**ĐỊNH NGHĨA 7.4.5.** Cho  $A$  là một ma trận đối xứng cỡ  $n \times n$ . Với  $x \in \mathbb{R}^n$ , biểu thức

$$Q_A(x) = x^T A x = x \cdot (Ax) = (Ax) \cdot x$$

được gọi **dạng toàn phương liên kết với  $A$** .

**VÍ DỤ 7.4.6.** Dạng toàn phương liên kết với ma trận chéo

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

là

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2.$$

Dạng toàn phương này không chứa các số hạng chéo.

**VÍ DỤ 7.4.7.** Biểu diễn mỗi dạng toàn phương sau dưới dạng ma trận  $x^T A x$  trong đó  $A$  là một ma trận đối xứng.

(a)  $2x_1^2 + 5x_1 x_2 - 6x_2^2$ .

(b)  $x_1^2 - 7x_2^2 - 3x_3^2 + 3x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 8x_2 x_3$ .

**GIẢI.** (a) Ta có

$$2x_1^2 + 5x_1 x_2 - 6x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Ma trận đối xứng liên kết với dạng toàn phương là  $\begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -6 \end{bmatrix}$ .

(b) Ta có

$$\begin{aligned} & x_1^2 - 7x_2^2 - 3x_3^2 + 3x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3 \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & -7 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ma trận đối xứng liên kết với dạng toàn phương là  $\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & -7 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ .  $\square$

### ĐỔI BIẾN CỦA DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Một **phép đổi biến** của dạng toàn phương  $x^T Ax$  trên  $\mathbb{R}^n$  là một phép thế

$$x = Py$$

trong đó  $P$  là một ma trận vuông khả nghịch cỡ  $n \times n$  và  $y \in \mathbb{R}^n$ . Sau đổi biến, dạng toàn phương trở thành

$$(Py)^T A (Py) = y^T (P^T A P) y.$$

Ma trận đối xứng liên kết với dạng toàn phương mới là  $P^T A P$ .

Phép đổi biến được gọi là **trực giao** nếu  $P$  là một ma trận trực giao.

**ĐỊNH LÝ 7.4.8.** *Tất cả các dạng toàn phương  $Q(x)$  của  $\mathbb{R}^n$  đều có thể đổi biến trực giao một cách thích hợp để đưa về dạng chính tắc, tức là dạng không có số hạng chéo.*

*Cụ thể hơn, nếu  $A$  là ma trận đối xứng liên kết với dạng toàn phương  $Q$  và  $A = PDP^T$  là phân tích chéo hóa trực giao của ma trận  $A$  thì sau phép đổi biến  $x = Py$ , dạng toàn phương  $Q(x)$  trở thành dạng chính tắc*

$$y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

*trong đó  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  là tất cả các giá trị riêng, tính cả bội đại số, của ma trận  $A$ .*

**CHỨNG MINH.** Vì  $A$  là ma trận đối xứng liên kết với dạng toàn phương  $Q(x)$  nên

$$Q(x) = x^T A x.$$

Qua phép đổi biến  $x = Py$ , dạng toàn phương này trở thành

$$(Py)^T A (Py) = y^T (P^T A P) y = y^T D y.$$

Ta có

$$\begin{aligned} y^T D y &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2. \end{aligned}$$

□

**VÍ DỤ 7.4.9.** Tìm một phép đổi biến trực giao biến đổi dạng toàn phương

$$Q = x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$$

về dạng chính tắc và tìm dạng chính tắc này.

**GIẢI.** Ma trận đối xứng liên kết với dạng toàn phương  $Q$  là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tiến hành chéo hóa trực giao ma trận  $A$ , ta thu được bảng giá trị riêng và vectơ riêng

|                                               |                                                         |                                                           |                                                          |
|-----------------------------------------------|---------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| Giá trị riêng                                 | 0                                                       | -3                                                        | 3                                                        |
| Bội đại số                                    | 1                                                       | 1                                                         | 1                                                        |
| Bội hình học                                  | 1                                                       | 1                                                         | 1                                                        |
| Một cơ sở của không gian con riêng            | $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$             | $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$             | $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$             |
| Một cơ sở trực chuẩn của không gian con riêng | $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ | $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ | $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ |

Do đó, phân tích chéo hóa trực giao của ma trận  $A$  là

$$A = P D P^T$$

với ma trận trực giao  $P$  và ma trận chéo  $D$  lần lượt là

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Một phép đổi biến trực giao cần tìm là  $x = Py$ . Sau phép đổi biến này, dạng toàn phương  $Q$  trở thành dạng chính tắc

$$Q = x^T Ax = y^T Dy = -3y_2^2 + 3y_3^2.$$

□

## BÀI TẬP TỔNG HỢP

---

## BÀI TẬP CHƯƠNG 7

---

**7.72** [hint] Chéo hóa ma trận vuông cỡ  $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**7.73** [hint] Chéo hóa ma trận vuông cỡ  $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

**7.74** [hint] Tính thể tích của hình hộp  $n$  chiều trong không gian véc tơ Euclid  $\mathbb{R}^n$  sinh ra từ hệ  $n$  véc tơ đơn vị  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sao cho  $\angle(v_i, v_j) = \theta$  với mọi  $i \neq j$  trong đó  $\theta$  là một hằng số.

## GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 7

**7.4.** Tính  $u' = Au, v' = Av$ . Theo định nghĩa

$$\langle u, v \rangle = u' \cdot v'.$$

**7.6.** Ta cần phải chứng minh ánh xạ trong định nghĩa không thỏa mãn một trong các tiên đề nào đó của tích vô hướng. So sánh với tích vô hướng chính tắc

$$u \cdot v = x_1 y_1 - x_2 y_2,$$

ta nghi ngờ tính xác định dương. Do đó, kiểm tra tiên đề này trước.

**7.7.** Kiểm tra tiên đề đối xứng của tích vô hướng.

**7.8.** Kiểm tra tiên đề xác định dương của tích vô hướng.

**7.9.** Để chứng minh ánh xạ đã cho là một tích vô hướng, ta cần phải chỉ ra nó thỏa mãn tất cả các tiên đề của tích vô hướng.

Một cách làm khác là tìm một ma trận vuông khả nghịch  $A$  cỡ  $2 \times 2$  sao cho ánh xạ đã cho chính là tích vô hướng ma trận tương ứng với ma trận  $A$ . Tuy nhiên, ta chưa có thuật toán để tìm  $A$ , và không dễ dàng để tìm thấy ma trận này.

**7.19.** Ánh xạ đã cho không thỏa mãn tiên đề đối xứng.

**7.20.** Ánh xạ đã cho không thỏa mãn tiên đề thuần nhất.

**7.21.**

- ▷ Với mọi  $\lambda$ , chứng minh rằng ánh xạ đã cho thỏa mãn các tiên đề đối xứng, cộng tính và thuần nhất của tích vô hướng.

- ▷ Tìm điều kiện cho  $\lambda$  để ánh xạ đã cho xác định dương, tức là tìm  $\lambda$  để

$$\langle u, u \rangle = x_1^2 - 2x_1x_2 + \lambda x_2^2$$

luôn lớn hơn hoặc bằng không và  $\langle u, u \rangle = 0$  khi và chỉ khi  $u = 0$ .

**7.24.** Sử dụng công thức

$$|u + v|^2 = |u|^2 + 2\langle u, v \rangle + |v|^2$$

và công thức tương tự cho  $|u - v|^2$ .

**7.25.** Sử dụng các đẳng thức liên quan đến  $|u + v|^2$  và  $|u - v|^2$  trong bài tập trước.

**7.32.** Khai triển biểu thức  $|u_1 + u_2 + \cdots + u_r|^2$  rồi sử dụng tính trực giao của hệ véc tơ  $\mathcal{B}$ .

**7.37.** Lưu ý nhân mỗi véc tơ với một số thích hợp để đơn giản hóa các tính toán trung gian.

**7.42.** Để có một cơ sở trực giao của một không gian véc tơ nào đó, hãy trực giao hóa Gram-Schmidt một cơ sở, hoặc một hệ sinh bất kỳ của không gian véc tơ này.

**7.71.** Đầu tiên, xét trường hợp  $A$  là một ma trận chéo. Trong trường hợp tổng quát, hãy chéo hóa  $A$ .

# Hướng Dẫn Giải

## CHƯƠNG 1

---

**1.1.** Theo định nghĩa, ba phương trình đầu tiên là các phương trình tuyến tính. Ba phương trình còn lại không tuyến tính vì chúng chứa các số hạng  $y^2$ ,  $\sin x$  và  $xy$ .

**1.2.** Trong bốn phương trình trong bài tập này, ba phương trình đầu tiên là các phương trình tuyến tính còn phương trình cuối cùng thì không phải. Phương trình cuối cùng chứa số hạng  $\frac{\pi}{3} \cos x_1$ .

**1.3.** Các ma trận hệ số mở rộng của các hệ phương trình đã cho lần lượt là

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

**1.4.** Các hệ phương trình tuyến tính cần tìm lần lượt là

$$\begin{array}{rrcr} 3x_1 & & + & x_3 & = & 4 \\ 7x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

và

$$\begin{array}{rccccccc} & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & & & & & - & 3x_4 & = & 6. \end{array}$$

**1.5.** Điểm  $(x_1, y_1)$  thuộc đồ thị hàm số  $y = a + bx + cx^2$  khi và chỉ khi

$$a + bx_1 + cx_1^2 = y_1.$$

Tương tự, vì các điểm  $(x_2, y_2)$  và  $(x_3, y_3)$  thuộc đồ thị hàm số  $y = a + bx + cx^2$  nên

$$\begin{array}{rccccccc} a & + & bx_2 & + & cx_2^2 & = & y_2 \\ a & + & bx_3 & + & cx_3^2 & = & y_3. \end{array}$$

Do đó, các hệ số  $a, b, c$  là một nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{array}{rccccccc} a & + & x_1b & + & x_1^2c & = & y_1 \\ a & + & x_2b & + & x_2^2c & = & y_2 \\ a & + & x_3b & + & x_3^2c & = & y_3. \end{array}$$

Ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình này là

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & y_3 \end{bmatrix}.$$

**1.6.** Với  $1 \leq i \leq m$ , điểm  $(x_i, y_i)$  thuộc đồ thị hàm số

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

khi và chỉ khi

$$a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n = y_i.$$

Do đó, các hệ số  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  là một nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{array}{rccccccccccc} a_0 & + & x_1a_1 & + & x_1^2a_2 & + & \dots & + & x_1^na_n & = & y_1 \\ a_0 & + & x_2a_1 & + & x_2^2a_2 & + & \dots & + & x_2^na_n & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_0 & + & x_ma_1 & + & x_m^2a_2 & + & \dots & + & x_m^na_n & = & y_n. \end{array}$$

Ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính này là

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^n & y_m \end{bmatrix}.$$

**1.7.** Các phần tử dẫn đầu mỗi hàng của các ma trận trên đều có giá trị là

1. Ta có bảng các vị trí của các phần tử dẫn đầu của các ma trận là

| Ma trận | Các vị trí dẫn đầu mỗi hàng |
|---------|-----------------------------|
| $A_1$   | $(1, 1), (2, 2)$            |
| $A_2$   | $(1, 1), (2, 3), (3, 5)$    |
| $A_3$   | $(1, 1), (3, 2)$            |
| $A_4$   | $(1, 3), (2, 4), (3, 5)$    |
| $A_5$   | $(1, 1), (2, 2), (3, 2)$    |

Do đó, theo định nghĩa của ma trận bậc thang, các ma trận  $A_1, A_2$  và  $A_4$  là các ma trận bậc thang, còn  $A_3$  và  $A_5$  không là ma trận bậc thang.

Vì một ma trận bậc thang là ma trận bậc thang rút gọn khi và chỉ khi tất cả các phần tử bên trên các phần tử dẫn đầu của các hàng đều bằng không nên trong ba ma trận  $A_1, A_2$  và  $A_4$  chỉ có ma trận  $A_1$  là ma trận bậc thang rút gọn. Vậy, trong các ma trận trên, chỉ có  $A_1$  là ma trận bậc thang rút gọn, các ma trận bậc thang nhưng không bậc thang rút gọn là  $A_2$  và  $A_4$ .

**1.8.** Trong ba ma trận này, chỉ có ma trận  $A$  là một ma trận bậc thang. Ma trận  $B$  không có dạng bậc thang vì phần tử dẫn đầu của hàng 3 không nằm bên phải phần tử dẫn đầu của hàng 2. Ma trận  $C$  không có dạng bậc thang vì hàng thứ hai gồm toàn phần tử không trong khi hàng thứ ba có phần tử khác không.

**1.9.** Nếu  $b \neq 0$  thì  $b = 1$  vì nó là phần tử dẫn đầu của hàng 2. Tương tự, nếu  $c \neq 0$  thì  $c = 1$  vì nó là phần tử dẫn đầu của hàng 3. Do đó, ma trận  $A$  có thể có một trong các dạng sau đây

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ▷ Ma trận  $A_1$  hoặc  $A_2$  là một ma trận bậc thang rút gọn khi và chỉ khi  $a = 0$ , vì phần tử  $a$  nằm trên phần tử dẫn đầu của hàng 2.
- ▷ Ma trận  $A_3$  không là một ma trận bậc thang rút gọn với mọi giá trị của  $a$  vì hàng 2 gồm toàn phần tử không trong khi hàng 3 có phần tử khác không.
- ▷ Ma trận  $A_4$  là một ma trận bậc thang rút gọn với mọi giá trị của  $a$ .

Vậy  $A$  là một ma trận bậc thang rút gọn khi và chỉ khi  $(a = 0, b = 1, c = 1)$  hoặc  $(a = 0, b = 1, c = 0)$  hoặc  $(a \text{ tùy ý}, b = 0, c = 0)$ .

**1.10.** Dạng của mỗi ma trận bậc thang và bậc thang rút gọn xác định nhờ vào các vị trí dẫn đầu của các hàng của nó. Nếu tập hợp các vị trí dẫn đầu là  $\{(1, 1), (2, 3)\}$  thì dạng của ma trận bậc thang và ma trận bậc thang rút gọn cỡ  $2 \times 3$  lần lượt là

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

trong đó các phần tử  $*$  nhận giá trị bất kỳ. Tập hợp các vị trí dẫn đầu của các ma trận bậc thang cỡ  $2 \times 3$  là

$$\{(1, 1), (2, 2)\}, \{(1, 1), (2, 3)\}, \{(1, 1)\}, \{(1, 2), (2, 3)\}, \{(1, 2)\}, \{(1, 3)\}, \emptyset$$

Dạng của các ma trận bậc thang tương ứng với tập các phần tử dẫn đầu trên lần lượt là

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dạng của các ma trận bậc thang rút gọn tương ứng với tập các phần tử dẫn đầu trên lần lượt là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**1.11.** Danh sách tập hợp các vị trí dẫn đầu các hàng của các ma trận bậc thang cỡ  $3 \times 3$  là

$$\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}, \{(1, 1), (2, 2)\}, \{(1, 1), (2, 3)\}, \{(1, 1)\},$$

$$\{(1, 2), (2, 3)\}, \{(1, 2)\}, \{(1, 3)\}, \emptyset$$

Ma trận bậc thang và bậc thang rút gọn tương ứng với tập hợp các vị trí dẫn đầu  $\{(1, 1), (2, 3)\}$  lần lượt là

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**1.12.** (a) Ta có

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & -9 \\ -3 & -7 & -5 & 12 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix} \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & -9 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \end{bmatrix} \quad \left( \begin{array}{l} 3H_1 + H_3 \rightarrow H_3 \\ -H_1 + H_4 \rightarrow H_4 \end{array} \right) \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & -9 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \end{bmatrix} \quad \left( H_2 \leftrightarrow H_3 \right) \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left( \begin{array}{l} 3H_2 + H_3 \rightarrow H_3 \\ 2H_2 + H_4 \rightarrow H_4 \end{array} \right) \end{aligned}$$

(b) Ta có

$$\begin{aligned}
& \rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \left( \frac{1}{5}H_3 \rightarrow H_3 \right) \\
& \rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \left( \begin{array}{l} H_1 + 3H_3 \rightarrow H_1 \\ H_2 - 3H_3 \rightarrow H_2 \end{array} \right) \\
& \rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \left( H_1 + 2H_2 \rightarrow H_1 \right) \\
& \rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \left( -H_2 \rightarrow H_2 \right)
\end{aligned}$$

**1.13.** Ta sẽ giải các hệ phương trình tuyến tính này sử dụng khử Gauss hoặc khử Gauss-Jordan trong bài tập trên. Sử dụng khử Gauss-Jordan sẽ đơn giản hơn, nhưng chúng ta sẽ sử dụng khử Gauss.

(a) Ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính đã cho là

$$\left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & -9 \\ -3 & -7 & -5 & 12 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{array} \right].$$

Theo bài tập trên, dạng bậc thang của ma trận này là

$$\left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Do đó, trong 4 ẩn  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , chỉ có ẩn  $x_3$  là tự do. Cho  $x_3 = t$  với  $t \in \mathbb{R}$  tùy ý. Các ẩn khác là

$$\begin{aligned}x_4 &= 0, \\x_2 &= -2x_3 + 3x_4 - 3 = -2t - 3 \\x_1 &= -2x_2 - x_3 + 3x_4 - 1 = 3t + 5.\end{aligned}$$

Vậy các nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$x_1 = 3t + 5, \quad x_2 = -2t - 3, \quad x_3 = t, \quad x_4 = 0$$

với  $t \in \mathbb{R}$  tùy ý.

(b) Ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính đã cho là

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & -9 \\ -3 & -7 & 12 & 6 \\ 1 & 4 & -9 & -7 \end{bmatrix}.$$

Theo bài tập trên, dạng bậc thang của ma trận này là

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Do đó, hệ phương trình không có ẩn tự do, các ẩn ràng buộc là

$$\begin{aligned}x_3 &= 0 \\x_2 &= 3x_3 - 3 = -3 \\x_1 &= -2x_2 + 3x_3 - 1 = 5.\end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 0.$$

(c) Ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính đã cho là

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 6 & -4 \\ -3 & -7 & -5 & 12 \\ 1 & 4 & 5 & -9 \end{bmatrix}.$$

Theo bài tập trên, dạng bậc thang của ma trận này là

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hàng thứ ba của ma trận này cho ta phương trình

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 5.$$

Phương trình này vô nghiệm. Do đó, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

**1.14.** a) Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$$x_1 = -2, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 1.$$

(b) Hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

(c) Các nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$x_1 = -2t - 3, x_2 = -\frac{1}{2}t + 1, x_3 = t$$

với  $t \in \mathbb{R}$  bất kỳ.

**1.15.**

(a) Dạng bậc thang rút gọn của ma trận đã cho là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Dạng bậc thang rút gọn của ma trận đã cho là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Dạng bậc thang rút gọn của ma trận đã cho là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(d) Dạng bậc thang rút gọn của ma trận đã cho là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 1.16.

(a) Dạng bậc thang rút gọn của ma trận đã cho là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Dạng bậc thang rút gọn của ma trận đã cho là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Dạng bậc thang rút gọn của ma trận đã cho là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(d) Dạng bậc thang rút gọn của ma trận đã cho là

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(e) Dạng bậc thang rút gọn của ma trận đã cho là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**1.17.** Khử Gauss ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính đã cho, ta được

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 8 & -2 \\ 4 & 1 & a^2 - 14 & a + 2 \end{array} \right] &\rightarrow \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -14 & 10 \\ 0 & 7 & 2 - a^2 & 14 - a \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -14 & 10 \\ 0 & 0 & a^2 - 16 & a - 4 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Ta thấy

$$a^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = -4 \end{cases}, \quad a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 4$$

Ta có các trường hợp sau

- ▷ Trường hợp 1:  $a = 4$ . Hệ phương trình đã cho vô số nghiệm.
- ▷ Trường hợp 2:  $a = -4$ . Hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- ▷ Trường hợp 3:  $a \neq \pm 4$ . Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

**1.18.** Khử Gauss ma trận hệ số của hệ phương trình đã cho rồi biện luận giống như bài trên.

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 6 - a^2 & a + 2 \end{array} \right] &\rightarrow \left[ \begin{array}{cccc} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 12 & -2 & 6 \\ 0 & 12 & 2 - a^2 & a + 4 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[ \begin{array}{cccc} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 12 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & a^2 - 4 & 2 - a \end{array} \right] \end{aligned}$$

Từ đó, ta có các trường hợp sau:

| Tham số $a$    | Số nghiệm của hệ phương trình |
|----------------|-------------------------------|
| $a = 2$        | $\infty$                      |
| $a = -2$       | 0                             |
| $a \neq \pm 2$ | 1                             |

**1.19.** Để tạo ra phần tử 1 ở cột đầu tiên, ta lấy  $(-1)$  lần hàng 2 cộng vào hàng 3, sau đó, ta đổi chỗ các hàng để đưa phần tử này về vị trí  $(1, 1)$ .

$$\begin{aligned} & \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Để tạo ra phần tử 1 trong cột  $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ , ta lấy 2 lần hàng 3 cộng vào hàng 2.

$$\begin{aligned} & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ta nhận được dạng bậc thang rút gọn của ma trận đã cho ma tất cả các ma trận trung gian đều là các ma trận hệ số nguyên.

**1.20.** Đặt  $X = x^2, Y = y, Z = z^3$ . Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} 2X + Y - Z &= 3 \\ X - Y + 2Z &= 2 \\ X + Y + Z &= 6 \end{aligned}$$

Hệ phương trình này là một hệ tuyến tính. Hệ có nghiệm duy nhất  $X = 1, Y = 3, Z = 2$ . Do đó,  $x = \pm 1, y = 3, z = \sqrt[3]{2}$ .

**1.21.** Đặt  $x = \sin \alpha, y = \cos \beta, z = \tan \gamma$ . Hệ phương trình đã cho trở thành hệ phương trình tuyến tính.

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 3 \\ x - 3y + 6z &= 9 \\ -2x + 2y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

Hệ có nghiệm duy nhất  $x = 0, y = -1, z = 1$ . Do đó,  $\alpha \in \{0, \pi, 2\pi\}, \beta = \pi, \gamma \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$ .

**1.22.**  $2a + c = b$ .

**1.23.**  $2a + c = b$ .

**1.24.** (a) Vectơ cột thứ nhất của ma trận  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  là  $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ . Do đó, để khử Gauss-Jordan ma trận này, ta xét trường hợp  $a \neq 0$  và trường hợp  $a = 0$ .

▷ Trường hợp 1:  $a \neq 0$ . Khử Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} &\rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} \quad \left( -cH_1 + aH_2 \rightarrow H_2 \right) \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left( \frac{1}{ad-bc}H_2 \rightarrow H_2 \right) \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left( -bH_2 + H_1 \rightarrow H_1 \right) \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left( \frac{1}{a}H_1 \rightarrow H_1 \right) \end{aligned}$$

▷ Trường hợp 2:  $a = 0$ . Vì  $ad - bc \neq 0$  và  $a = 0$  nên  $b \neq 0$  và  $c \neq 0$ . Khử Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad \left( \underline{H_1 \leftrightarrow H_2} \right) \\ &\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left( \frac{1}{b}H_2 \rightarrow H_2 \right) \\ &\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left( -dH_2 + H_1 \rightarrow H_1 \right) \\ &\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left( \frac{1}{c}H_1 \rightarrow H_1 \right) \end{aligned}$$

Do đó, trong mọi trường hợp, ma trận bậc thang rút gọn của  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  luôn là ma trận đơn vị  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

(b) Xét hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} ax + by &= k \\ cx + dy &= l \end{aligned}$$

Ma trận hệ số của hệ này là

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Theo ý (a), ma trận bậc thang rút gọn của ma trận hệ số là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Do đó, khử Gauss-Jordan ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình trên ta được ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & k' \\ 0 & 1 & l' \end{bmatrix}$$

trong đó  $k'$  và  $l'$  là các số thực nào đó. Vậy, hệ phương trình tuyến tính đã cho luôn có nghiệm duy nhất  $x = k', y = l'$ .

**1.2.** Phương trình của đường cong bậc ba là  $y = x^3 - x^2 - 3x + 2$ .

**1.2.** Phương trình của đường cong bậc ba là  $y = x^3 - 3x + 7$ .

**1.2.** Phương trình của đường tròn là  $x^2 + y^2 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{31}{3} = 0$ .

**1.2.** Phương trình của đường tròn là  $10x^2 + 10y^2 - x - 5y - 117 = 0$ .

**1.31.** Vế phải của đẳng thức đã cho bằng

$$\frac{a(x+1)(x^2+2x+2) + b(x-1)(x^2+2x+2) + (cx+d)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+2x+1)}$$

Thu gọn tử thức của phân thức này, ta nhận được

$$(a + b + c)x^3 + (3a + b + d)x^2 + (4a - c)x + 2a - 2b - d$$

Do đó, đẳng thức ban đầu tương đương với

$$3x^3 + 4x^2 - 6x = (a + b + c)x^3 + (3a + b + d)x^2 + (4a - c)x + 2a - 2b - d$$

So sánh các hệ số của các lũy thừa của  $x$ , ta nhận được hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{array}{rrrrrr} a & + & b & + & c & = & 3 \\ 3a & + & b & & & + & d = 4 \\ 4a & & & - & c & = & -6 \\ 2a & - & 2b & & & - & d = 0 \end{array}$$

Hệ này có nghiệm duy nhất  $a = \frac{1}{10}, b = -\frac{7}{2}, c = \frac{32}{5}, d = \frac{36}{5}$ .

**1.32.** Từ kết quả trong bài tập trước và tính chất tuyến tính của tích phân, ta được

$$I = \frac{1}{10} \underbrace{\int \frac{1}{x-1} dx}_{I_1} - \frac{7}{2} \underbrace{\int \frac{1}{x+1} dx}_{I_2} + \frac{1}{5} \underbrace{\int \frac{32x+36}{x^2+2x+2} dx}_{I_3}$$

Vì  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$  nên

$$I_1 = \ln|x-1| + c_1, \quad I_2 = \ln|x+1| + c_2$$

Để tính  $I_3$ , lưu ý rằng đạo hàm của mẫu thức  $(x^2 + 2x + 2)$  là  $2x + 2$ . Suy ra

$$I_3 = 16 \underbrace{\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx}_{I_4} + 4 \underbrace{\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx}_{I_5}$$

Vì  $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| + c$  nên

$$I_4 = \ln|x^2 + 2x + 2| + c_3$$

Vì  $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan(x) + c$  nên

$$I_5 = \int \frac{1}{(x+1)^2+1} dx = \arctan(x+1) + c_4$$

Từ đó, ta nhận được tích phân cần tìm

$$I = \frac{1}{10} \ln |x-1| - \frac{7}{2} \ln |x+1| + \frac{16}{5} \ln |x^2 + 2x + 2| \\ + \frac{4}{5} \arctan(x+1) + c.$$

**1.33.** Giả sử

$$f(x) = a + bx + cx^2.$$

Từ giả thiết, ta có hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{array}{rrcrcl} a & - & b & + & c & = & -3 \\ a & + & 3b & + & 9c & = & 1 \\ & & b & + & 4c & = & -1 \end{array}.$$

Hệ này có nghiệm duy nhất

$$a = 1, b = 3, c = -1.$$

Vậy đa thức cần tìm là  $f(x) = 1 + 3x - x^2$ .

**1.34.** Đa thức cần tìm là  $f(x) = -2 + x - 2x^2 + x^3$ .

**1.35.** Gọi  $f(x) = a + bx + cx^2$  là đa thức cần tìm. Từ giả thiết, ta có hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{array}{rrcrcl} a & - & b & + & c & = & p \\ a & + & b & + & c & = & q \\ a & + & 2b & + & 4c & = & r. \end{array}$$

Lưu ý rằng trong hệ trên, các ẩn là  $a, b, c$ , còn  $p, q, r$  là các tham số. Ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính này là

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & p \\ 1 & 1 & 1 & q \\ 1 & 2 & 4 & r \end{bmatrix}.$$

Khử Gauss ma trận này, ta thu được ma trận bậc thang

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & p \\ 0 & 2 & 0 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & p-3q+2r \end{bmatrix}.$$

Hệ phương trình tuyến tính trên có nghiệm duy nhất với mọi  $p, q, r$ . Nghiệm duy nhất là

$$a = \frac{1}{3}(p + 3q - r), \quad b = \frac{1}{2}(q - p), \quad c = \frac{1}{6}(p - 3q + 2r).$$

Vậy đa thức cần tìm là

$$\frac{1}{3}(p + 3q - r) + \frac{1}{2}(q - p)x + \frac{1}{6}(p - 3q + 2r)x^2.$$

**1.36.** Đa thức cần tìm là  $f(x) = -3 + 2x + x^2$ .

**1.37.** Ta sẽ tìm điều kiện cần và đủ cho  $x, y, z$  để hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} x &= 2 + 3t \\ y &= -3 + t \\ z &= 4 - 2t. \end{aligned}$$

có nghiệm, với ẩn là  $t$ . Ta viết lại phương trình này dưới dạng

$$\begin{aligned} 3t &= x - 2 \\ t &= y + 3 \\ -2t &= z - 4. \end{aligned}$$

Ma trận hệ số mở rộng của hệ này là

$$\begin{bmatrix} 3 & x - 2 \\ 1 & y + 3 \\ -2 & z - 4 \end{bmatrix}.$$

Khử Gauss ma trận này, ta được

$$\begin{bmatrix} 3 & x - 2 \\ 0 & -x + 3y + 11 \\ 0 & 2x + 3z - 16 \end{bmatrix}.$$

Do đó, điều kiện của  $x, y, z$  là

$$\begin{array}{ccccccc} -x & + & 3y & & + & 11 & = & 0 \\ 2x & & & + & 3z & - & 16 & = & 0. \end{array}$$

Vậy một hệ phương trình cần tìm là

$$\begin{array}{rcl} -x & + & 3y & = & -11 \\ 2x & & & + & 3z & = & 16. \end{array}$$

**1.38.** Các điểm trên đường thẳng đi qua hai điểm  $(6, 4, 2)$  và  $(1, 1, 1)$  có mô tả tham số là

$$x = 6 - 5t, \quad y = 4 - 3t, \quad z = 2 - t.$$

Một hệ phương trình cần tìm là

$$\begin{array}{rcl} -3x & + & 5y & = & 2 \\ -x & & & + & 5z & = & 4. \end{array}$$

**1.39.**

(a) Tồn tại tích  $AB$ . Hàng thứ hai của  $AB$  là  $\begin{bmatrix} -5 & 31 & -38 & 5 \end{bmatrix}$ .

(b) Tồn tại tích  $ABC$ . Phần tử ở vị trí  $(2, 2)$  của  $ABC$  là 99.

(c) Cột thứ ba của  $C^T B$  là  $\begin{bmatrix} 67 \\ 24 \\ 10 \end{bmatrix}$ .

(d) Không tồn tại.

**1.40.**

(a)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ .

(b) Hàng thứ hai của  $A^2$  là  $\begin{bmatrix} 38 & 50 & 62 \end{bmatrix}$ .

(c) Phần tử ở vị trí  $(2, 3)$  của  $A + B^T C$  là 0.

**1.41.** Giả sử  $A$  có cỡ  $m \times n$  và  $B$  có cỡ  $k \times l$ .

- (a) Vì  $AB$  tồn tại nên  $n = k$ . Vì  $BA$  tồn tại nên  $l = m$ . Do đó,  $B$  có cỡ  $n \times m$ . Suy ra, cỡ của  $AB$  là  $m \times m$ , cỡ của  $BA$  là  $n \times n$ . Vậy  $AB$  và  $BA$  là các ma trận vuông.
- (b) Vì  $BA$  tồn tại nên  $l = m$ . Khi đó ma trận  $BA$  có cỡ  $k \times n$ . Vì  $A(BA)$  tồn tại nên  $n = k$ . Vậy ma trận  $B$  có cỡ  $n \times m$ .

## 1.42.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 7 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \begin{array}{rrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & 7 \\ 7x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 = -4 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 = 1. \end{array}$$

## 1.43.

$$(a) \text{ Ta có } A^2 = AA = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \text{ và}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

- (b) Với  $n = 1, 2, 3, 4$ , ta thấy các phần tử của  $A^n$  bằng nhau và đều bằng lũy thừa của 2 với các số mũ lần lượt là 0, 1, 2, 3. Từ đó, ta đi đến dự đoán

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$$

với mọi  $n$  nguyên dương.

Khẳng định đúng với  $n = 1$  vì đây chính là định nghĩa của ma trận  $A$ . Bây giờ, giả sử khẳng định đúng với  $n = k$ , tức là  $A^k = \begin{bmatrix} 2^{k-1} & 2^{k-1} \\ 2^{k-1} & 2^{k-1} \end{bmatrix}$ . Khi đó

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{bmatrix} 2^{k-1} & 2^{k-1} \\ 2^{k-1} & 2^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^k & 2^k \\ 2^k & 2^k \end{bmatrix}.$$

Suy ra khẳng định đúng với  $n = k$ . Theo nguyên lý quy nạp toán học, khẳng định trên là đúng với mọi số nguyên dương  $n$ , tức là ta luôn có

## 1.44.

$$(a) \quad A^2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 2\lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} \lambda^3 & 0 \\ 3\lambda^2 & \lambda^3 \end{bmatrix}, A^4 = \begin{bmatrix} \lambda^4 & 0 \\ 4\lambda^3 & \lambda^4 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \quad A^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & 0 \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{bmatrix}.$$

## 1.45.

(a) Ta có

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tính toán tương tự, ta được

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} \cos 3\theta & \sin 3\theta \\ -\sin 3\theta & \cos 3\theta \end{bmatrix}, A^4 = A^3 A = \begin{bmatrix} \cos 4\theta & \sin 4\theta \\ -\sin 4\theta & \cos 4\theta \end{bmatrix}.$$

(b) Từ các công thức của  $A, A^2, A^3, A^4$ , ta đi đến dự đoán

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}.$$

Công thức này được chứng minh bằng quy nạp theo  $n$ , sử dụng hai đẳng thức lượng giác quen thuộc  $\cos \alpha$

$$\cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta), \quad \sin \alpha \cos \theta + \cos \theta \sin \beta = \sin(\alpha + \beta).$$

## 1.46.

(a) Ta có

$$v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad Av = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos \theta + b \sin \theta \\ -a \sin \theta + b \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \|Av\|^2 &= (a \cos \theta + b \sin \theta)^2 + (-a \sin \theta + b \cos \theta)^2 \\ &= a^2 \cos^2 \theta + 2ab \cos \theta \sin \theta + b^2 \sin^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta - 2ab \sin \theta \cos \theta + \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \|Av\| = \|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

(b) Ta có

$$\begin{aligned} \langle v, Av \rangle &= a(a \cos \theta + b \sin \theta) + b(-a \sin \theta + b \cos \theta) \\ &= (a^2 + b^2) \cos \theta. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\cos \angle(v, Av) = \frac{\langle v, Av \rangle}{\|v\| \|Av\|} = \frac{(a^2 + b^2) \cos \theta}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \theta.$$

Cùng với điều kiện  $0 \leq \theta \leq \pi$ , ta được  $\angle(v, Av) = \theta$ .

**1.47.** Ta có

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ -6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 - 6b & ab - b \\ -6a + 6 & -6b + 1 \end{bmatrix}.$$

Do đó, phương trình  $A^2 = -I$  tương đương với

$$\begin{aligned} a^2 - 6b &= -1 \\ -6a + 6 &= 0 \\ ab - b &= 0 \\ -6b + 1 &= -1 \end{aligned}$$

Từ các phương trình thứ hai và thứ tư của hệ trên, ta được  $a = 1, b = \frac{1}{3}$ .

Vì các giá trị này thỏa mãn các phương trình còn lại nên  $a = 1, b = \frac{1}{3}$  là nghiệm duy nhất của hệ phương trình trên. Vậy  $a = 1$  và  $b = \frac{1}{3}$ .

**1.48.** Ta tìm các căn bậc hai của ma trận  $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$  có dạng  $A = \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix}$ .  
 Vì

$$A^2 = \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^2 & 2x^2 \\ 2x^2 & 2x^2 \end{bmatrix}$$

nên phương trình  $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$  tương đương với

$$2x^2 = 2.$$

Các nghiệm của phương trình này là  $x = 1$  và  $x = -1$ . Do đó, hai căn bậc hai của  $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$  là  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  và  $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ .

**1.49.** Gọi  $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  là một căn bậc hai của  $\begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ . Ta thấy

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ac + cd \\ ab + bd & bc + d^2 \end{bmatrix}.$$

Do đó, phương trình  $A^2 = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$  tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 + bc & = & 25 & (1) \\ ab + bd & = & 0 & (2) \\ ac + cd & = & 0 & (3) \\ bc + d^2 & = & 7 & (4) \end{cases}$$

Từ (1) và (4) suy ra  $a^2 \neq d^2$ , tức là  $a \neq d$  và  $a \neq -d$ . Sử dụng  $a \neq -d$  và các phương trình (2) và (3), ta được  $b = 0$ ,  $c = 0$ . Thay  $b = 0$ ,  $c = 0$  vào các phương trình (1) và (4) ta được  $a^2 = 25$ ,  $d^2 = 7$ . Do đó  $a = 5$  hoặc  $a = -5$ ,  $d = \sqrt{7}$  hoặc  $d = -\sqrt{7}$ . Vậy các căn bậc hai của  $\begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$  là

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \sqrt{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -\sqrt{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & \sqrt{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -\sqrt{7} \end{bmatrix}.$$

**1.50.** Xét các ma trận chéo  $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ . Từ chứng minh ý trên ta thấy rằng ma trận  $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  là một căn bậc hai của  $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$  khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a^2 + bc &= \alpha \\ ab + bd &= 0 \\ ac + cd &= 0 \\ bc + d^2 &= \beta \end{cases}$$

Để có thể lí luận giống như bài tập trên, giả sử thêm rằng  $\alpha \neq \beta$ . Lí luận như bài tập trên ta được  $b = c = 0, a^2 = \alpha, b^2 = \beta$ . Hệ phương trình này vô nghiệm nếu  $\alpha < 0$  hoặc  $\beta < 0$ . Do đó, nếu  $\alpha < 0$  hoặc  $\beta < 0$  thì ma trận  $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$  không có căn bậc hai.

**1.51.** Ma trận  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  thỏa mãn  $A \neq 0$  và  $A^2 = 0$ . Do đó, tồn tại ma trận vuông  $A$  cỡ  $2 \times 2$  thỏa mãn  $A \neq 0$  và  $A^2 = 0$ . Ta giải thích cách tìm ma trận  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  như sau.

Giả sử  $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ . Vì  $A \neq 0$  nên ít nhất một trong các  $a_{ij}$  khác không. Để  $A^2 = 0$ , ta nên cho nhiều phần tử  $a_{ij}$  bằng không. Từ các suy luận trên, ta chọn ma trận  $A$  có 3 phần tử bằng không, và một phần tử khác không, tức là  $A$  có một trong các dạng

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

với  $a \neq 0$ . Bình phương của các ma trận này lần lượt là

$$\begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}.$$

Do đó, các ma trận  $A$  có dạng  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}$  hoặc  $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  với  $a \neq 0$  thỏa mãn  $A \neq 0$  và  $A^2 = 0$ .

**1.52.** Ta tìm các ma trận chéo  $A$  thỏa mãn  $A^2 = A$ . Giả sử  $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ .

Khi đó

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}.$$

Do đó,  $A^2 = A$  khi và chỉ khi  $a^2 = a$  và  $b^2 = b$ , tức là  $a = 0$  hoặc  $a = 1$ ;  $b = 0$  hoặc  $b = 1$ . Các ma trận chéo  $A$  thỏa mãn  $A^2 = A$  là

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vậy tồn tại ma trận vuông  $A$  cỡ  $2 \times 2$  sao cho  $A \neq 0, A \neq I$  và  $A^2 = A$ .

**1.53.** Hai biến đổi tương đương (1) và (2) là đúng. Ta có (1) vì đã cộng cả hai vế của phương trình  $x^2 = I$  với  $-I$ . Ta có (2) vì

$$(x - I)(x + I) = x^2 + xI - Ix - I^2 = x^2 + x - x - I^2 = x^2 - I^2.$$

Biến đổi tương đương (3) có thể không đúng vì tồn tại hai ma trận  $A$  và  $B$  khác không sao cho  $AB = 0$ .

Để có thể khẳng định (3) sai, ta sẽ chỉ ra ma trận  $A \in M_{2 \times 2}$ ,  $A \neq I$ ,  $A \neq -I$  sao cho  $A^2 = I$ . Ta tìm  $A$  trong lớp các ma trận chéo,  $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ . Khi

đó,  $A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}$ . Ta có

$$A^2 = I \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ hoặc } a = -1 \\ b = 1 \text{ hoặc } a = -1. \end{cases}$$

Do đó, các ma trận chéo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

thỏa mãn mong muốn trên.

**1.54.** Giả sử  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  và  $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ . Ta có  $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{n \times n}$ . Theo định nghĩa, vết của một ma trận vuông là tổng các phần tử trên đường chéo của nó.

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii},$$

$$\operatorname{tr}(B) = \sum_{i=1}^n b_{ii}, \quad \operatorname{tr}(A+B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}).$$

Vì

$$\sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \left( \sum_{i=1}^n a_{ii} \right) + \left( \sum_{i=1}^n b_{ii} \right).$$

nên  $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$  như mong muốn.

**1.55.** Giả sử  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  và  $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ . Đặt  $G = AB = [g_{ij}]_{n \times n}$  và  $H = BA = [h_{ij}]_{n \times n}$ .

$$g_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

Suy ra

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n g_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}.$$

Ta tính  $\operatorname{tr}(BA)$  một cách tương tự

$$h_{ij} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{in}a_{nj} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj},$$

$$\operatorname{tr}(BA) = \sum_{i=1}^n \operatorname{tr}_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{ki}.$$

Vậy  $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ .

### 1.56.

- a. Khẳng định đúng. Đặt  $B = A^T, C = (A^T)^T = B^T$ . Ta cần chỉ ra  $C = A$ . Cố định một cặp  $(i, j)$ , ta có

$$\begin{aligned} c_{ij} &= b_{ji} \quad (\text{vì } C = B^T) \\ &= a_{ij} \quad (\text{vì } B = A^T). \end{aligned}$$

Suy ra  $C = A$ .

- b. Khẳng định sai. Để có phản ví dụ, lấy hai ma trận  $A, B$  cỡ  $2 \times 2$  nào đó đơn giản và tính  $\operatorname{tr}(AB)$ ,  $\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$ . Sửa lại.
- c. Khẳng định sai. Ta biết rằng  $(AB)^T = B^T A^T$ . Do đó, để có phản ví dụ, chỉ cần chọn hai ma trận  $A$  và  $B$  không giao hoán với nhau. Sửa lại kết luận:  $(AB)^T = B^T A^T$ .

d. Khẳng định đúng. Đặt  $B = A^T$ . Khi đó  $b_{ij} = a_{ji}$ . Suy ra  $b_{ii} = a_{ii}$ . Nói cách khác, khi biến đổi  $A$  thành  $A^T$ , ta không thay đổi gì trên trên đường chéo của ma trận. Vết của ma trận chỉ liên quan đến đường chéo. Do đó,  $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$ .

e. Khẳng định đúng. Đặt  $B = kA$ . Suy ra  $b_{ij} = ka_{ij}$  với mọi  $i, j$ . Ta có

$$\text{tr}(kA) = \text{tr}(B) = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n ka_{ii} = k \sum_{i=1}^n a_{ii} = k \text{tr}(A).$$

**1.57.** Vì  $A$  và  $B$  đối xứng nên  $A^T = A$  và  $B^T = B$ . Suy ra

$$(AB)^T = B^T A^T = BA.$$

Do đó

$$\begin{aligned} AB \text{ đối xứng} &\Leftrightarrow (AB)^T = AB \\ &\Leftrightarrow BA = AB \\ &\Leftrightarrow A \text{ và } B \text{ giao hoán.} \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

**1.58.** Ta có

$$\begin{aligned} (A - B)(A + B) &= A^2 + AB - BA - B^2 \\ &= A^2 - B^2 + AB - BA. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) &\Leftrightarrow 0 = AB - BA \\ &\Leftrightarrow AB = BA. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

**1.59.**

a. Ta có

$$A^2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 2\lambda & \lambda^2 & 0 \\ 1 & 2\lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} \lambda^3 & 0 & 0 \\ 3\lambda^2 & \lambda^3 & 0 \\ 3\lambda & 3\lambda^2 & \lambda^3 \end{bmatrix},$$

và

$$A^4 = \begin{bmatrix} \lambda^4 & 0 & 0 \\ 4\lambda^3 & \lambda^4 & 0 \\ 6\lambda^2 & 4\lambda^3 & \lambda^4 \end{bmatrix}.$$

b. Từ các tính toán trên ta đi đến dự đoán

$$A^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ a_n \lambda^n & \lambda^n & 0 \\ b_n \lambda^{n-1} & a_n \lambda^n & \lambda^n \end{bmatrix},$$

trong đó  $a_n$  và  $b_n$  là các số thực. Ta có bảng sau

|       |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|
| $n$   | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $a_n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $b_n$ | 0 | 1 | 3 | 6 |

Từ đây ta dự đoán  $a_n = n$  với mọi  $n$ . Dự đoán cho  $b_n$  khó hơn. Tính các hiệu  $b_{n+1} - b_n$ . Ta thấy  $b_{n+1} - b_n = a_n$  với  $n = 1, 2, 3$ . Ta dự đoán  $b_{n+1} - b_n = a_n$  với mọi  $n$ . Vì  $a_n = n$  nên

$$b_{n+1} = b_n + n.$$

Ta có

$$\begin{aligned} b_1 &= 0 \\ b_2 &= b_1 + 1 = 0 + 1 \\ b_3 &= b_2 + 2 = 0 + 1 + 2 \\ b_4 &= b_3 + 3 = 0 + 1 + 2 + 3 \\ &\dots \end{aligned}$$

Do vậy  $b_n = 0 + 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$ . Tóm lại, ta dự đoán công thức của  $A^n$  là

$$A^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} & n\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{bmatrix}.$$

c. Chứng minh dự đoán bằng quy nạp theo  $n$  với chú ý  $A^{n+1} = A^n A$ .

### 1.60.

(a) Ta có

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Cho  $n$  là một số nguyên dương. Ta đã có  $N, N^2, N^3$ . Với  $n \geq 4$ , ta có

$$N^n = N^3 N^{n-3} = 0 N^{n-3} = 0.$$

(c) Vì hai ma trận  $I$  và  $N$  giao hoán với nhau và  $N^3 = N^4 = \dots = 0$  nên

$$\begin{aligned} A^n &= (\lambda I + N)^n \\ &= (\lambda I)^n + \binom{n}{1}(\lambda I)^{n-1}N + \binom{n}{2}(\lambda I)^{n-2}N^2 \\ &= \lambda^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \binom{n}{1}\lambda^{n-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \lambda^n & 0 \\ \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1.61.

$$\begin{bmatrix} \lambda^n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \lambda^n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \lambda^n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \binom{n}{p-2}\lambda^{n-p+2} & \binom{n}{p-3}\lambda^{n-p+3} & \binom{n}{p-4}\lambda^{n-p+4} & \dots & \lambda^n & 0 \\ \binom{n}{p-1}\lambda^{n-p+1} & \binom{n}{p-2}\lambda^{n-p+2} & \binom{n}{p-3}\lambda^{n-p+3} & \dots & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{bmatrix}.$$

1.62.

$$1. A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$2. A = \begin{bmatrix} -\frac{88}{22} & -\frac{148}{180} \\ -\frac{13}{13} & -\frac{13}{13} \end{bmatrix}.$$

**1.63.** Tìm các căn bậc hai của  $I$ , là ma trận chéo, ta được 8 ma trận

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

trong đó mỗi  $a, b, c$  nhận giá trị 1 hoặc  $-1$ .

**1.64.** Từ đẳng thức  $2A^3 - A + I = 0$ , ta sẽ tạo ra một ma trận  $B$  thỏa mãn  $AB = I$ . Ta có

$$\begin{aligned} & 2A^3 - A + I = 0 \\ \Rightarrow & 2A^3 - A = -I \\ \Rightarrow & A(2A^2 - I) = -I \\ \Rightarrow & A(I - 2A^2) = I. \end{aligned}$$

Do đó,  $A$  khả nghịch với  $A^{-1} = I - 2A^2$ .

**1.66.** Đang cập nhật.

**1.67.** Ta có

$$\begin{aligned} AB = AC & \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}AC \\ & \Rightarrow IB = IC \\ & \Rightarrow B = C. \end{aligned}$$

**1.68.**

- a. Vì ta có thể nhân  $A$  với  $M$  nên  $M$  là một ma trận vuông cỡ  $2 \times 2$ ,  
 $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . Ta có

$$AM = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 2a + 4c & 2b + 4d \end{bmatrix}.$$

Do đó, phương trình  $AM = 0$  tương đương với hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} a + 2c &= 0 \\ b + 2d &= 0 \\ 2a + 4c &= 0 \\ 2b + 4d &= 0. \end{aligned}$$

Hệ này tương đương với

$$\begin{aligned} a + 2c &= 0 \\ b + 2d &= 0. \end{aligned}$$

Cho  $c = t$ ,  $d = s$  là các tham số tự do, ta được

$$a = -2t, \quad b = -2s, \quad c = t, \quad d = s.$$

Vậy các ma trận  $M$  cần tìm là  $\begin{bmatrix} -2t & -2s \\ t & s \end{bmatrix}$  với  $t, s \in \mathbb{R}$  bất kì.

- b. Vì  $AB = AC$  tương đương với  $AB - AC = 0$ , tức là  $A(B - C) = 0$  nên ta có thể cho  $C$  là một ma trận tùy ý và  $B = C + M$  với  $M$  là một ma trận khác không trong ý (a).

### 1.69.

- (a) Vì  $I$  và  $A$  giao hoán nên

$$(I - A)^2 = I^2 - 2IA + A^2 = I - 2A + A^2.$$

Theo giả thiết,  $A^2 = A$ . Do đó  $(I - A)^2 = I - 2A + A = I - A$ . Vậy  $I - A$  là lũy đẳng.

- (b) Điều phải chứng minh tương đương với đẳng thức  $(2A - I)^2 = I$ .  
 Tính toán như ý (a), ta có

$$\begin{aligned} (2A - I)^2 &= (2A)^2 - 2(2A)I + I^2 \\ &= 4A^2 - 4A + I \\ &= 4A - 4A + I \\ &= I. \end{aligned}$$

**1.70.** Vì  $A$  lũy linh nên tồn tại số nguyên dương  $p$  sao cho  $A^p = 0$ . Nhân  $I - A$  với tổng  $I + A + \dots + A^k$ , ta được

$$\begin{aligned}(I - A)(I + A + \dots + A^k) &= I + A + \dots + A^k \\ &\quad - A - A^2 - \dots - A^{k+1} \\ &= I - A^{k+1}.\end{aligned}$$

Do đó, với  $k = p - 1$ , sử dụng  $A^p = 0$ , ta được

$$(I - A)(I + A + \dots + A^{p-1}) = I.$$

Vậy  $I - A$  khả nghịch với nghịch đảo là  $I + A + \dots + A^{p-1}$ .

**1.71.** Vì  $A$  là một ma trận sơ cấp nên  $A$  thu được từ ma trận đơn vị  $I \in M_{3 \times 3}$  sau một phép biến đổi hàng sơ cấp.

- ▷ Thực hiện đổi chỗ hai hàng của ma trận đơn vị ta không thể thu được ma trận  $A$ .
- ▷  $A$  thu được từ  $I$  sau khi nhân một số vào một hàng của  $I$  khi và chỉ khi  $a = b = c = 0, c \neq 0$ .
- ▷  $A$  thu được từ  $I$  sau khi lấy một bội của một hàng cộng vào một hàng khác khi và chỉ khi  $(a = 0, c = 1)$  hoặc  $(b = 0, c = 1)$ .

Vậy  $A$  là một ma trận sơ cấp khi và chỉ khi  $(a = b = 0, c \neq 0)$  hoặc  $(a = 0, c = 1)$  hoặc  $(b = 0, c = 1)$ . Ma trận  $A$  tương ứng là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{bmatrix}.$$

**1.73.**

(a) Nghịch đảo của ma trận đã cho là

$$\begin{bmatrix} -\frac{7}{40} & \frac{11}{20} & -\frac{19}{40} \\ \frac{4}{11} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{7} \\ \frac{4}{40} & -\frac{2}{20} & \frac{4}{40} \end{bmatrix}.$$

(b) Nghịch đảo của ma trận đã cho là

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{5}{5} & \frac{5}{5} & -\frac{5}{5} & -\frac{5}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.74.

(a) Nghịch đảo của ma trận đã cho là

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Nghịch đảo của ma trận đã cho là

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{26} & \frac{2\sqrt{2}}{13} & 0 \\ -\frac{3\sqrt{2}}{26} & \frac{\sqrt{2}}{26} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

1.75.

(a) Khử Gauss-Jordan

$$\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & k_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & 0 & \frac{1}{k_3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right].$$

Vậy nghịch đảo của ma trận đã cho là

$$\left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & \frac{1}{k_3} \\ 0 & \frac{1}{k_2} & 0 \\ \frac{1}{k_1} & 0 & 0 \end{array} \right].$$

(b) Khử Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} k & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} k & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} k & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 0 & -1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} k & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 0 & -1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k^3 & 1 & -k & k^2 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k^3} & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Vậy nghịch đảo của ma trận đã cho là

$$\left[ \begin{array}{ccc} \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 \\ \frac{1}{k^3} & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} \end{array} \right].$$

**1.76.** Khử Gauss ma trận  $A$ 

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & a & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & a-6 & -9 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \\
&\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & a-6 & -9 \end{bmatrix} \\
&\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 9a-18 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Vậy ma trận đã cho khả nghịch khi và chỉ khi  $9a - 18 \neq 0$ , tức là  $a \neq 2$ .

**1.77.**

- (a) Ma trận đã cho khả nghịch khi và chỉ khi  $c \neq 0$  và  $c \neq 1$ .  
 (b) Ma trận đã cho khả nghịch khi và chỉ khi  $c \neq 0$ ,  $c \neq \sqrt{2}$  và  $c \neq -\sqrt{2}$ .

**1.78.**

- (a) Nghịch đảo của ma trận đã cho là

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{9}{8} & -\frac{3}{8} \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (b) Nghịch đảo của ma trận đã cho là

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{22} & -\frac{1}{22} & \frac{3}{11} \\ -\frac{5}{22} & \frac{3}{22} & \frac{2}{11} \\ \frac{3}{22} & \frac{2}{22} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}.$$

- (c) Nghịch đảo của ma trận đã cho là

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & \frac{7}{2} \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

(d) Nghịch đảo của ma trận đã cho là

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix}.$$

(e) Nghịch đảo của ma trận đã cho là

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{19} & -\frac{7}{38} & \frac{3}{38} \\ -\frac{19}{6} & -\frac{38}{1} & -\frac{38}{5} \\ -\frac{19}{19} & \frac{1}{38} & \frac{3}{38} \end{bmatrix}.$$

### 1.79.

(a) Ma trận nghịch đảo là

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Ma trận nghịch đảo là

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Ma trận nghịch đảo là

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(d) Ma trận nghịch đảo là

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

(e) Ma trận nghịch đảo là

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

### 1.80.

(a) Ma trận nghịch đảo là

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{k_2} \\ \frac{1}{k_1} & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Ma trận nghịch đảo là

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 1.4.

(a) Từ các công thức nghịch đảo của ma trận  $A$  khi  $n = 2, 3, 4$  trong các bài tập trên, ta đi đến dự đoán

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{k_n} \\ 0 & \cdots & \frac{1}{k_{n-1}} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{k_1} & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Ta tìm  $A^{-1}$  bằng phương pháp khử Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned}
[A \mid I] &= \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 0 & \cdots & 0 & k_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & k_2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_n & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ k_n & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right] \\
&\xrightarrow{(1)} \left[ \begin{array}{cccc|cccc} \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k_2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] \\
&\xrightarrow{(2)} \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{k_n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \frac{1}{k_2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{k_1} & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

trong biến đổi (1), ta đã thực hiện các phép biến đổi sơ cấp  $H_i \leftrightarrow H_{n+1-i}$  với  $i < \frac{n+1}{2}$ , trong biến đổi (2), ta đã thực hiện các phép biến đổi sơ cấp  $\frac{1}{k_n}H_1 \rightarrow H_1, \frac{1}{k_{n-1}}H_2 \rightarrow H_2, \dots, \frac{1}{k_1}H_n \rightarrow H_n$ . Ta thu được công thức của  $A^{-1}$  đã dự đoán bên trên. Vậy nghịch đảo của ma trận  $A$  là

$$\left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{k_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{k_2} & \cdots & 0 \\ \frac{1}{k_1} & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right].$$

## 1.82.

(a) Ma trận nghịch đảo là

$$\left[ \begin{array}{cc} \frac{1}{k} & 0 \\ -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} \end{array} \right].$$

(b) Ma trận nghịch đảo là

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k^3} & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 \\ -\frac{1}{k^4} & \frac{1}{k^3} & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} \end{bmatrix}.$$

### 1.83.

(a) Từ công thức của  $A^{-1}$  khi  $n = 2, 3$  và 4 bên trên, ta đi đến dự đoán

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{k^3} & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{(-1)^n}{k^n} & \frac{(-1)^{n-1}}{k^{n-1}} & \frac{(-1)^{n-2}}{k^{n-2}} & \cdots & \frac{1}{k} & 0 \\ \frac{(-1)^{n+1}}{k^{n+1}} & \frac{(-1)^n}{k^n} & \frac{(-1)^{n-1}}{k^{n-1}} & \cdots & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} \end{bmatrix}.$$

(b) Để tìm  $A^{-1}$ , ta khử Gauss-Jordan ma trận  $[A \mid I]$

$$\left[ \begin{array}{cccccc|cccccc} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Thực hiện biến đổi  $kH_2 - H_1 \rightarrow H_2$ , chỉ có hàng 2 thay đổi. Hàng 2 mới là

$$\left[ 0 \quad k^2 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \mid -1 \quad k \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \right].$$

Thực hiện phép biến đổi  $kH_3 - H_2 \rightarrow H_3$ , chỉ có hàng 3 thay đổi. Hàng 3 mới là

$$\left[ 0 \quad 0 \quad k^3 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \mid 1 \quad -k \quad k^2 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \right].$$

Tiếp tục thực hiện liên tiếp các phép biến đổi  $kH_i - H_{i-1} \rightarrow H_i$  với  $i = 4, 5, \dots, n-1, n$ . Sau chuỗi biến đổi sơ cấp liên tiếp này, ta thu được ma trận với nửa bên trái và nửa bên phải lần lượt là các ma trận

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k^n \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -k & k^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n & (-1)^{n-1}k & (-1)^{n-2}k^2 & \cdots & k^{n+2} & 0 \\ (-1)^{n+1} & (-1)^nk & (-1)^{n-1}k^2 & \cdots & -k^{n+2} & k^{n+1} \end{bmatrix}.$$

Cuối cùng, thực hiện các phép biến đổi  $\frac{1}{k}H_1 \rightarrow H_1, \frac{1}{k^2}H_2 \rightarrow H_2, \dots, \frac{1}{k^n}H_n \rightarrow H_n$ , ta nhận được ma trận

$$[I \mid A^{-1}]$$

với ma trận  $A^{-1}$  dự đoán bên trên.

**1.84.** Khử Gauss-Jordan ma trận  $[A \mid I]$ :

$$\begin{aligned} [A \mid I] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] && \left( \begin{array}{l} H_1 + H_2 + H_3 \rightarrow H_1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] && \left( \begin{array}{l} H_1 - 2H_2 \rightarrow H_2 \\ H_1 - 2H_3 \rightarrow H_3 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] && \left( \begin{array}{l} H_1 - H_2 - H_3 \rightarrow H_1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} & & & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \quad \left( \frac{1}{2}H_i \rightarrow H_i \right)$$

Vậy nghịch đảo của ma trận  $A$  là

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

1.85.

(a) Ma trận nghịch đảo là  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

(b) Ma trận nghịch đảo là

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

1.86.

(a) Từ công thức của  $A^{-1}$  với  $n = 2, 3, 4$ , ta đi đến dự đoán

$$A^{-1} = \frac{1}{n-1} \begin{bmatrix} 2-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n \end{bmatrix}$$

(b) Để tìm  $A^{-1}$ , khử Gauss-Jordan ma trận  $[A \mid I]$  :

$$\left[ \begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Thực hiện phép biến đổi  $H_1 + H_2 + \dots + H_n \rightarrow H_1$ , chỉ có hàng 1 của ma trận thay đổi. Hàng 1 mới là

$$\left[ \begin{array}{cccccc|cccc} n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n-1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Tiếp theo, thực hiện các phép biến đổi  $H_1 - (n-1)H_i \rightarrow H_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$  ta thu được ma trận với nửa bên trái và nửa bên phải lần lượt là các ma trận

$$\left[ \begin{array}{cccccc} n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n \end{array} \right].$$

Thực hiện phép biến đổi  $H_1 - H_2 - H_3 - \dots - H_n \rightarrow H_1$ , ta thu được ma trận với nửa bên trái và nửa bên phải lần lượt là các ma trận

$$\left[ \begin{array}{cccccc} n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 2-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n \end{bmatrix}$$

Cuối cùng, nhân mỗi hàng của ma trận với  $\frac{1}{n-1}$ , ta thu được ma trận

$$\left[ I \mid A^{-1} \right]$$

với  $A^{-1}$  dự đoán trên.

### 1.87.

- (a) Từ định nghĩa của  $A$ , ta thấy  $J \in M_{n \times n}$  là ma trận có tất cả các phần tử đều bằng 1. Do đó, tất cả các phần tử của  $J^2$  đều là

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{1 \times n} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1} = n.$$

Vậy  $J^2 = nJ$ .

- (b) Vì  $J = A + I$  và 2 ma trận  $A, I$  giao hoán với nhau nên

$$J^2 = (A + I)^2 = A^2 + 2AI + I^2 = A + 2A + I.$$

Kết hợp với đẳng thức  $J^2 = nJ$ , ta được

$$A^2 + 2A + I = n(A + I)$$

Suy ra  $A^2 + (2-n)A + (1-n)I = 0$ .

- (c) Ta có

$$\begin{aligned} A^2 + (2-n)A + (1-n)I &= 0 \\ \Rightarrow A^2 + (2-n)A &= (n-1)I \\ \Rightarrow A(A + (2-n)I) &= (n-1)I \\ \Rightarrow A \left( \frac{1}{n-1} (A + (2-n)I) \right) &= I. \end{aligned}$$

Vậy nghịch đảo của ma trận  $A$  là  $\frac{1}{n-1} (A + (2-n)I)$ .

## 1.88.

(a) Khử Gauss ma trận  $A$ :

$$\begin{aligned}
 A &\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 8 & -8 & -5 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 8 & -8 & -5 & -11 \end{bmatrix} \\
 &\rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -35 \end{bmatrix}}_B
 \end{aligned}$$

(b) Tiếp tục biến đổi sơ cấp trên ma trận bậc thang để được ma trận bậc thang rút gọn

$$\begin{aligned}
 B &\rightarrow \begin{bmatrix} 6 & -12 & 6 & 0 & 53 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -35 \end{bmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 & 0 & -51 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -35 \end{bmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{17}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{26}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{35}{3} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

## 1.89.

(a) Ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính đã cho chính là ma trận trong bài tập trên. Do đó, dạng bậc thang rút gọn của nó là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{17}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{26}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{35}{3} \end{bmatrix}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$x_1 = t - \frac{17}{2}, \quad x_2 = t - \frac{26}{3}, \quad x_3 = t, \quad x_4 = -\frac{35}{3}$$

với  $t \in \mathbb{R}$  bất kỳ.

- (b) Ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính đã cho là ma trận con gồm 4 cột đầu tiên của ma trận  $A$  trong bài tập trước. Do đó, dạng bậc thang của nó là

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Suy ra, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

- (c) Ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính đã cho là ma trận con gồm 3 cột đầu tiên của ma trận  $A$  trong bài tập trước. Do đó, dạng bậc thang của nó là

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -1$ .

- (d) Ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính đã cho là ma trận con gồm bốn cột 1, 2, 4 và 5 của ma trận  $A$  trong bài tập trước. Do đó, dạng bậc thang rút gọn của nó là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{17}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{26}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{35}{3} \end{bmatrix}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất  $x_1 = -\frac{17}{2}$ ,  $x_2 = -\frac{26}{3}$ ,  $x_3 = -\frac{35}{3}$ .

**1.90.** Khử Gauss-Jordan ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình đã cho, ta được ma trận bậc thang rút gọn

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Do đó, các nghiệm thực của hệ phương trình đã cho là

$$x = -t + 3, \quad y = -t + 5, \quad z = t,$$

với  $t \in \mathbb{R}$ . Nghiệm này là nghiệm nguyên dương khi và chỉ khi

$$t \in \mathbb{Z}, \quad t > 0, \quad -t + 3 > 0, \quad -t + 5 > 0$$

Do đó  $t = 1$  hoặc  $t = 2$ . Vậy, hệ đã cho có đúng hai nghiệm nguyên dương là  $(2, 4, 1)$  và  $(1, 3, 2)$ .

**1.91.** Khử Gauss ma trận đã cho:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \begin{bmatrix} a & b & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a & b \\ 0 & b-4 & -a & -2 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} a & b & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a & b \\ 0 & 0 & a(b-2) & (b-2)^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Xét các trường hợp sau đây.

▷ Trường hợp 1:  $a \neq 0, b \neq 2$ . Hệ đã cho có nghiệm duy nhất

$$x_1 = \frac{2-b}{a}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{b-2}{a}.$$

▷ Trường hợp 2:  $a \neq 0, b = 2$ . Các nghiệm của hệ đã cho là

$$x_1 = t, \quad x_2 = -\frac{at}{2} + 1, \quad x_3 = t$$

với  $t \in \mathbb{R}$  bất kì.

▷ Trường hợp 3:  $a = 0$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & (b-2)^2 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & b \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & (b-2)^2 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & (b-2)(b+2) \\ 0 & 0 & 0 & (b-2)^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp nhỏ sau. Nếu  $b = 2$  thì các nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$x_1 = t, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = s$$

với  $t, s \in \mathbb{R}$  tùy ý. Nếu  $b \neq 2$  thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

**1.92.** Để có thể thực hiện phép nhân  $AKB$ , ma trận  $K$  có cỡ  $2 \times 2$ :

$$K = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Khi đó

$$AKB = \begin{bmatrix} 2b + 8d & a + 4c & -a - 4c \\ 6d - 4b & 3c - 2a & 2a - 3c \\ 2b - 4d & a - 2c & 2c - a \end{bmatrix}$$

Biến đổi tương đương phương trình ma trận  $AKB = C$  thành hệ phương trình tuyến tính rồi giải hệ này, ta được nghiệm duy nhất

$$a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$$

Vậy ma trận  $K$  cần tìm là  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ .

**1.93.**

(a) Phương trình có nghiệm duy nhất

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Phương trình vô nghiệm.

**1.94.** Cỡ của ma trận  $X$  là  $2 \times 2$ :

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Rút gọn về trái của phương trình ma trận đã cho, rồi biến đổi tương đương nó thành một hệ phương trình tuyến tính và giải hệ này, ta thu được nghiệm duy nhất

$$a = -1, b = 1, c = 3, d = -2.$$

Vậy ma trận  $X$  cần tìm là

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

**1.95.** Ta thấy

$$A + B = A + BA^{-1}A = (I + BA^{-1})A$$

Vì  $A + B = (I + BA^{-1})A$  và  $A$  khả nghịch nên  $A + B$  khả nghịch khi và chỉ khi  $I + BA^{-1}$  khả nghịch.

**1.96.** Nhân cả hai vế với  $(x-3)^2(x^2+1)$  rồi đồng nhất hệ số của hai vế để thu được một hệ phương trình tuyến tính của  $a, b, c, d$ . Hệ này có nghiệm duy nhất

$$a = 2, \quad b = -3, \quad c = 2, \quad d = -1.$$

**1.4.** Vì  $g(x) \in \mathcal{P}_3$  nên

$$g(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

với  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Từ các đẳng thức đã cho, ta thu được một hệ 4 phương trình tuyến tính của các ẩn  $a, b, c, d$ . Giải hệ này, ta được nghiệm duy nhất

$$a = 3, \quad b = 1, \quad c = -5, \quad d = 2.$$

Vậy  $g(x) = 3 + x - 5x^2 + 2x^3$ .

**1.98.** Từ các điều kiện cho trong đề bài, ta lập được một hệ phương trình của các ẩn  $a, b, c$ . Hệ này có nghiệm duy nhất

$$a = 2, \quad b = 1, \quad c = -5.$$

**1.99.** Điều phải chứng minh có thể phát biểu lại là

$$AB = BA \Leftrightarrow AB^{-1} = B^{-1}A.$$

Giả sử  $AB = BA$ . Khi đó

**1.100.** Ta có

$$\begin{aligned} A^3 - 2A^2 + 3A + 5I = 0 &\Rightarrow A^3 - 2A^2 + 3A &= -5I \\ &\Rightarrow A(A^2 - 2A + 3I) &= -5I \\ &\Rightarrow A\left(-\frac{1}{5}A^2 + \frac{2}{5}A - \frac{3}{5}I\right) &= I. \end{aligned}$$

Do đó,  $A$  khả nghịch với nghịch đảo  $A^{-1}$  là  $-\frac{1}{5}A^2 + \frac{2}{5}A - \frac{3}{5}I$ .

## CHƯƠNG 2

### 2.1.

- (a) Ta có  $\det(A) = (3)(4) - (3)(2) = 2$ . Vì  $\det(A) \neq 0$  nên  $A$  khả nghịch. Nghịch đảo của  $A$  là

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

- (b) Ta có  $\det(B) = (3)(2) - (1)(6) = 0$ . Vì  $\det(B) = 0$  nên  $B$  không khả nghịch.

- (c) Ta có  $\det(C) = (\sqrt{2})(\sqrt{3}) - (\sqrt{6})(\sqrt{4}) = -3\sqrt{6}$ . Vì  $\det(C) \neq 0$  nên  $C$  khả nghịch. Nghịch đảo của  $C$  là

$$C^{-1} = \frac{1}{-3\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{6} \\ -4 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3\sqrt{6}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

- 2.2.** (a) Khai triển Laplace theo hàng 2, ta được

$$\begin{aligned} \det(A) &= -(1) \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -23 - 6 \\ &= -26. \end{aligned}$$

- (b) Khai triển Laplace theo cột 2, ta được

$$\det(B) = (-3) \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 10 & 2 \end{vmatrix}}_{M_{33}} - (3) \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{M_{43}}.$$

Ta tính định thức  $M_{33}$  bằng cách khai triển Laplace theo cột 1

$$\begin{aligned} M_{33} &= 3 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 3(24) - 2(-44) + 2(-16) \\ &= 128. \end{aligned}$$

Tiếp theo, tính  $M_{43}$  bằng cách khai triển Laplace theo hàng 3

$$\begin{aligned} M_{43} &= 4 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 4(-16) - (-16) \\ &= -48. \end{aligned}$$

Vậy

$$\det(B) = -3(128) - 3(-48) = -240.$$

### 2.3.

- (a) Định thức bằng  $-35$ .
- (b) Định thức bằng  $42$ .
- (c) Định thức bằng  $-9$ .
- (d) Định thức bằng  $30$ .
- (e) Định thức bằng  $-72$ .

### 2.4.

- (a) Định thức bằng  $60$ .
- (b) Định thức bằng  $-5$ .
- (c) Định thức bằng  $-6$ .
- (d) Định thức bằng  $0$ .
- (e) Định thức bằng  $30$ .

**2.5.** Định thức bằng  $-k^3 + 8k^2 + 10k - 95$ .

**2.6.** Hai ma trận  $A$  và  $B$  giao hoán với nhau khi và chỉ khi  $AB = BA$ . Ta có

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad & ae + bf \\ 0 & cf \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad & bd + ce \\ 0 & cf \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} AB = BA &\Leftrightarrow ae + bf = bd + ce \\ &\Leftrightarrow b(d - f) - e(a - c) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} b & a - c \\ e & d - f \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

**2.7.** Giả sử  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . Ta có

$$\det(A) = ad - bc, \operatorname{tr}(A) = a + d.$$

Mặt khác

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + db & bc + d^2 \end{bmatrix},$$

Suy ra

$$\operatorname{tr}(A^2) = a^2 + bc + bc + d^2 = a^2 + 2bc + d^2.$$

Thay vào công thức của  $\operatorname{tr}(A)$  và  $\operatorname{tr}(A^2)$  vào vế phải của đẳng thức cần chứng minh, ta được

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \operatorname{tr}(A) & 1 \\ \operatorname{tr}(A^2) & \operatorname{tr}(A) \end{vmatrix} &= [\operatorname{tr}(A)]^2 - \operatorname{tr}(A^2) \\ &= (a + d)^2 - (a^2 + 2bc + d^2) \\ &= 2(ad - bc) \\ &= 2\det(A). \end{aligned}$$

Ta thu được công thức mong muốn.

**2.8.** Giả sử  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $3 \times 3$ ,  $\det(A) \neq 0$ . Vì  $\det(A) \neq 0$  nên mỗi hàng và mỗi cột của ma trận  $A$  đều có ít nhất một phần tử khác không. Suy ra,  $A$  có ít nhất 3 phần tử khác không. Nói cách khác, ma trận  $A$  có không quá 6 phần tử bằng không.

Để chứng minh ma trận  $A$  có nhiều nhất 6 phần tử bằng không, ta cần chỉ ra tồn tại về ma trận  $A$  có 6 phần tử bằng không và định thức khác không. Ma trận đơn vị là một ví dụ như thế

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**2.9.** Vì  $\det(A) \neq 0$  nên mỗi hàng và mỗi cột của  $A$  có ít nhất một phần tử khác không. Theo giả thiết, ma trận  $A$  gồm sáu số 0 và ba số 1. Do đó, ba số 1 sẽ phân bố trên ma trận sao cho mỗi hàng và mỗi cột đều có một số 1. Một ví dụ của ma trận kiểu này

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Định thức của ma trận này là 1.

Giả sử các phần tử nhận giá trị 1 của ma trận là  $a_{1i}, a_{2j}, a_{3k}$  trong đó  $(i, j, k)$  là một hoán vị của bộ ba  $(1, 2, 3)$ . Ta có sáu hoán vị của bộ ba này là

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (3, 2, 1).$$

Sáu ma trận tương ứng là

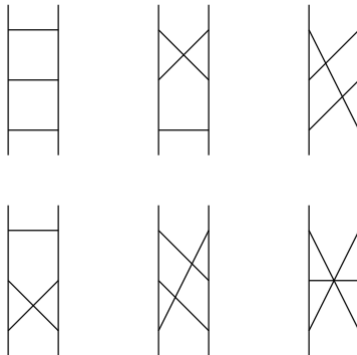
$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix}.$$

Định thức của các ma trận vuông lần lượt là

$$1, -1, -1, 1, 1, -1$$

Bây giờ, với mỗi ma trận, ta xác định số giao điểm của ba đoạn thẳng mô tả trong đề bài.



Số giao điểm (tính cả bội) lần lượt là

$$0, 1, 1, 2, 2, 3.$$

Ta thấy định thức là 1 nếu số giao điểm là chẵn, và định thức là  $-1$  nếu số giao điểm là lẻ.

**2.10.** Giả sử  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $n \times n$ ,  $\det(A) \neq 0$ . Vì  $\det(A) \neq 0$  nên mỗi hàng và mỗi cột của ma trận  $A$  đều có ít nhất một phần tử khác không. Suy ra,  $A$  có ít nhất  $n$  phần tử khác không. Nói cách khác, ma trận  $A$  có không quá  $n^2 - n$  phần tử bằng không.

Để chứng minh ma trận  $A$  có nhiều nhất  $n^2 - n$  phần tử bằng không, ta chỉ cần chỉ ra tồn tại về ma trận  $A$  có  $n^2$  phần tử bằng không và định thức khác không. Ma trận đơn vị là một ví dụ như thế

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

**2.11.** Ta chứng minh khẳng định bằng cách quy nạp theo cỡ của ma trận

$$A = [a_{ij}]_{n \times n}.$$

Khi  $n = 1$ ,  $A = [a_{11}]$ , suy ra  $\det(A) = a_{11}$  là một số nguyên. Giả sử khẳng định của đề bài đúng với các ma trận cỡ  $n - 1$ . Tính định thức của ma trận vuông  $A$  cỡ  $n \times n$  bằng cách khai triển Laplace theo hàng một

$$\det(A) = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n},$$

trong đó  $M_{1j}$  là định thức con ứng với vị trí  $(1, j)$  của ma trận  $A$ . Theo định nghĩa,  $M_{1j}$  là định thức của ma trận con cỡ  $(n - 1) \times (n - 1)$  của  $A$  thu được bằng cách xóa bỏ hàng 1 và cột  $j$ . Theo giả thiết quy nạp,  $M_{1j}$  là số nguyên. Do đó,  $\det(A)$  là một số nguyên. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

**2.12.** Ba điểm  $A, B$ , và  $C$  thẳng hàng khi và chỉ khi hai vec tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương với nhau. Ta có

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1), \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1).$$

Do đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \text{ cùng phương } \overrightarrow{AC} &\Leftrightarrow \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0.\end{aligned}$$

So sánh định thức này với định thức trong đề bài, ta đi đến cách tính định thức trong đề bài bằng cách lấy  $(-1)$  lần hàng một cộng vào các hàng hai và ba, rồi khai triển phần bù đại số theo cột ba:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Từ các lập luận trên, ta có điều phải chứng minh.

**2.13.** Điểm  $(x, y)$  thuộc đường thẳng đi qua hai điểm  $(a_1, b_1)$  và  $(a_2, b_2)$  khi và chỉ khi ba điểm  $(x, y)$ ,  $(a_1, b_1)$  và  $(a_2, b_2)$  thẳng hàng. Theo bài tập trên, điều này tương đương với

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Phương trình này chính là phương trình của đường thẳng đi qua hai điểm  $(a_1, b_1)$  và  $(a_2, b_2)$ .

**2.14.**

- (a) Định thức bằng 66.
- (b) Định thức bằng 17.

**2.15.**

- (a) Định thức bằng  $-2$ .
- (b) Định thức bằng  $-39$ .

**2.16.**

1. Định thức là  $-24$ .
2. Định thức là  $100$ .
3. Định thức là  $-40$ .
4. Định thức là  $9$ .
5. Định thức là  $54$ .

**2.17.**

- (a) Định thức cần tính thu được từ định thức ban đầu sau khi đổi chỗ hai hàng hai lần. Do đó, định thức cần tính bằng  $7$ .
- (b) Định thức cần tính bằng  $(4)(-1)(-3)$  lần định thức ban đầu. Do đó, định thức cần tính bằng  $84$ .
- (c) Định thức bằng  $7$ .
- (d) Định thức bằng  $21$ .

**2.18.** Ta có

$$\begin{aligned}
 V_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_2x_1 & x_3^2 - x_3x_1 \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{1+1}(1) \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_2^2 - x_2x_1 & x_3^2 - x_3x_1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) \end{vmatrix} \\
 &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Nhận xét rằng  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix}$  chính là định thức Vandermonde cỡ  $2 \times 2$  đối với 2 biến  $x_2, x_3$ . Nó có giá trị là  $(x_3 - x_2)$ . Vậy

$$V_3 = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

**2.19.** Tính định thức  $V_4$  sử dụng định thức  $V_3$  tương tự như cách ta đã tính  $V_3$  sử dụng  $V_2$  trong bài tập trên.

$$V_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{(2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & & & 1 & & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & & x_3 - x_1 & & x_4 - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_2x_1 & & x_3^2 - x_3x_1 & & x_4^2 - x_4x_1 \\ 0 & x_2^3 - x_2^2x_1 & & x_3^3 - x_3^2x_1 & & x_4^3 - x_4^2x_1 \end{vmatrix}$$

Để có đẳng thức (2), ta đã lấy  $(-x_1)$  lần hàng 3 cộng vào hàng 4, rồi lấy  $(-x_1)$  lần hàng 2 cộng vào hàng 3, rồi lấy  $(-x_1)$  lần hàng 1 cộng vào hàng 2. Tiếp theo, khai triển Laplace theo cột 1, ta được

$$V_4 = (-1)^{1+1}(1) \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ x_2^2 - x_2x_1 & x_3^2 - x_3x_1 & x_4^2 - x_4x_1 \\ x_2^3 - x_2^2x_1 & x_3^3 - x_3^2x_1 & x_4^3 - x_4^2x_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & x_4(x_4 - x_1) \\ x_2^2(x_2 - x_1) & x_3^2(x_3 - x_1) & x_4^2(x_4 - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$$

Định thức cỡ 3 còn phải tính chính là định thức  $V_3$  đối với các biến  $x_2, x_3, x_4$ . Ta nhận được công thức mong muốn của  $V_4$ .

## 2.20.

(a) Từ các định thức  $V_2, V_3$  và  $V_4$  trên, ta đi đến dự đoán

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

(b) Để chứng minh công thức dự đoán bên trên cho định thức  $V_n$ , ta sẽ sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng và khai triển Laplace như cách đã tính  $V_3$  qua  $V_2$  và  $V_4$  qua  $V_3$  bên trên. Ta có

(c)

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & & & 1 & & & 1 & \cdots & & 1 \\ 0 & & & x_2 - x_1 & & & x_3 - x_1 & \cdots & & x_n - x_1 \\ 0 & & & x_2^2 - x_2 x_1 & & & x_3^2 - x_3 x_1 & \cdots & & x_n^2 - x_n x_1 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} x_1 & & x_3^{n-1} - x_3^{n-2} x_1 & \cdots & & x_n^{n-1} - x_n^{n-2} x_1 \end{vmatrix}$$

Để có đẳng thức này, ta đã lấy  $(-x_1)$  lần hàng  $i$  cộng vào hàng  $i + 1$  với  $i$  lần lượt là  $n - 1, n - 2, \dots, 1$ .

$$V_n = (-1)^{1+1}(1)(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Định thức còn lại cần phải tính chính là  $V_{n-1}$  đối với các biến  $x_2, x_1, \dots, x_n$ . Do vậy, theo nguyên lý quy nạp, ta có kết luận mong muốn.

**2.21.** khai triển Laplace theo hàng 1, ta được

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} a_{12} a_{21} = -a_{12} a_{21} \\ D_3 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} 0 & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+3} a_{13} (-1)^{1+2} a_{22} a_{31} \\ &= -a_{13} a_{22} a_{31} \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} D_4 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} a_{14} \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+4} a_{14} (-1)^{1+3} a_{23} \begin{vmatrix} 0 & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+4} a_{14} (-1)^{1+3} a_{23} (-1)^{1+2} a_{32} a_{41} \\ &= a_{14} a_{23} a_{22} a_{41} \end{aligned}$$

**2.22.** Ta tính định thức của ma trận tam giác dưới đối với đường chéo phụ bằng cách thực hiện liên tiếp khai triển Laplace theo hàng 1 như sau

$$\begin{aligned}
 D_n &= \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{1+n} a_{1,n} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} \\ 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{1+n} a_{1,n} (-1)^{1+(n-1)} a_{2,n-1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{3,n-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} \end{vmatrix} \\
 &= \dots \\
 &= (-1)^{1+n} a_{1,n} (-1)^{1+(n-1)} a_{2,n-1} (-1)^{1+(n-2)} a_{3,n-2} \cdots (-1)^{1+2} a_{n-1,2} a_{n,1}.
 \end{aligned}$$

Do đó

$$D_n = (-1)^{n+1} (-1)^n (-1)^{n-1} \cdots (-1)^3 a_{1,n} a_{2,n-1} a_{3,n-2} \cdots a_{n-1,2} a_{n,1}$$

Mặt khác  $(n+1) + n + (n-1) + \cdots + 3 = \frac{(n-1)(n+4)}{2}$ . Vậy

$$D_n = (-1)^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}} a_{1,n} a_{2,n-1} a_{3,n-2} \cdots a_{n-1,2} a_{n,1}.$$

**2.24.** Quan sát các định thức này, ta thấy tổng các phần tử trên mỗi cột đều giống nhau. Do đó, ta sẽ cộng tất cả các hàng vào hàng 1 rồi đưa phần tử chung của hàng 1 mới ra ngoài định thức. Hàng 1 mới gồm toàn 1. Tiếp theo, ta sử dụng phần tử 1 đầu tiên khử đi các phần tử 1 còn lại của hàng này.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a+b & a+b \\ b & a \end{vmatrix} = (a+b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & a \end{vmatrix} \\
 &= (a+b) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & a-b \end{vmatrix} = (a+b)(a-b).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a+2b & a+2b & a+2b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \\
&= (a+2b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \\
&= (a+2b) \begin{vmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ b & a-b & & 0 \\ b & & 0 & a-b \end{vmatrix} \\
&= (a+2b)(a-b)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a+3b & a+3b & a+3b & a+3b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \\
&= (a+3b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \\
&= (a+3b) \begin{vmatrix} 1 & & 0 & 0 & 0 \\ b & a-b & & 0 & 0 \\ b & & 0 & a-b & 0 \\ b & & 0 & & a-b \end{vmatrix} \\
&= (a+3b)(a-b)^3.
\end{aligned}$$

**2.25.**

(a) Từ các định thức trong ý (a), ta đi đến dự đoán

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

(b) Định thức  $D_n$  được tính tương tự các định thức  $D_2, D_3, D_4$  bên trên.

$$\begin{aligned}
 D_n &= [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\
 &= [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & & 0 & & 0 & \cdots & 0 \\ b & a-b & & 0 & \cdots & 0 \\ b & & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} \\
 &= [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

**2.26.** Ký hiệu hệ vec tơ hàng của  $A$  lần lượt là  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . Khi đó, hệ véctơ hàng của  $B$  là  $r_n, r_{n-1}, \dots, r_1$ . Do đó,  $B$  thu được từ  $A$  sau một số phép đổi chỗ hai hàng một cách thích hợp. Với  $n = 2, 3, 4$ , ta hàm như sau

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} &\xrightarrow{H_1 \leftrightarrow H_2} \begin{bmatrix} r_2 \\ r_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_1 \leftrightarrow H_3} \begin{bmatrix} r_3 \\ r_2 \\ r_1 \end{bmatrix}, \\
 \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} &\xrightarrow[H_2 \leftrightarrow H_3]{H_1 \leftrightarrow H_4} \begin{bmatrix} r_4 \\ r_3 \\ r_2 \\ r_1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Một cách tổng quát, ta thu được  $B$  từ  $A$  sau khi thực hiện các phép biến đổi hàng  $H_i \leftrightarrow H_j$  với  $i + j = n + 1, i < j$ . Số lần đổi chỗ hai hàng là  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  trong đó  $\lfloor - \rfloor$  là hàm phần nguyên.

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{nếu } n \text{ chẵn,} \\ \frac{n-1}{2} & \text{nếu } n \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Do vậy,

$$\det(A) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \det(B).$$

**2.27.**

- (a) Định thức bằng không vì cột 2 và cột 4 tỉ lệ với nhau. Cụ thể hơn, sau khi thực hiện đổi  $-2C_4 + C_2 \rightarrow C_2$ , giá trị của định thức không thay đổi, nhưng định thức mới bằng không vì cột 2 của nó gồm toàn không.
- (b) Định thức bằng không vì tổng các phần tử trong mỗi hàng đều bằng không. Cụ thể hơn, sau khi thực hiện phép biến đổi  $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 \rightarrow C_5$ , giá trị của định thức không thay đổi nhưng định thức mới bằng không vì cột 5 của nó gồm toàn không.

**2.28.** Định thức thứ nhất bằng tích của hai định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & 2 \end{vmatrix}.$$

Giá trị của các định thức này lần lượt là 2 và 6. Do đó, định thức thứ nhất trong hai định thức cần tính là 12. Tính toán tương tự cho định thức cần tính thứ hai. Giá trị của định thức này là 1.

**2.29.**

- (a) Đúng. Mỗi lần đổi chỗ hai cột, định thức đổi dấu.
- (b) Đúng. Sau mỗi phép biến đổi  $aH_i \rightarrow H_i$ , định thức được nhân với  $a$ .
- (c) Sai. Phép biến đổi  $aH_i + H_j \rightarrow H_j, i \neq j$ , không làm thay đổi định thức.
- (d) Đúng. Phép biến đổi  $-H_1 - H_3 + H_6 \rightarrow H_6$  không làm thay đổi định thức nhưng định thức mới bằng không vì hàng 6 của nó gồm toàn không.
- (e) Đúng. Nếu các phần phụ đại số đều bằng không thì ma trận liên hợp cũng bằng không. Ngoài ra

$$A[\text{adj}(A)] = \det(A)I.$$

- (f) Sai. Định thức của một ma trận tam giác là tích các phần tử trên đường chéo của nó.
- (g) Đúng. Định thức có tính chất nhân tức là

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

với mọi cặp ma trận vuông cùng cỡ  $A$  và  $B$ .

**2.30.**

- (a) Định thức của ma trận bằng  $-1$ . Vì định thức khác không nên ma trận khả nghịch.
- (b) Định thức của ma trận bằng  $0$ . Vì định thức bằng không nên ma trận không khả nghịch.

**2.31.**

- (a) Định thức của ma trận bằng  $8k + 8$ . Do đó, ma trận khả nghịch khi và chỉ khi  $8k + 8 \neq 0$ , tức là  $k \neq -1$ .
- (b) Định thức của ma trận bằng  $2 - 4k$ . Do đó, ma trận khả nghịch khi và chỉ khi  $2 - 4k \neq 0$ , tức là  $k \neq \frac{1}{2}$ .

**2.32.**

- (a) Tập hợp các giá trị cần tìm của  $a$  là  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .
- (b) Tập hợp các giá trị cần tìm của  $a$  là  $\mathbb{R} \setminus \left\{3, \frac{1}{2}\right\}$ .
- (c) Tập hợp các giá trị cần tìm của  $a$  là  $\mathbb{R} \setminus \left\{-4, -\frac{3}{2}\right\}$ .
- (d) Tập hợp các giá trị cần tìm của  $a$  là  $\mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$ .
- (e) Tập hợp các giá trị cần tìm của  $a$  là  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

**2.33.**

(a) Sử dụng thuật toán Gauss - Jordan

$$\begin{aligned}
 [A|I] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right] \\
 &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -5 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right] \\
 &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 6 & -10 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right] \\
 &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Vậy nghịch đảo của ma trận  $A$  là

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 5 \\ -3 & 5 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Các phần bù đại số của  $A$  ứng với các vị trí ở hàng 1 là

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3, C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Định thức của  $A$  là

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= 2C_{11} + 5C_{12} + 5C_{13} \\
 &= 2(-3) + 5(3) + 5(-2) = -1.
 \end{aligned}$$

Vì  $\det(A) \neq 0$  nên  $A$  khả nghịch. Các phần bù đại số còn lại của  $A$  là

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 5, C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5,$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5,$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4, C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2.$$

Vậy nghịch đảo của ma trận  $A$  là

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 5 & -5 & 3 \\ -5 & 4 & -2 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -5 & 5 \\ -3 & 5 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(c)

### 2.34.

(a) Nghịch đảo của ma trận đã cho là  $\begin{bmatrix} \frac{5}{28} & -\frac{1}{28} & \frac{13}{28} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{14} & \frac{3}{14} & \frac{3}{14} \end{bmatrix}.$

(b) Nghịch đảo của ma trận đã cho là  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$

(c) Nghịch đảo của ma trận đã cho là  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$

(d) Nghịch đảo của ma trận đã cho là  $\begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 3 & \frac{9}{5} & -\frac{1}{5} \\ 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$

(e) Nghịch đảo của ma trận đã cho là  $\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{4}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}.$

**2.35.** Các phần phụ đại số của  $A$  ứng với các vị trí ở hàng 3 là

$$C_{31} = -14, C_{32} = -6, C_{33} = 2.$$

Định thức của ma trận  $A$  là

$$\det(A) = aC_{31} + 0C_{32} + 2C_{33} = -14a + 4.$$

Ma trận  $A$  khả nghịch khi và chỉ khi  $\det(A) \neq 0$ , tức là  $a \neq \frac{2}{7}$ .

Bây giờ, giả sử  $a \neq \frac{2}{7}$ . Để tìm nghịch đảo của  $A$  sử dụng ma trận liên hợp, ta cần tính các phần bù đại số còn lại của  $A$ . Ta có

$$C_{11} = 2, C_{12} = 3a, C_{13} = -a, C_{21} = 6, C_{22} = -5a + 4, C_{23} = -3a.$$

Vậy nghịch đảo của ma trận  $A$  là

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{-14a+4} \begin{bmatrix} 2 & 3a & -a \\ 6 & -5a+4 & -3a \\ -14 & -6 & 2 \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{14a-4} \begin{bmatrix} -2 & -6 & 14 \\ -3a & 5a-4 & 6 \\ a & 3a & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### 2.36.

(a) Ma trận hệ số và định thức của nó là

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}, \det(A) = -13.$$

Theo định lý Cramer, hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$  trong đó

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vì  $\det(A_1) = -13$ ,  $\det(A_2) = -26$  nên  $x_1 = 1, x_2 = 2$ .

(b) Định thức ma trận hệ số  $A$  là  $\det(A) = 18$ . Theo định lý Cramer, hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$ . Vì  $\det(A_1) = -33$ ,  $\det(A_2) = -39$ ,  $\det(A_3) = -12$  nên

$$x_1 = -\frac{11}{6}, x_2 = -\frac{13}{6}, x_3 = -\frac{2}{3}.$$

**2.37.****(f).**

$$(a) \det(2A) = 2^n \det(A).$$

$$(b) \det(A^3) = [\det(A)]^3.$$

$$(c) \det(4A^{-1}) = 4^n \det(A^{-1}) = \frac{4^n}{\det(A)}.$$

$$(d) \det(-A) = \det((-1)A) = (-1)^n \det(A).$$

$$(e) \det((4A)^{-1}) = \frac{1}{\det(4A)} = \frac{1}{4^n \det(A)}.$$

$$(f) \det(3A^T) = 3^n \det(A^T) = 3^n \det(A).$$

**2.39.** Sử dụng tính chất nhân của định thức và định thức của ma trận chuyển vị, ta có

$$\det(A^T A) = \det(A^T) \det(A) = \det(A) \det(A) = [\det(A)]^2.$$

Do đó

$$\begin{aligned} A \text{ khả nghịch} &\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow [\det(A)]^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \det(A^T A) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow A^T A \text{ khả nghịch.} \end{aligned}$$

**2.40.** Vì  $\det(A) = 1 \neq 0$  nên theo định lý Cramer, hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, i = 1, 2, \dots, n$$

trong đó  $A_i$  là ma trận thu được từ  $A$  khi thay thế cột thứ  $i$  của  $A$  bởi vec tơ cột  $b$ .

Vì  $A$  và  $b$  gồm toàn hệ số nguyên nên các ma trận  $A_1, A_2, \dots, A_n$  đều là các ma trận hệ số nguyên. Do đó, các định thức  $\det(A_i)$  cùng là số nguyên. Vậy nghiệm duy nhất của hệ phương trình trên là một nghiệm nguyên.

**2.46.** Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp và khai triển Laplace, ta có

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & -3 & -7 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{1+1}(1)(-5) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\
 &= (-5) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \\
 &= (-5)(-1)^{1+1}(1) \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \\
 &= (-5)(-10) \\
 &= 50.
 \end{aligned}$$

**2.47.**

- (a) Định thức bằng 0.
- (b) Định thức bằng  $-36$ .

**2.48.** Vì  $A$  phản đối xứng nên  $A^T = -A$ . Suy ra

$$\det(A^T) = \det(-A).$$

Ta có  $\det(A^T) = \det(-A)$  và  $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$ . Do đó

$$\det(A) = (-1)^n \det(A). \quad (7)$$

1. Vì  $n$  lẻ nên  $(-1)^n = -1$ . Ta được  $\det(A) = (-1)\det(A)$ . Suy ra  $\det(A) = 0$ , tức ma trận  $A$  không khả nghịch.
2. Bây giờ giả sử  $n$  chẵn. Khi đó  $(-1)^n = 1$ . Định thức 7 đúng một cách hiển nhiên và không cho ta thông tin gì về  $\det(A)$ .

Thực ra,  $\det(A)$  có thể khác không. Ví dụ:  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  là một ma trận phản đối xứng cỡ  $2 \times 2$  với định thức là 1. Với  $n$  chẵn tùy ý, xét ma trận  $A$  với các phần tử ngoài đường chéo phụ bằng không còn các phần tử trên đường chéo phụ, kể từ trái qua phải là

$$-1, -1, \dots, -1, 1, 1, \dots, 1$$

với  $\frac{n}{2}$  số  $-1$ ,  $\frac{n}{2}$  số  $1$ . Đây là một ma trận phản đối xứng với định thức là  $(-1)^{\frac{n}{2}}$ .

#### 2.49.

1. Ma trận nghịch đảo là  $\begin{bmatrix} \frac{-1}{6} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$ .
2. Ma trận nghịch đảo là  $\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{-1}{8} & \frac{-3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{-1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{-7}{12} & \frac{24}{12} \end{bmatrix}$ .

#### 2.50. Định thức của các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} x & \sin \theta \\ y & -\cos \theta \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & x \\ \sin \theta & y \end{bmatrix}$$

lần lượt là

$$-1, -x \cos \theta - y \sin \theta, y \cos \theta - x \sin \theta.$$

Vì  $\det(A) \neq 0$  nên theo định lí Cramer, hệ phương trình tuyến tính đã cho có nghiệm duy nhất

$$x' = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad y' = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = x \sin \theta - y \cos \theta.$$

**2.51.** Khử Gauss ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính đã cho

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & \beta & 0 \\ \alpha & \beta & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta - \alpha & 0 \\ 0 & \beta - \alpha & 1 - \alpha^2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \beta - \alpha & 1 - \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta - \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Ta có

$$\beta - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta, \quad 1 - \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1.$$

Ta có các trường hợp sau đây

- ▷ Trường hợp 1:  $\alpha \neq \beta$  Hệ phương trình đã cho chỉ có nghiệm tầm thường  $x = y = z = 0$ .
- ▷ Trường hợp 2:  $\alpha = \beta$  và  $\alpha \neq \pm 1$ . Các nghiệm của hệ phương trình đã cho là  $x = -t, y = t, z = 0$  với  $t \in \mathbb{R}$  bất kì.
- ▷ Trường hợp 3:  $\alpha = \beta$  và  $\alpha = \pm 1$ . Các nghiệm của hệ phương trình đã cho là  $x = -t - \alpha s, y = t, z = s$  với  $t, s \in \mathbb{R}$  tùy ý.

**2.52.** Ta có

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Vì các  $a_{ij}$  đều bằng 0 hoặc 1 nên các tích  $a_{11}a_{32}a_{33}, \dots$  xuất hiện trong tổng trên bằng 0 hoặc 1. Do đó,

$$\det A \leq 1 - 0 - 0 + 1 + 1 - 0 = 3.$$

Ta thấy,  $\det(A) = 3$  khi và chỉ khi

$$a_{11}a_{22}a_{33} = a_{12}a_{23}a_{31} = a_{13}a_{21}a_{32} = 1, \quad (8)$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} = a_{12}a_{21}a_{33} = a_{13}a_{22}a_{31} = 0. \quad (9)$$

Từ (8),  $a_{ij} = 1$  với mọi  $i, j$ . Điều này mâu thuẫn với (9). Do đó,  $\det A < 3$ . Vì các  $a_{ij}$  là các số nguyên nên  $\det(A)$  cũng là một số nguyên. Suy ra  $\det(A) \leq 2$ . Hơn nữa,  $\det(A) = 2$  nếu

$$a_{11}a_{22}a_{33} = a_{12}a_{23}a_{31} = 1,$$

và

$$a_{11}a_{23}a_{32} = a_{12}a_{21}a_{33} = a_{13}a_{22}a_{31} = a_{13}a_{21}a_{32} = 0.$$

Hệ này có nghiệm duy nhất

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của  $\det(A)$  là 2.

### 2.53. Đang cập nhật.

**2.54.** Gọi  $n$  là số cột của ma trận  $A$ . Cộng  $(n - 1)$  cột đầu tiên của ma trận  $A$  vào cột cuối cùng, ta thu được ma trận  $B$ . Vì phép biến đổi trên cột của ma trận này không làm thay đổi định thức nên  $\det(A) = \det(B)$ . Vì các phần tử trên mỗi hàng của  $A$  bằng không nên cột cuối cùng của  $B$  gồm toàn không. Do đó,  $\det(B) = 0$ . Vậy  $\det(A) = 0$ .

**2.55.** Vì  $A$  khả nghịch nên  $\det(A) \neq 0$  và  $\text{adj}(A) = \det(A)I$  nên

$$\left( \frac{1}{\det(A)} A \right) [\text{adj}(A)] = I.$$

Do đó,  $\text{adj}(A)$  khả nghịch và  $[\text{adj}(A)]^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A$ . Tiếp theo, áp dụng công thức  $A[\text{adj}(A)] = \det(A)I$  với  $A$  thay bởi  $A^{-1}$ , ta được

$$A^{-1} [\text{adj}(A^{-1})] = \det(A^{-1})I = \frac{1}{\det(A)} I.$$

Nhân hai vế, về phía bên trái, với  $A$ , ta được

$$\text{adj}(A^{-1}) = A \left[ \frac{1}{\det(A)} I \right] = \frac{1}{\det(A)} A.$$

Vậy  $[\text{adj}(A)]^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A = \text{adj}(A^{-1})$ .

**2.56.** Lấy định thức hai vế của đẳng thức  $A[\text{adj}(A)] = \det(A)I$  và sử dụng tính chất nhân của định thức, ta được

$$\det(A) \det[\text{adj}(A)] = \det(A)^n.$$

**2.57.** Ta thấy rằng khi ghép lại các số trên mỗi hàng của ma trận ta thu được các số chia hết cho 19 được cho trong đề bài. Do đó, ta cộng  $10^4$  lần cột một và  $10^3$  lần cột hai và  $10^2$  lần cột ba và 10 lần cột bốn vào cột cuối cùng của định thức đã cho. Giá trị của định thức không đổi, và định thức mới là

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 21375 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 38798 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 34162 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 40223 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 79154 \end{vmatrix}$$

Vì các phần tử của ma trận đều là số nguyên và các phần tử của cột cuối chia đều hết cho 19 nên bằng cách khai triển phần bù đại số theo cột cuối của định thức, ta suy ra định thức này chia hết cho 19.

**2.58.** Trong bài tập trên, ta có thể thay số 19 bởi một số nguyên dương  $d$  bất kì. Khi đó ta cần tìm  $n$  số nguyên dương có  $n$  chữ số, mỗi số đều chia hết cho  $d$ . Từ  $n$  số nguyên dương này, ta thiết lập một ma trận vuông cỡ  $n \times n$  với các phần tử của hàng thứ  $i$  chính là các chữ số của số thứ  $i$  trong  $n$  số chia hết cho  $n$  bên trên. Khi đó, định thức của ma trận này chia hết cho  $d$ .

## CHƯƠNG 3

**3.1.** Ta có

$$\begin{aligned} 2u - 3v + w &= 3(x + v) \\ \Leftrightarrow 2u - 3v + w &= 3x + 3v \\ \Leftrightarrow 3x &= 2u - 3v + w - 3v \\ \Leftrightarrow 3x &= 2u - 6v + w \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{3}(2u - 6v + w) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2}{3}u - 2v + \frac{1}{3}w. \end{aligned}$$

Thay  $u$ ,  $v$  và  $w$  các giá trị cho trong đề bài rồi tính toán, ta được

$$x = \left(-\frac{19}{3}, -1, 13, -4\right).$$

**3.2.** Vì  $u \neq 0$  nên  $u$  và  $v$  cùng phương với nhau khi và chỉ khi tồn tại một số thực  $k$  sao cho  $v = ku$ . Phương trình này tương đương với

$$(6, b, 0, 5, -12) = (-2k, k, 0, ka, 4k).$$

Vì  $6 = -2k$  nên  $k = -3$ . Do đó,

$$b = -3, \quad 5 = -3a$$

Suy ra  $a = -\frac{5}{3}$  và  $b = -3$ . Khi đó các vectơ  $u, v$  lần lượt là

$$\left(-2, 1, 0, -\frac{5}{3}, 4\right), \quad (6, -3, 0, 5, -12).$$

Ta thấy  $v = -3u$ . Do đó,  $u$  và  $v$  cùng phương với nhau. Vậy các giá trị cần tìm của  $a$  và  $b$  là  $a = -\frac{5}{3}$  và  $b = 3$ .

**3.3.** Ta có

$$\begin{aligned} au + bv &= a(-1, 1, 0, 1, 2) + b(2, 0, 1, 3, -2) \\ &= (-a + 2b, a, b, a + 3b, 2a - 2b) \end{aligned}$$

Do đó, phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{array}{rcl} -a & + & 2b = 7 \\ a & & = -1 \\ & & b = 3 \\ a & + & 3b = 8 \\ 2a & - & 2b = -8 \end{array}$$

Hệ này có nghiệm duy nhất  $a = -1$ ,  $b = 3$ .

**3.4.** Các vectơ  $v_1$ ,  $v_2$  và  $v_3$  đều có thành phần thứ hai bằng không. Do đó, tất cả các tổ hợp tuyến tính của  $v_1$ ,  $v_2$  và  $v_3$  cũng có thành phần thứ hai bằng không. Vì thành phần thứ hai của vectơ  $(2, -2, 1, 3)$  là  $-2$ , khác không, nên vectơ này không là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ  $v_1$ ,  $v_2$  và  $v_3$ .

**3.5.**

- (a) Khẳng định đúng. Đây là tính chất kết hợp của phép toán cộng vectơ.
- (b) Khẳng định sai. Hai vectơ có số thành phần khác nhau không thể bằng nhau.
- (c) Khẳng định sai. Hai vectơ  $v$  và  $(-1)v$  cùng phương với nhau.

### 3.6.

- (a) Khẳng định sai.
- (b) Khẳng định đúng.
- (c) Khẳng định sai.

## CHƯƠNG 4

---

**4.1.** So sánh với các phép toán của không gian vectơ  $\mathbb{R}^2$  thông thường, ta thấy phép toán nhân hơi lạ. Do đó nên kiểm tra trước các tiên đề liên quan đến phép nhân.

- (a) Từ định nghĩa các phép toán trong đề bài, ta có

$$u + v = (1, 2) + (-1, 4) = (1 + (-1), 2 + 4) = (0, 6)$$

$$ku = 5(1, 2) = (5 \cdot 1, 0) = (5, 0)$$

- (b) Từ định nghĩa, ta thấy

$$1(a, b) = (1 \cdot a, 0) = (a, 0)$$

Do đó  $1(a, b) \neq (a, b)$  nếu  $b \neq 0$ . Ví dụ  $1(1, 1) = (1, 0) \neq (1, 1)$ . Vì tồn tại vectơ  $u$  sao cho  $1u \neq u$  nên  $V$  không là một không gian vectơ.

### 4.2.

- (a)  $u + v = (-1, 7)$ ,  $ku = (2, 4)$ .

- (b)  $V$  không là một không gian véc tơ vì hai phép toán cộng và nhân định nghĩa trong đề bài không thỏa mãn tiên đề

$$k(u + v) = ku + kv \text{ với mọi } k \in \mathbb{R}, u, v \in V.$$

Thật vậy, giả sử  $u = (a_1, b_1)$ ,  $v = (a_2, b_2)$ , ta có

$$k(u + v) = k(a_1 + a_2 + 1, b_1 + b_2 + 1) = (ka_1 + ka_2 + k, kb_1 + kb_2 + k),$$

$$ku + kv = (ka_1, kb_1) + (ka_2, kb_2) = (ka_1 + ka_2 + 1, kb_1 + kb_2 + 1).$$

Do đó  $k(u + v) \neq ku + kv$  nếu  $k \neq 1$ .

#### 4.3.

- (a) Với  $(a, b)$  thuộc  $V$ , ta có

$$(0, 0) + (a, b) = (0 + a + 1, 0 + b + 1) = (a + 1, b + 1) \neq (a, b).$$

Do đó,  $(0, 0)$  không là véc tơ không của  $V$ .

- (b) Theo định nghĩa, véc tơ không  $0 = (x, y)$  của  $V$  phải thỏa mãn

$$(x + y) + (a, b) = (a, b)$$

với mọi  $(a, b) \in V$ . Vì  $(x, y) + (a, b) = (x + a + 1, y + b + 1)$  nên phương trình trên tương đương với

$$x + a + 1 = a, \quad y + b + 1 = b,$$

tức là  $x = -1$ ,  $y = -1$ . Vậy véc tơ không của  $V$  là  $0 = (-1, -1)$ .

- (c) Mặc dù  $(a, b) + (-a - 1, -b - 1) = (0, 0)$  nhưng  $(0, 0)$  không là véc tơ không của  $V$ , nên  $(-a - 1, -b - 1)$  không là véc tơ đối của  $(a, b)$ . Theo định nghĩa, véc tơ  $(x, y)$  là véc tơ đối của  $(a, b)$  trong  $V$  khi và chỉ khi

$$(x, y) + (a, b) = (-1, -1),$$

vì  $(-1, -1)$  là véc tơ không của  $V$ . Phương trình trên tương đương với

$$x + a + 1 = -1, \quad y + b + 1 = -1,$$

tức là  $x = -a - 2$ ,  $y = -b - 2$ . Vậy, véc tơ đối của véc tơ  $(a, b)$  trong  $V$  là

$$(-1)(a, b) = ((-1)a + (-1) - 1, (-1)b + (-1) - 1) = (-a - 2, -b - 2).$$

**4.4.** Để chứng minh  $V$  là một không gian véc tơ với hai phép toán cộng và nhân đã cho, ta phải kiểm tra tất cả các tiên đề. Cho  $u = (a_1, b_1)$ ,  $v = (a_2, b_2)$ ,  $w = (a_3, b_3)$  thuộc  $V$  và  $k, m$  thuộc  $\mathbb{R}$ .

- ▷ Ta có  $u + v \in V$  và  $ku \in V$  vì  $a_1 + a_2 \in \mathbb{R}$ ,  $ka_1 \in \mathbb{R}$  với mọi  $a_1, a_2, k \in \mathbb{R}$ ;  $b_1 b_2 > 0$ ,  $b_1^k > 0$  với mọi  $b_1, b_2, k \in \mathbb{R}$ ,  $b_1, b_2$  dương.
- ▷ Ta có  $u + v = v + u$  vì

$$u + v = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$

$$v + u = (a_2, b_2) + (a_1, b_1) = (a_2 + a_1, b_2 + b_1).$$

- ▷ Ta có  $u + (v + w) = (u + v) + w$  vì

$$\begin{aligned} u + (v + w) &= (a_1, b_1) + (a_2 + a_3, b_2 + b_3) \\ &= (a_1 + (a_2 + a_3), b_1(b_2 b_3)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u + v) + w &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) + (a_3, b_3) \\ &= ((a_1 + a_2) + a_3, (b_1 b_2) b_3). \end{aligned}$$

- ▷ Phần tử  $(0, 1)$  là véc tơ không vì

$$u + (0, 1) = (a_1 + 0, b_1 \cdot 1) = (a_1, b_1) = u.$$

- ▷ Phần tử  $u$  có phần tử đối, đó là  $\left(-a_1, \frac{1}{b_1}\right)$  vì

$$u + \left(-a_1, \frac{1}{b_1}\right) = \left(a_1 + (-a_1), b_1 \cdot \frac{1}{b_1}\right) = (0, 1).$$

Chú ý rằng  $(0, 1)$  chính là véc tơ không.

- ▷ Ta có  $k(u + v) = ku + kv$  vì

$$k(u + v) = k(a_1 + a_2, b_1 b_2) = \left(k(a_1 + a_2), (b_1 b_2)^k\right),$$

$$ku + kv = (ka_1, b_1^k) + (ka_2, b_2^k) = (ka_1 + ka_2 + 1, b_1^k b_2^k).$$

- ▷ Ta có  $(k + m)u = ku + mu$  vì

$$(k + m)u = \left((k + m)a_1, b_1^{k+m}\right),$$

$$ku + mu = \left(ka_1, b_1^k\right) + \left(ma_1, b_1^m\right) = \left(ka_1 + ma_1, b_1^k b_1^m\right).$$

▷ Ta có  $k(mu) = (km)u$  vì

$$k(mu) = k(ma_1, b_1^m) = (k(ma_1), (b_1^m)^k),$$

$$(km)u = ((km)a_1, b_1^{km}).$$

▷ Ta có  $1u = u$  vì

$$1u = 1(a_1, b_1) = (1.a_1, b_1^1) = (a_1, b_1).$$

Vậy  $V$  là một không gian véc tơ.

#### 4.5.

- (a) Ta có (1) vì  $\tilde{0}$  là một véc tơ không của  $V$ . Ta có (2) vì  $0$  là một véc tơ không của  $V$ .
- (b) Ta có biến đổi tương đương (3) vì đã cộng  $(-u)$  vào hai vế phương trình  $x + u = v$ , và rút gọn về trái

$$(x + u) + (-u) = x + (u + (-u)) = x + 0 = x.$$

Ta có ba đẳng thức trong rút gọn trên sử dụng tính chất kết hợp của phép toán cộng véc tơ, tính chất của véc tơ đối và tính chất của véc tơ không. Biến đổi tương đương (4) có được nhờ định nghĩa của phép toán trừ véc tơ: trừ véc tơ là cộng với véc tơ đối.

- (c) Ta có phép suy ra (5) vì đã cộng hai vế của phương trình với  $-w$ . Ta có phép suy ra (6) nhờ rút gọn 2 vế:

$$u + w + (-w) = u + 0 = u, \quad v + w + (-w) = v + 0 = v.$$

Tính chất của véc tơ không và tính chất của véc tơ đối được sử dụng ở đây.

#### 4.7.

- (a) Với mọi véc tơ  $(u, w) \in V \times W$ , ta có

$$(0_V + 0_W) + (v, w) = (0_V + v, 0_W + w) = (v, w).$$

(b) Ta có

$$(v + w) + (-v, -w) = (v + (-v), w + (-w)) = (0_V + 0_W).$$

Hơn nữa,  $(0_V + 0_W)$  là véctơ không của  $V \times W$ . Do đó  $(-v, -w)$  là véctơ đối của véctơ  $(v, w)$ .

#### 4.8.

- (a) Định nghĩa phép cộng của  $V \times W$ .
- (b) Định nghĩa phép nhân của  $V \times W$ .
- (c) Tính phân phối giữa phép nhân với phép cộng véctơ trong các không gian véctơ  $V$  và  $W$ .
- (d) Định nghĩa phép cộng của  $V \times W$ .
- (e) Định nghĩa phép nhân của  $V \times W$ .

#### 4.9.

- (a) Tập con  $M_{n \times n}$  gồm các ma trận chéo là một không gian con. Nhắc lại rằng một ma trận  $A = [a_{ij}]$  là chéo nếu  $a_{ij} = 0$  với mọi  $i \neq j$ . Vì ma trận 0 gồm toàn phần tử 0 nên 0 là một ma trận chéo. Cho  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  và  $B = [b_{ij}]_{n \times n}$  là hai ma trận chéo, cho  $k \in \mathbb{R}$ . Ma trận  $C = A + B$  và  $D = kA$  đều là các ma trận chéo vì

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = 0, \quad d_{ij} = ka_{ij} = 0$$

với mọi  $i \neq j$ .

- (b) Kí hiệu tập con của  $M_{n \times n}$  gồm các ma trận có định thức bằng không là  $V$ . Nếu  $n = 1$  thì  $V$  chỉ có đúng một phần tử, đó là ma trận không  $[0]$  của  $M_{1 \times 1}$ . Do đó,  $V$  là một không gian con của  $M_{1 \times 1}$ . Nếu  $n \geq 2$  thì  $V$  không là một không gian con của  $M_{n \times n}$  vì nó không đóng đối với phép cộng. Thật vậy, hai ma trận chéo

$$A = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0) \quad \text{và} \quad B = \text{diag}(0, 0, \dots, 0, 1)$$

có định thức bằng không nhưng tổng  $A + B$  có định thức khác không.

- (c) Tập hợp con của  $M_{n \times n}$  gồm các ma trận có vết bằng không là một không gian con. Nhắc lại rằng vết của một ma trận là tổng các phần tử trên đường chéo của nó và ta có

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \text{ và } \text{tr}(kA) = k\text{tr}(A).$$

Ma trận không gồm toàn các phần tử không nên nó có vết bằng không. Cho  $A$  và  $B$  là hai ma trận có vết bằng không, cho  $k \in \mathbb{R}$ . Khi đó, tổng  $A + B$  và tích  $kA$  đều có vết bằng không vì

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) = 0, \text{tr}(kA) = k\text{tr}(A) = 0.$$

#### 4.10.

- (a) Tập con của  $M_{n \times n}$  gồm các ma trận đối xứng là một không gian con.
- (b) Để chứng minh khẳng định này, nhắc lại rằng một ma trận  $A$  là đối xứng khi và chỉ khi  $A^T = A$ . Hơn nữa, ta có các tính chất

$$(A + B)^T = A^T + B^T, (kA)^T = kA^T.$$

- (c) Tập con của  $M_{n \times n}$  gồm các ma trận khả nghịch không phải là một không gian con vì nó không chứa ma trận không trong khi ma trận không lại là véctơ không của  $M_{n \times n}$ .
- (d) Tập con của  $M_{n \times n}$  gồm các ma trận giao hoán với một ma trận  $A$  cho trước là một không gian con.

#### 4.11.

- (a) Tập con này của  $P_\infty$  không là một không gian con.
- (b) Tập con này của  $P_\infty$  không là một không gian con vì nó không đóng đối với phép nhân với vô hướng. Ở đây, vô hướng được hiểu là một số thực bất kì.

**4.12.** Vì  $V_1$  và  $V_2$  là các không gian con của  $V$  nên  $0 \in V_1$  và  $0 \in V_2$ , với  $0$  là vectơ không của  $V$ . Do đó  $0 \in V_1 \cap V_2$ . Cho  $u, v \in V_1 \cap V_2$  và  $k \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $u, v \in V_1$  và  $u, v \in V_2$ . Vì  $V_1$  và  $V_2$  là các không gian con của  $V$  nên

$$u + v \in V_1, \quad ku \in V_1, \quad u + v \in V_2, \quad ku \in V_2.$$

Do đó  $u + v \in V_1 \cap V_2$  và  $ku \in V_1 \cap V_2$ . Vậy  $V_1 \cap V_2$  là một không gian con của  $V$ .

**4.13.** Vì  $V_i$  là các không gian con của  $V$  nên  $0 \in V_i$  với mọi  $i \in I$ , với  $0$  là vectơ không của  $V$ . Do đó  $0 \in \bigcap_{i \in I} V_i$ . Cho  $u, v \in \bigcap_{i \in I} V_i$  và  $k \in \mathbb{R}$ . Khi đó,  $u, v \in V_i$  với mọi  $i \in I$ . Vì  $V_i$  là các không gian con của  $V$  nên

$$u + v \in V_i, \quad ku \in V_i$$

với mọi  $i \in I$ . Suy ra  $u + v \in \bigcap_{i \in I} V_i$  và  $ku \in \bigcap_{i \in I} V_i$ . Vậy  $\bigcap_{i \in I} V_i$  là một không gian con của  $V$ .

**4.14.** Ta thấy  $V_1$  và  $V_2$  là các đường thẳng đi qua gốc trong  $\mathbb{R}^2$ . Để đơn giản, chọn

$$V_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}, \quad V_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}.$$

Khi đó,  $V_1$  và  $V_2$  là các không gian con của  $\mathbb{R}^2$  và

$$V_1 \cup V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ hoặc } y = 0\}.$$

Ta chứng minh  $V_1 \cup V_2$  không là một không gian con của  $\mathbb{R}^2$  bằng cách chỉ ra nó không đóng đối với phép toán cộng vectơ. Thật vậy, hai vectơ  $u = (1, 0)$  và  $v = (0, 1)$  đều thuộc  $V_1 \cup V_2$  nhưng

$$u + v = (1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$$

không thuộc  $V_1 \cup V_2$  vì cả hai thành phần của nó đều khác không.

**4.15.** Vì  $V_1$  và  $V_2$  là các không gian con của  $V$  nên  $0 \in V_1$ ,  $0 \in V_2$ . Do đó,  $0 = 0 + 0 \in V_1 + V_2$ . Cho  $u + v \in V_1 + V_2$  và  $k \in \mathbb{R}$ . Khi đó, tồn tại phân tích

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2$$

với  $u_1, v_1 \in V_1$  và  $u_2, v_2 \in V_2$ . Ta có

$$u + v = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)$$

$$ku = k(u_1 + u_2) = ku_1 + ku_2.$$

Vì  $V_1$  và  $V_2$  là các không gian con của  $V$  nên

$$u_1 + v_1 \in V_1, \quad ku_1 \in V_1, \quad u_2 + v_2 \in V_2, \quad ku_2 \in V_2.$$

Do đó  $u + v \in V_1 + V_2$  và  $ku \in V_1 + V_2$ . Vậy  $V_1 + V_2$  là một không gian con của  $V$ .

#### 4.16.

- (a) Định nghĩa của  $V_1 + V_2$ .
- (b)  $V_1 \subset U$  và  $V_2 \subset U$ .
- (c)  $U$  là một không gian con của  $V$ .
- (d) Định nghĩa của quan hệ bao hàm.
- (e)  $v_1 = v_1 + 0$ ,  $v_2 = 0 + v_2$ .
- (f)  $V_1 + V_2 \subset U$ .
- (g) Định nghĩa của quan hệ bao hàm.

**4.17.** Ta sẽ chứng minh  $V_1 - V_2 = V_1 + V_2$ . Từ đó suy ra  $V_1 - V_2$  là một không gian con của  $V$  vì  $V_1 + V_2$  là một không gian con của  $V$ . Theo định nghĩa

$$V_1 - V_2 = V_1 + V_2 \Leftrightarrow \begin{cases} (V_1 - V_2) \subset (V_1 + V_2), \\ (V_1 + V_2) \subset (V_1 - V_2). \end{cases}$$

**Chứng minh**  $(V_1 - V_2) \subset (V_1 + V_2)$ : Lấy  $v \in V_1 - V_2$  bất kì. Khi đó, tồn tại  $v_1 \in V_1$  và  $v_2 \in V_2$  sao cho  $v = v_1 - v_2$ . Suy ra

$$v = v_1 + (-v_2).$$

Vì  $v_2 \in V_2$  và  $V_2$  là một không gian con của  $V$  nên  $-v_2 \in V_2$ . Do đó  $v \in V_1 + V_2$ . Vậy  $(V_1 - V_2) \subset (V_1 + V_2)$ .

**Chứng minh**  $(V_1 + V_2) \subset (V_1 - V_2)$ : Ta thực hiện chứng minh gần như giống hệt chứng minh trên. Lấy  $v \in V_1 + V_2$  bất kì. Khi đó, tồn tại  $v_1 \in V_1$  và  $v_2 \in V_2$  sao cho  $v = v_1 + v_2$ . Suy ra

$$v = v_1 - (-v_2).$$

Vì  $v_2 \in V_2$  và  $V_2$  là một không gian con của  $V$  nên  $-v_2 \in V_2$ . Do đó  $v \in V_1 - V_2$ . Vậy  $(V_1 + V_2) \subset (V_1 - V_2)$ .

## 4.18.

(a) Ta thấy

$$(-x)^n = (-1)^n x^n = \begin{cases} x^n & \text{nếu } n \text{ chẵn,} \\ -x^n & \text{nếu } n \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Do đó, hàm  $x^n$  là hàm chẵn (tương ứng, hàm lẻ) khi và chỉ khi số  $n$  là chẵn (tương ứng, lẻ).

(b) véctơ không của  $F(-\infty, \infty)$  là hàm 0, trong đó  $0(x) = 0$  với mọi  $x$ . Vì  $0(-x) = 0 = 0(x)$  nên 0 là một hàm chẵn. Cho  $f$  và  $g$  là các hàm chẵn và  $k \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $f(-x) = f(x)$  và  $g(-x) = g(x)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Ta có

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x),$$

$$(kf)(-x) = k[f(-x)] = k[f(x)] = (kf)(x).$$

Do đó  $f + g$  và  $kf$  là các hàm chẵn. Vậy tập hợp các hàm chẵn là một không gian con của  $F(-\infty, \infty)$ .

(c) Khẳng định này có chứng minh gần như giống hệt chứng minh của khẳng định (b).

## 4.19.

(a) Vì  $0 \in V_+$ ,  $0 \in V_-$  nên  $0 \in V_+ \cap V_-$ . Bây giờ, cho  $f \in V_+ \cap V_-$ . Ta cần chứng minh  $f = 0$ .

▷ Vì  $f \in V_+$  nên  $f(-x) = f(x)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

▷ Vì  $f \in V_-$  nên  $f(-x) = -f(x)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

Do đó, với mọi  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = f(-x) = -f(x).$$

Suy ra  $f(x) = 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ , tức là  $f = 0$ . Vậy  $V_+ \cap V_- = \{0\}$ .

(b) Cho  $x \in \mathbb{R}$  bất kì. Vì  $f = f_- + f_+$  nên

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x).$$

Để sử dụng giả thiết về tính chẵn, lẻ của các hàm  $f_+$ ,  $f_-$ , ta thay  $x$  bởi  $-x$  trong đẳng thức trên

$$f(-x) = f_+(-x) + f_-(-x) = f_+(x) - f_-(x).$$

Do đó

$$f_+(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)], \quad f_-(x) = \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)].$$

(c) Cho  $f \in F(-\infty, \infty)$ . Theo định nghĩa của  $V_+ + V_-$ , ta chỉ cần chỉ ra tồn tại các hàm  $f_+ \in V_+$  và  $f_- \in V_-$  sao cho  $f = f_+ + f_-$ . Phần (b) dẫn ta đến định nghĩa

$$f_+(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)], \quad f_-(x) = \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)].$$

Khi đó

$$f_+(x) + f_-(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)] = f(x).$$

Ta cần chứng minh  $f_+$  là một hàm chẵn và  $f_-$  là một hàm lẻ. Ta có

$$f_+(-x) = \frac{1}{2} [f(-x) + f(-(-x))] = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)] = f_+(x)$$

$$f_-(-x) = \frac{1}{2} [f(-x) - f(-(-x))] = \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)] = -f_-(x).$$

Do đó  $f_+$  là một hàm chẵn và  $f_-$  là một hàm lẻ như mong muốn.

#### 4.20.

(a) Vì ma trận  $0 \in M_{n \times n}$  có tất cả các phần tử bằng 0 nên 0 là một ma trận đối xứng. Cho  $A, B \in M_{n \times n}$  là các ma trận đối xứng và  $k \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $A^T = A$ ,  $B^T = B$ . Ta có

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B,$$

$$(kA)^T = kA^T = kA.$$

Suy ra,  $A + B$  và  $kA$  là các ma trận đối xứng. Vậy tập con của  $M_{n \times n}$  gồm các ma trận đối xứng là một không gian con.

(b) Khẳng định này có chứng minh giống hệt khẳng định (a).

**4.21.** Bài tập này có chứng minh giống hệt với chứng minh của bài tập liên quan đến hàm chẵn và hàm lẻ bên trên.

(a) Vì  $V_s$  và  $V_a$  là các không gian con của  $M_{n \times n}$  nên chúng đều chứa ma trận không. Do đó,  $0 \in V_s \cap V_a$ . Bây giờ, cho ma trận  $A \in V_s \cap V_a$ . Ta cần chứng minh  $A = 0$ .

▷ Vì  $A \in V_s$  nên  $A^T = A$ .

▷ Vì  $A \in V_a$  nên  $A^T = -A$ .

Do đó  $A = -A$ , tức là  $A = 0$ .

(b) Theo giả thiết

$$A = A_s + A_a.$$

Lấy chuyển vị hai vế, và sử dụng giả thiết  $A_s \in V_s$ ,  $A_a \in V_a$ , ta được

$$A^T = (A_s)^T + (A_a)^T = A_s - A_a.$$

Do đó

$$A_s = \frac{1}{2} (A + A^T), \quad A_a = \frac{1}{2} (A - A^T).$$

(c) Cho  $A \in M_{n \times n}$ . Theo định nghĩa của tổng hai không gian con, ta cần tìm các ma trận  $A_s \in V_s$  và  $A_a \in V_a$  sao cho  $A = A_s + A_a$ . Từ ý (b), ta định nghĩa

$$A_s = \frac{1}{2} (A + A^T), \quad A_a = \frac{1}{2} (A - A^T).$$

Khi đó,

$$A_s + A_a = \frac{1}{2} (A + A^T) + \frac{1}{2} (A - A^T) = A.$$

Ta cần chứng minh  $A_s \in V_s$  và  $A_a \in V_a$ . Ta có

$$(A_s)^T = \left[ \frac{1}{2} (A + A^T) \right]^T = \frac{1}{2} \left[ A^T + (A^T)^T \right] = \frac{1}{2} (A^T + A) = A_s,$$

$$(A_a)^T = \left[ \frac{1}{2} (A - A^T) \right]^T = \frac{1}{2} \left[ A^T - (A^T)^T \right] = \frac{1}{2} (A^T - A) = -A_a.$$

**4.22.** Kí hiệu tập con của  $\mathbb{R}^\infty$  cho trong đề bài là  $V$ . véc tơ không của  $\mathbb{R}^\infty$  là dãy  $(0)_{n=1}^\infty$  có tất cả các số hạng bằng không. Vì  $a0 + b0 = 0$  nên dãy số này thuộc vào  $V$ . Cho các dãy số  $(x_n)_{n=1}^\infty$  và  $(y_n)_{n=1}^\infty$  thuộc  $V$ , cho  $k \in \mathbb{R}$ . Theo định nghĩa

$$(x_n)_{n=1}^\infty + (y_n)_{n=1}^\infty = (x_n + y_n)_{n=1}^\infty, \quad k(x_n)_{n=1}^\infty = (kx_n)_{n=1}^\infty.$$

Ta có

$$\begin{aligned} a(x_{n-1} + y_{n-1}) + b(x_{n-2} + y_{n-2}) &= (ax_{n-1} + bx_{n-2}) + (ay_{n-1} + by_{n-2}) \\ &= x_n + y_n \end{aligned}$$

và

$$a(kx_{n-1}) + b(ky_{n-2}) = k(ax_{n-1} + bx_{n-2}) = kx_n.$$

Suy ra  $(x_n)_{n=1}^\infty + (y_n)_{n=1}^\infty \in V$  và  $k(x_n)_{n=1}^\infty \in V$ . Vậy  $V$  là một không gian con của  $\mathbb{R}^\infty$ .

**4.23.** Kí hiệu tập con của  $C^\infty(-\infty, \infty)$  cho trong đề bài là  $V$ . véc tơ không của  $C^\infty(-\infty, \infty)$  là hàm hằng 0. Vì  $a0' + b0 = 0 = 0''$  nên  $0 \in V$ . Cho  $f$  và  $g$  thuộc  $V$ , cho  $k \in \mathbb{R}$ . Ta có

$$\begin{aligned} a(f+g)'' + b(f+g) &= a(f' + g') + b(f+g) \\ &= (af' + bf) + (ag' + bg) \\ &= f'' + g'' \\ &= (f+g)''. \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} a(kf)' + b(kf) &= a(kf') + b(kf) \\ &= k(af' + bf) \\ &= kf'' = (kf)''. \end{aligned}$$

Suy ra  $f+g \in V$  và  $kf \in V$ . Vậy  $V$  là một không gian con của  $C^\infty(-\infty, \infty)$ .

**4.24.** Kí hiệu các véc tơ trong các ý (a), (b), (c), (d) lần lượt là  $v_1, v_2, v_3, v_4$ . Trong 4 véc tơ này, hiển nhiên  $v_3 = (0, 0, 0)$  là một tổ hợp tuyến tính của  $u$  và  $v$ :

$$(0, 0, 0) = 0u + 0v.$$

Để giải bài toán cho cả 3 vectơ còn lại, xét một vectơ tổng quát  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . vectơ  $(a, b, c)$  là một tổ hợp tuyến tính của  $u$  và  $v$  khi và chỉ khi phương trình vectơ

$$x_1 u + x_2 v = (a, b, c)$$

có nghiệm. Phương trình vectơ này tương đương với hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} 0x_1 + 1x_2 &= a \\ -1x_1 + 3x_2 &= b \\ 1x_1 - 1x_2 &= c. \end{aligned}$$

Khử Gauss ma trận hệ số mở rộng của đồng thời 3 hệ phương trình ứng với 3 vectơ  $v_1, v_2$  và  $v_4$

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & 3 \end{array} \right] &\longrightarrow \left[ \begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\longrightarrow \left[ \begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\longrightarrow \left[ \begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Do đó, trong 3 vectơ  $v_1, v_2$  và  $v_4$ , chỉ có vectơ  $v_1$  là một tổ hợp tuyến tính của  $u$  và  $v$ . Hơn nữa ta có

$$v_1 = 4u + 2v.$$

**4.25.** Để biểu thị tuyến tính ma trận  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  qua hệ ma trận  $A, B, C, D$ , ta cần giải phương trình

$$x_1 A + x_2 B + x_3 C + x_4 D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Phương trình này tương đương với hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} 1x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 0x_4 &= a \\ -1x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 &= b \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 &= c \\ 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 &= d. \end{aligned}$$

Khử Gauss ma trận hệ số mở rộng của đồng thời 2 hệ phương trình tương ứng với hai ma trận  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  và  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ , tức là ma trận

$$\left[ \begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 4 & 2 \end{array} \right]$$

về dạng bậc thang. Từ đó, ta nhận được biểu thị tuyến tính

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = -3A + 8B + 2C - 9D,$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = A - B + C + 3D.$$

**4.26.** Các biểu thị tuyến tính cần tìm là

$$\begin{aligned} 6 + 11x + 6x^2 &= 4p_1 + 5p_2 + p_3 \\ 0 &= 0p_1 + 0p_2 + 0p_3 \\ 7 + 8x + 9x^2 &= 0p_1 + 2p_2 + 3p_3. \end{aligned}$$

**4.27.**

- Hệ véctơ đã cho là một hệ sinh của  $\mathbb{R}^3$ .
- Hệ véctơ đã cho không là một hệ sinh của  $\mathbb{R}^3$ .

**4.28.**

- Hệ đa thức  $p_1, p_2, p_3, p_4$  là một hệ sinh của  $\mathcal{P}_2$ .
- Hệ đa thức  $p_1, p_2, p_3$  không là một hệ sinh của  $\mathcal{P}_2$ .

**4.29.**

a. Ta có đẳng thức lượng giác quen thuộc

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Do đó  $\cos 2x \in \mathcal{L}(\cos^2 x, \sin^2 x)$ .

b. Hàm  $\sin 2x$  thuộc  $\mathcal{L}(\cos^2 x, \sin^2 x)$  khi và chỉ khi phương trình

$$a \cos^2 x + b \sin^2 x = \sin 2x$$

trong  $F(-\infty, \infty)$ , có nghiệm  $a, b \in \mathbb{R}$ . Cho  $x$  lần lượt là  $0, \frac{\pi}{4}$  và  $\frac{\pi}{2}$ , ta được hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{array}{rcl} 1a & + & 0b = 0 \\ \frac{1}{2}a & + & \frac{1}{2}b = 1 \\ 0a & + & 1b = 0 \end{array}$$

Hệ này vô nghiệm. Vậy  $\sin 2x$  không thuộc  $\mathcal{L}(\cos^2 x, \sin^2 x)$ .

#### 4.30.

4.31. Ta có

$$\mathcal{L}(p_1, p_2) = \mathcal{L}(q_1, q_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{L}(p_1, p_2) \subset \mathcal{L}(q_1, q_2) \\ \mathcal{L}(q_1, q_2) \subset \mathcal{L}(p_1, p_2) \end{cases}$$

Chúng minh  $\mathcal{L}(p_1, p_2) \subset \mathcal{L}(q_1, q_2)$ . Ta thấy

$$\begin{aligned} 1 + x^2 &= (1 + x)^2 - (2x) \\ 1 + x + x^2 &= (1 + x)^2 - \frac{1}{2}(2x) \end{aligned}$$

Do đó  $p_1, p_2$  là tổ các tổ hợp tuyến tính của  $q_1, q_2$ , tức là  $p_1, p_2 \in \mathcal{L}(q_1, q_2)$ . Suy ra  $\mathcal{L}(p_1, p_2) \subset \mathcal{L}(q_1, q_2)$ .

Chúng minh  $\mathcal{L}(q_1, q_2) \subset \mathcal{L}(p_1, p_2)$  được thực hiện tương tự.

4.32. Đang cập nhật.

4.33. Chúng minh  $\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) \subset \mathcal{L}(v_1 + v_2, v_1 - v_2, v_2 + v_3)$ .

Để chứng minh bao hàm thức này, ta cần chỉ ra  $v_1, v_2, v_3$  là các tổ hợp tuyến tính của  $v_1 + v_2$ ,  $v_1 - v_2$  và  $v_2 + v_3$ . Đặt  $u_1 = v_1 + v_2$ ,  $u_2 = v_1 - v_2$  và  $u_3 = v_2 + v_3$ . Xem  $v_1, v_2, v_3$  là các ẩn, rồi thực hiện khử Gauss:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = u_1 \\ v_1 - v_2 = u_2 \\ v_2 + v_3 = u_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 = u_1 \\ 2v_2 = u_1 - u_2 \\ v_2 + v_3 = u_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 = u_1 \\ 2v_2 = u_1 - u_2 \\ 2v_3 = 2u_3 - (u_1 - u_2) \end{cases}$$

Từ hệ bậc thang này ta thu được  $\mathcal{L}(v_1 + v_2, v_1 - v_2, v_2 + v_3) \subset \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$  đúng vì

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 \\ v_2 &= \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 \\ v_3 &= -\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 + u_3. \end{aligned}$$

Vậy  $\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) \subset \mathcal{L}(v_1 + v_2, v_1 - v_2, v_2 + v_3)$ .

Bao hàm thức ngược lại đúng vì  $v_1 + v_2$ ,  $v_1 - v_2$  và  $v_2 + v_3$  là các tổ hợp tuyến tính của  $v_1, v_2, v_3$ .

#### 4.34.

- Hệ véc tơ đã cho là một hệ độc lập tuyến tính.
- Hệ véc tơ đã cho là một hệ phụ thuộc tuyến tính.

#### 4.35.

- Hệ đa thức đã cho là một hệ véc tơ phụ thuộc tuyến tính.
- Hệ đa thức đã cho là một hệ véc tơ độc lập tuyến tính.

**4.36.** Hệ ma trận đã cho là một hệ vectơ độc lập tuyến tính.

**4.37.** Hệ ma trận đã cho là một hệ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi phương trình vectơ

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & k \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

chỉ có nghiệm tầm thường  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . Phương trình vectơ trên tương đương với hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 &= 0 \\ 1x_1 + 1x_2 - kx_3 &= 0 \\ kx_1 + 3x_2 - 1x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Khử Gauss ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính này ta được

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -k & 0 \\ k & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k+1 & 0 \\ 0 & 2k-3 & k+1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & (k+1)(4-2k) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Do đó, hệ phương trình tuyến tính chỉ có nghiệm tầm thường khi và chỉ khi  $(k+1)(4-2k) \neq 0$ , tức là  $k \neq -1$  và  $k \neq 2$ . Vậy tập hợp các giá trị cần tìm của  $k$  là  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ .

**4.38.**

a. Vì  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  nên

$$6(1) - 2(3\sin^2 x) - 3(2\cos^2 x) = 0.$$

Suy ra hệ hàm  $1, 3\sin^2 x, 2\cos^2 x$  phụ thuộc tuyến tính.

- b. Hệ hàm  $x, \sin x, \cos x$  độc lập tuyến tính khi và chỉ khi phương trình véctơ

$$x_1x + x_2\sin x + x_3\cos x = 0$$

trong  $F(-\infty, \infty)$  chỉ có nghiệm tầm thường  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . Cho  $x$  các giá trị  $0, \frac{\pi}{2}, \pi$  ta thu được hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 &= 0 \\ \frac{\pi}{2}x_1 + 1x_2 + 0x_3 &= 0 \\ \pi x_1 + 0x_2 - 1x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Hệ này có nghiệm tầm thường  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . Vậy hệ hàm  $x, \sin x, \cos x$  độc lập tuyến tính.

#### 4.39.

- a. Hệ hàm đã cho là một hệ véctơ độc lập tuyến tính.  
b. Hệ hàm đã cho là một hệ véctơ phụ thuộc tuyến tính.

#### 4.40. Trong phương trình véctơ

$$x_1f_1(x) + x_2f_2(x) + x_3f_3(x) = 0$$

của không gian véctơ  $F(-\infty, \infty)$ , cho  $x$  các giá trị  $0, 1, 2$ .

**4.41.** Xét hệ  $n$  đa thức  $p_j = a_j + b_jx + c_jx^2$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  trong không gian véctơ  $\mathcal{P}_2$ , với  $n > 3$ .

Theo định nghĩa, hệ đa thức  $p_1, p_2, \dots, p_n$  phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi phương trình véctơ

$$x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = 0$$

có nghiệm không tầm thường. Phương trình véctơ này tương đương với hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n &= 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n &= 0 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n &= 0. \end{aligned}$$

Vì  $n > 3$  nên hệ phương trình tuyến tính thuần nhất này có số ẩn nhiều hơn số phương trình. Do đó, hệ có nghiệm không tầm thường.

Vậy hệ  $n$  đa thức  $p_1, p_2, \dots, p_n$  là một hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính.

**4.42.** Hệ vectơ  $v_1, v_2, v_3$  độc lập tuyến tính khi và chỉ khi phương trình vectơ

$$x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$$

chỉ có nghiệm tầm thường. Giả sử phương trình này có một nghiệm không tầm thường  $x_1 = k_1, x_2 = k_2, x_3 = k_3$ .

Nếu  $k_3 \neq 0$  thì đẳng thức  $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0$  kéo theo

$$v_3 = -\frac{k_1}{k_3}v_1 - \frac{k_2}{k_3}v_2.$$

Đẳng thức này mâu thuẫn với giả thiết  $v_3 \notin \mathcal{L}(v_1, v_2)$ . Do đó  $k_3 = 0$ . Khi đó đẳng thức  $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0$  trở thành

$$k_1v_1 + k_2v_2 = 0.$$

Do đó,  $x_1 = k_1, x_2 = k_2$  là một nghiệm không tầm thường của phương trình vectơ

$$x_1v_1 + x_2v_2 = 0.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết độc lập tuyến tính của hệ vectơ  $v_1, v_2$ .

Như vậy, giả sử phương trình vectơ  $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$  có nghiệm không tầm thường là sai. Nói cách khác, phương trình vectơ này chỉ có nghiệm tầm thường. Vậy hệ vectơ  $v_1, v_2, v_3$  độc lập tuyến tính.

**4.43.** Vì  $\{v_1, v_2\} \subset \{v_1, v_2, v_3\}$  nên  $\mathcal{L}(v_1, v_2) \subset \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ .

Để có bao hàm thức ngược lại,  $\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) \subset \mathcal{L}(v_1, v_2)$ , ta cần chỉ ra  $v_1, v_2, v_3$  đều thuộc  $\mathcal{L}(v_1, v_2)$ . Hiển nhiên  $v_1, v_2$  thuộc  $\mathcal{L}(v_1, v_2)$ . Theo giả thiết,  $v_3$  là một tổ hợp tuyến tính của  $v_1$  và  $v_2$ , do đó,  $v_3 \in \mathcal{L}(v_1, v_2)$ . Ta thu được  $\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) \subset \mathcal{L}(v_1, v_2)$ .

Vậy  $\mathcal{L}(v_1, v_2) = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ .

**4.44.**

- Sai. Xét bao tuyến tính của vectơ không.
- Sai. Xét bao tuyến tính của hai vectơ cùng phương.

- c. Đúng.  
 d. Sai. Khi thêm vectơ vào hệ sinh, hệ mới nhận được cũng là một hệ sinh.  
 e. Sai. Các tổ hợp tuyến tính của  $x + 1$ ,  $(x + 1)^2$ ,  $(x + 1)^3$  có dạng

$$a(x + 1) + b(x + 1)^2 + c(x + 1)^3.$$

Tất cả các đa thức này đều nhận  $-1$  là một nghiệm, nhưng  $\mathcal{P}_3$  chứa đa thức không nhận  $-1$  là nghiệm.

#### 4.45. Theo định nghĩa

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} = (y_n)_{n=1}^{\infty} \Leftrightarrow x_n = y_n \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Do đó, nếu  $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (y_n)_{n=1}^{\infty}$  thì  $x_1 = y_1$  và  $x_2 = y_2$ .

Bây giờ giả sử  $x_1 = y_1$  và  $x_2 = y_2$ . Ta cần chứng minh  $x_n = y_n$  với mọi  $n$  bằng quy nạp theo  $n$ . Giả sử rằng  $x_n = y_n$  với mọi  $n = 1, 2, \dots, k$ , trong đó  $k \geq 2$ . Ta có

$$x_{k+1} = ax_k + bx_{k-1} = ay_k + by_{k-1} = y_{k+1}.$$

Suy ra  $x_n = y_n$  với  $n = k + 1$ . Theo nguyên lý quy nạp,  $x_n = y_n$  với mọi  $n = 1, 2, 3, \dots$

#### 4.46.

- a. Cho  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$ . Theo định nghĩa, dãy số thực  $(\lambda^n)_{n=1}^{\infty}$  thuộc  $V_{5,-6}$  khi và chỉ khi

$$\lambda^n = 5\lambda^{n-1} - 6\lambda^{n-2}, \text{ với mọi } n = 3, 4, \dots$$

Vì  $\lambda \neq 0$  nên các phương trình này tương đương với  $\lambda^2 = 5\lambda - 6$ , tức là  $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ . Phương trình bậc hai này có hai nghiệm là  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 3$ . Ta nhận được hai dãy số  $(2^n)_{n=1}^{\infty}$  và  $(3^n)_{n=1}^{\infty}$  cần tìm.

- b. Hệ hai vectơ  $(2^n)_{n=1}^\infty$  và  $(3^n)_{n=1}^\infty$  của  $V_{5,-6}$  là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi phương trình vectơ

$$x(2^n)_{n=1}^\infty + y(3^n)_{n=1}^\infty = 0$$

chỉ có nghiệm tầm thường. Ta có

$$x(2^n)_{n=1}^\infty + y(3^n)_{n=1}^\infty = (2^n x + 3^n y)_{n=1}^\infty = 0,$$

và vectơ không của  $V_{5,-6}$  là  $0 = (0)_{n=1}^\infty$ . Do đó, phương trình vectơ trên tương đương với hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} 2^1 x + 3^1 y &= 0, \\ 2^2 x + 3^2 y &= 0. \end{aligned}$$

Hệ này có nghiệm duy nhất  $x = y = 0$ . Vậy hệ vectơ  $(2^n)_{n=1}^\infty$  và  $(3^n)_{n=1}^\infty$  của  $V_{5,-6}$  là độc lập tuyến tính.

#### 4.47.

- a. Cho  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$ . Dãy số  $(\lambda^n)_{n=1}^\infty$  thuộc  $V_{4,-4}$  khi và chỉ khi

$$\lambda^n = 4\lambda^{n-1} - 4\lambda^{n-2}, \text{ với mọi } n = 3, 4, \dots$$

Vì  $\lambda \neq 0$  nên các phương trình này tương đương với  $\lambda^2 = 4\lambda - 4$ , tức là  $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ . Phương trình bậc hai này có nghiệm duy nhất  $\lambda = 2$ . Ta thu được dãy số  $(2^n)_{n=1}^\infty$  cần tìm.

- b. Ta cần chứng minh dãy số  $(n \cdot 2^n)_{n=1}^\infty$  thuộc  $V_{4,-4}$ . Với mọi  $n \geq 3$ , ta có

$$\begin{aligned} 4((n-1) \cdot 2^{n-1}) - 4((n-2) \cdot 2^{n-2}) &= 4 \cdot 2^{n-2} (2(n-1) - (n-2)) \\ &= n \cdot 2^n. \end{aligned}$$

Do đó, dãy  $(n \cdot 2^n)_{n=1}^\infty$  thuộc  $V_{4,-4}$ .

- c. Hệ vectơ  $(2^n)_{n=1}^\infty$  và  $(n \cdot 2^n)_{n=1}^\infty$  của  $V_{4,-4}$  độc lập tuyến tính khi và chỉ khi phương trình vectơ

$$x(2^n)_{n=1}^\infty + y(n \cdot 2^n)_{n=1}^\infty = 0$$

chỉ có nghiệm tầm thường. Ta có

$$x(2^n)_{n=1}^\infty + y(n \cdot 2^n)_{n=1}^\infty = (2^n x + n \cdot 2^n y)_{n=1}^\infty = 0,$$

và vectơ không của  $V_{4,-4}$  là  $0 = (0)_{n=1}^{\infty}$ . Do đó, phương trình vectơ trên tương đương với hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 0, \\ 2x + 4y &= 0. \end{aligned}$$

Hệ này có nghiệm duy nhất  $x = y = 0$ . Vậy hệ vectơ  $(2^n)_{n=1}^{\infty}$  và  $(n \cdot 2^n)_{n=1}^{\infty}$  của  $V_{4,-4}$  là độc lập tuyến tính.

#### 4.48.

a. Cho  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $e^{\lambda x}$  thuộc  $V$  khi và chỉ khi

$$(e^{\lambda x})'' = (e^{\lambda x})' + 12e^{\lambda x}.$$

Vì  $(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$ ,  $(e^{\lambda x})'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$  nên phương trình trên tương đương với  $\lambda^2 = \lambda + 12$ , tức là  $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$ . Phương trình bậc hai này có hai nghiệm  $\lambda_1 = 4$  và  $\lambda_2 = -3$ . Ta thu được hai hàm  $e^{4x}$  và  $e^{-3x}$  cần tìm.

b. Hệ vectơ  $e^{4x}$  và  $e^{-3x}$  của  $V$  độc lập tuyến tính khi và chỉ khi phương trình vectơ

$$x_1 e^{4x} + x_2 e^{-3x} = 0$$

chỉ có nghiệm tầm thường  $x_1 = x_2 = 0$ . Cho  $x = 0$  và  $x = 1$  trong phương trình trên ta được hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0, \\ e^{4x_1} + e^{-3x_2} &= 0. \end{aligned}$$

Hệ này có nghiệm duy nhất  $x_1 = x_2 = 0$ . Vậy hệ vectơ  $e^{4x}$ ,  $e^{-3x}$  của  $V$  là độc lập tuyến tính.

**4.49.** Lời giải bài này gần như giống hệt với bài trên  $\lambda = 5$ .

**4.50.** Định thức của ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 12 & -1 \\ 2 & 1 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

là  $-16$ .

**4.51.** Ký hiệu các ma trận trong đề bài lần lượt là  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Hệ ma trận  $A_1, A_2, A_3, A_4$  là một cơ sở của  $M_{2 \times 2}$  khi và chỉ khi phương trình vectơ

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4 = A$$

có nghiệm duy nhất với mọi ma trận  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}$ . Phương trình vectơ trên tương đương với hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{array}{rrrrrr} 0x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & a \\ 1x_1 & + & 2x_2 & + & 1x_3 & + & 1x_4 & = & b \\ 1x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 1x_4 & = & c \\ 1x_1 & + & 3x_2 & + & 1x_3 & + & 2x_4 & = & d \end{array}$$

Hệ phương trình tuyến tính này có nghiệm với mọi  $a, b, c, d$  khi và chỉ khi định thức của ma trận hệ số của nó khác không. Ta có

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

Vậy hệ ma trận đã cho không phải một cơ sở của  $M_{2 \times 2}$ .

**4.54.** Hệ vectơ  $v_1, v_2, \dots, v_p$  là một hệ sinh của  $V$  khi và chỉ khi phương trình vectơ

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_p v_p = v$$

có nghiệm  $x_1, x_2, \dots, x_p \in \mathbb{R}$  với mọi vectơ  $v \in V$ . Tọa độ hóa đối với cơ sở  $\mathcal{B}$ , phương trình vectơ trong  $V$  này trở thành

$$[x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_p v_p]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}}$$

Vì  $[x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_p v_p]_{\mathcal{B}} = x_1 [v_1]_{\mathcal{B}} + x_2 [v_2]_{\mathcal{B}} + \dots + x_p [v_p]_{\mathcal{B}}$  nên đẳng thức trên tương đương với phương trình vectơ trong  $\mathbb{R}^n$

$$x_1 [v_1]_{\mathcal{B}} + x_2 [v_2]_{\mathcal{B}} + \dots + x_p [v_p]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}}$$

Vì  $[v]_{\mathcal{B}}$  có thể là bất kỳ vectơ nào của  $\mathbb{R}^n$  khi  $v$  thay đổi trong  $V$  nên phương trình vectơ trong  $\mathbb{R}^n$  này có nghiệm với mọi  $v \in V$  khi và chỉ khi hệ vectơ tọa độ  $[v_1]_{\mathcal{B}}, [v_2]_{\mathcal{B}}, \dots, [v_p]_{\mathcal{B}}$  là một hệ sinh của  $\mathbb{R}^n$ .

**4.55.** Vì một hệ vectơ là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi nó không độc lập tuyến tính nên ta chỉ cần chứng minh khẳng định về tính độc lập tuyến tính. Theo định nghĩa, hệ vectơ  $v_1, v_2, \dots, v_p$  là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi phương trình vectơ

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_p v_p = 0$$

chỉ có nghiệm tầm thường  $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$ . Tọa độ hóa theo cơ sở  $\mathcal{B}$ , phương trình vectơ trong  $V$  này trở thành

$$[x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_p v_p]_{\mathcal{B}} = [0]_{\mathcal{B}}$$

Vì  $[x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_p v_p]_{\mathcal{B}} = x_1 [v_1]_{\mathcal{B}} + x_2 [v_2]_{\mathcal{B}} + \dots + x_p [v_p]_{\mathcal{B}}$  và  $[0]_{\mathcal{B}} = 0$  nên đẳng thức trên tương đương với phương trình vectơ trong  $\mathbb{R}^n$

$$x_1 [v_1]_{\mathcal{B}} + x_2 [v_2]_{\mathcal{B}} + \dots + x_p [v_p]_{\mathcal{B}} = 0$$

Phương trình vectơ này của  $\mathbb{R}^n$  chỉ có nghiệm tầm thường  $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$  khi và chỉ khi hệ vectơ tọa độ  $[v_1]_{\mathcal{B}}, [v_2]_{\mathcal{B}}, \dots, [v_p]_{\mathcal{B}}$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^n$ .

**4.56.** Sử dụng kết quả của hai bài tập trên, ta thấy rằng các khẳng định sau tương đương với nhau.

- ▷ Hệ vectơ  $v_1, v_2, \dots, v_p$  là một cơ sở của  $V$ .
- ▷ Hệ vectơ  $v_1, v_2, \dots, v_p$  đồng thời là hệ sinh và hệ độc lập tuyến tính của  $V$ .
- ▷ Hệ vectơ tọa độ  $[v_1]_{\mathcal{B}}, [v_2]_{\mathcal{B}}, \dots, [v_p]_{\mathcal{B}}$  đồng thời là hệ sinh và hệ độc lập tuyến tính của  $\mathbb{R}^n$ .
- ▷ Hệ vectơ tọa độ  $[v_1]_{\mathcal{B}}, [v_2]_{\mathcal{B}}, \dots, [v_p]_{\mathcal{B}}$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^n$ .

**4.57.** Cố định cơ sở chính tắc của  $P_2$ , tức là cơ sở  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ .

- a. Hệ đa thức  $p_1, p_2, p_3$  là một cơ sở của  $P_2$  khi và chỉ khi hệ vectơ tọa độ của chúng trong cơ sở  $\mathcal{B}$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^3$ ,

$$[p_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad [p_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad [p_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- b. vectơ tọa độ của đa thức  $p$  trong cơ sở  $p_1, p_2, p_3$  chính là vectơ tọa độ của  $[p]_{\mathcal{B}}$  trong cơ sở  $[p_1]_{\mathcal{B}}, [p_2]_{\mathcal{B}}, [p_3]_{\mathcal{B}}$ . vectơ cần tìm là  $(-1, -1, 3)$ .

**4.58.** Tọa độ hóa các đa thức trên đối với cơ sở chính tắc của  $P_3$ , rồi chuyển bài toán về không gian vectơ  $\mathbb{R}^4$ . Ma trận

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

có định thức là 0. Do đó, hệ đa thức đã cho không là một cơ sở của  $P_3$ .

**4.59.** Tọa độ hóa các ma trận trên trong cơ sở  $E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}$  của  $M_{2 \times 2}$ , chuyển bài toán về không gian vectơ  $\mathbb{R}^4$ . Định thức của ma trận

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

là  $-32$ . Hệ ma trận đã cho là một cơ sở của  $M_{2 \times 2}$ .

**4.60.**

- a. Không gian con các ma trận chéo của  $M_{2 \times 2}$  là một không gian vectơ 2 chiều với một cơ sở là hệ ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- b. Không gian con các ma trận tam giác trên của  $M_{2 \times 2}$  là một không gian vectơ 3 chiều với một cơ sở là hệ vectơ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**4.61.**

- a. Không gian con các ma trận phản đối xứng của  $M_{2 \times 2}$  là một không gian véc tơ 1 chiều với một cơ sở là ma trận  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
- b. Không gian con các ma trận có vết bằng không của  $M_{2 \times 2}$  là một không gian véc tơ 3 chiều với một cơ sở là hệ véc tơ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**4.62.** Cho ma trận  $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}$ . Với mỗi cặp  $(i, j)$ , nhắc lại rằng  $E_{ij} \in M_{n \times n}$  là ma trận có phần tử khác không duy nhất là giá trị là 1 ở vị trí  $(i, j)$ .

- a. Ma trận  $A$  là chéo khi và chỉ khi  $a_{ij} = 0$  với mọi  $i \neq j$ . Do đó

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}E_{11} + a_{22}E_{22} + \dots + a_{nn}E_{nn}$$

với  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  là các số thực xác định duy nhất. Vậy không gian con các ma trận chéo của  $M_{n \times n}$  là một không gian véc tơ  $n$  chiều với một cơ sở là hệ ma trận

$$E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}$$

- b. Ma trận  $A$  đối xứng khi và chỉ khi  $a_{ij} = a_{ji}$  với mọi  $i, j$ . Do đó

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}E_{11} + a_{22}E_{22} + \dots + a_{nn}E_{nn} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} (E_{ij} + E_{ji})$$

với  $a_{ij}$ ,  $i \leq j$ , là các số thực xác định duy nhất. Vậy không gian con các ma trận đối xứng của  $M_{n \times n}$  có một cơ sở là hệ ma trận  $E_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  và  $E_{ij} + E_{ji}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ . Số chiều của không gian véc tơ này là  $n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$ .

**4.63.** Bài tập này có cách làm tương tự như bài trên nên lời giải chỉ có đáp số.

- Không gian con các ma trận tam giác trên của  $M_{n \times n}$  có một cơ sở là hệ ma trận  $E_{ij}$  với  $1 \leq i \leq j \leq n$ . Số chiều của không gian vectơ này là  $\frac{n^2+n}{2}$ .
- Không gian con các ma trận phản đối xứng của  $M_{n \times n}$  có một cơ sở là hệ ma trận  $E_{ij} - E_{ji}$  với  $1 \leq i < j \leq n$ . Số chiều của không gian vectơ này là  $\frac{n^2-n}{2}$ .
- Không gian con các ma trận có vết bằng không của  $M_{n \times n}$  có một cơ sở là hệ ma trận  $E_{ij}$  với  $i \neq j$  và  $E_{ii} - E_{nn}$  với  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Số chiều của không gian vectơ này là  $n^2 - 1$ .

**4.64.** Lấy  $v_1 \in V$  là một vectơ khác không bất kỳ. Ví dụ, chọn  $v_1 = (0, 0)$ . Các vectơ thuộc  $\mathcal{L}(v_1)$  có dạng

$$kv_1 = k(0, 0) = (k-1, k-1)$$

Ta thấy  $\mathcal{L}(v_1) \neq V$ , ví dụ  $v_2 = (1, 0) \in V$  nhưng  $v_2 \notin \mathcal{L}(v_1)$ . Khi đó, hệ vectơ  $v_1, v_2$  là độc lập tuyến tính. Ta cần xác định xem  $\mathcal{L}(v_1, v_2) = V$  hay  $\mathcal{L}(v_1, v_2) \neq V$ . Một vectơ  $v = (a, b)$  của  $V$  thuộc vào  $\mathcal{L}(v_1, v_2)$  khi và chỉ khi phương trình vectơ

$$x_1v_1 + x_2v_2 = v$$

có nghiệm  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ . Ta có

$$\begin{aligned} x_1v_1 + x_2v_2 &= x_1(0, 0) + x_2(1, 0) \\ &= (x_1 - 1, x_2 - 1) + (x_1 + x_1 - 1, x_2 - 1) \\ &= ((x_1 - 1) + (2x_1 - 1) + 1, (x_2 - 1) + (x_2 - 1) + 1) \\ &= (3x_1 - 1, 2x_2 - 1) \end{aligned}$$

Phương trình vectơ trên tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 - 1 = a \\ 2x_2 - 1 = b \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm duy nhất  $x_1 = \frac{1}{3}(a+1)$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}(b+1)$  với mọi  $a, b \in \mathbb{R}$ . Suy ra  $\mathcal{L}(v_1, v_2) = V$ . Vậy hệ vectơ  $v_1 = (0, 0)$ ,  $v_2 = (1, 0)$  là một cơ sở của  $V$ , số chiều của  $V$  là 2.

**4.65.**  $V$  là một không gian vectơ 2 chiều với cơ sở là một hệ hai vectơ bất kỳ  $v_1, v_2$  thỏa mãn

$$v_1 \neq (0, 1), \quad v_2 \notin \mathcal{L}(v_1).$$

**4.66.**

- a. Cho  $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ . Dãy số  $(\lambda^n)_{n=1}^\infty$  thuộc  $V_{a,b}$  khi và chỉ khi

$$\lambda^n = a\lambda^{n-1} + b\lambda^{n-2}, \text{ với mọi } n \geq 3.$$

Điều này tương đương với  $\lambda^2 = a\lambda + b$ , tức là  $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$ . Biệt thức của phương trình bậc hai này là

$$\Delta = (-a)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-b) = a^2 + 4b$$

Theo giả thiết,  $\Delta > 0$ . Do đó, phương trình  $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$  có 2 nghiệm thực phân biệt  $\lambda_1$  và  $\lambda_2$ . Ta nhận được các dãy  $(\lambda_1^n)_{n=1}^\infty$  và  $(\lambda_2^n)_{n=1}^\infty$  cần tìm.

- b. Hai dãy số  $(\lambda_1^n)_{n=1}^\infty$  và  $(\lambda_2^n)_{n=1}^\infty$  lập thành một cơ sở của  $V_{a,b}$  khi và chỉ khi phương trình vectơ

$$x(\lambda_1^n)_{n=1}^\infty + y(\lambda_2^n)_{n=1}^\infty = (x_n)_{n=1}^\infty$$

có nghiệm thực  $x, y$  duy nhất với mọi  $(x_n)_{n=1}^\infty \in V_{a,b}$ . Vì

$$x(\lambda_1^n)_{n=1}^\infty + y(\lambda_2^n)_{n=1}^\infty = (\lambda_1^n x + \lambda_2^n y)_{n=1}^\infty$$

nên phương trình vectơ trong  $V_{a,b}$  trên tương đương với hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} \lambda_1 x + \lambda_2 y &= x_1 \\ \lambda_1^2 x + \lambda_2^2 y &= x_2 \end{aligned}$$

Hệ phương trình này có nghiệm duy nhất với mọi  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  khi và chỉ khi định thức của ma trận hệ số của nó khác không. Định thức này là

$$\det \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \lambda_2^2 - \lambda_2 \lambda_1^2 = \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)$$

Vì các số thực  $\lambda_1, \lambda_2$  khác không và khác nhau nên định thức này khác không. Vậy hệ vectơ  $(\lambda_1^n)_{n=1}^\infty$  và  $(\lambda_2^n)_{n=1}^\infty$  là một cơ sở của  $V_{a,b}$ .

#### 4.67.

- a.  $\lambda_1$  và  $\lambda_2$  là các nghiệm của phương trình bậc hai  $\lambda^2 = \lambda + 12$ , tức là  $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -3$ .

b. véctơ tọa độ của  $(x_n)_{n=1}^\infty$  đối với cơ sở  $(4^n)_{n=1}^\infty, ((-3)^n)_{n=1}^\infty$  là nghiệm duy nhất của phương trình

$$x(4^n)_{n=1}^\infty + y((-3)^n)_{n=1}^\infty = (x_n)_{n=1}^\infty,$$

với  $x, y \in \mathbb{R}$ . Vì

$$x(4^n)_{n=1}^\infty + y((-3)^n)_{n=1}^\infty = (4^n x + (-3)^n y)_{n=1}^\infty$$

nên phương trình véctơ trên tương đương với hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} 4^1 x + (-3)^1 y &= x_1 = -2 \\ 4^2 x + (-3)^2 y &= x_2 = 3 \end{aligned}$$

Hệ này có nghiệm duy nhất  $x = -\frac{3}{28}, y = \frac{11}{21}$ . Vậy véctơ tọa độ của dãy số  $(x_n)_{n=1}^\infty$  trong cơ sở  $(4^n)_{n=1}^\infty, ((-3)^n)_{n=1}^\infty$  của  $V_{1,2}$  là

$$\left(-\frac{3}{28}, \frac{11}{21}\right)$$

c. Từ ý (b), ta có

$$(x_n)_{n=1}^\infty = -\frac{3}{28}(4^n)_{n=1}^\infty + \frac{11}{21}((-3)^n)_{n=1}^\infty$$

Suy ra

$$x_n = -\frac{3 \cdot 4^n}{28} + \frac{11 \cdot (-3)^n}{21}$$

**4.68.** Bài tập này có lời giải gần như giống hệt lời giải của bài tập trên.  $\lambda$  là số thực duy nhất thỏa mãn  $\lambda^2 = a\lambda + b$ . Cụ thể,  $\lambda = \frac{a}{2}$ .

**4.69.**  $x_n = -\frac{6}{35}(-5)^n + \frac{1}{14}(2^n)$

**4.70.**  $y_n = -\frac{19}{9} \cdot 3^n + \frac{10}{9} n \cdot 3^n$

**4.71.**

- a. Để tìm ma trận chuyển cơ sở  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ , khử Gauss-Jordan ma trận  $\left[ \mathcal{B} \mid \mathcal{B}' \right]$ :

$$\left[ \mathcal{B} \mid \mathcal{B}' \right] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & -2 & -5 \end{array} \right] \\ \rightsquigarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & -5 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{19}{2} & \frac{13}{2} & \frac{25}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{13}{2} \end{array} \right]$$

$$\text{Do đó } P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -7 & -5 & -9 \\ \frac{19}{2} & \frac{13}{2} & \frac{25}{2} \\ -\frac{11}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

- b. vectơ tọa độ của vectơ  $v$  trong cơ sở  $\mathcal{B}'$  là  $(-7, -12, 8)$ .  
 c. vectơ tọa độ của vectơ  $v$  trong cơ sở  $\mathcal{B}$  là

$$[v]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 5 \\ -\frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

#### 4.72.

- a. Ma trận  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$  có hệ vectơ cột là hệ vectơ tọa độ của các vectơ của cơ sở  $\mathcal{C}$  trong cơ sở  $\mathcal{B}$ , do đó, từ giả thiết

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

- b. Ma trận chuyển cơ sở  $P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}$  là nghịch đảo của ma trận chuyển cơ sở  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$ , do đó

$$P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

- c. vectơ tọa độ của vectơ  $w$  trong cơ sở  $\mathcal{C}$  là

$$[w]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} [w]_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix}$$

**4.73.** Giả sử  $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ . Theo định nghĩa

$$P = \begin{bmatrix} [v_1]_{\mathcal{B}} & [v_2]_{\mathcal{B}} & [v_3]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}$$

Suy ra

$$v_1 = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = (1, 7, 3), \quad v_3 = (0, 8, 3)$$

**4.74.**

a. Gọi  $\mathcal{S} = \{1, x, x^2\}$  là cơ sở chính tắc của  $P_2$ . Khử Gauss-Jordan ma trận

$$\begin{bmatrix} [\mathcal{C}]_{\mathcal{S}} & | & [\mathcal{B}]_{\mathcal{S}} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -3 & -3 & 1 & -6 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & -6 & -6 & -3 \\ -3 & -1 & -1 & 0 & 4 & 7 \end{array} \right]$$

$$\rightsquigarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{17}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{array} \right]$$

$$\text{Vậy } P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{17}{6} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

b. vectơ tọa độ của  $p$  trong cơ sở  $\mathcal{C}$  là  $(-1, 2, 1)$ .

c. vectơ tọa độ của  $p$  trong cơ sở  $\mathcal{B}$  là  $(-\frac{11}{2}, \frac{9}{2}, -3)$ .

**4.75.**

a. Khử Gauss ma trận  $A$ , ta thu được ma trận bậc thang

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -19 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

▷ Không gian hàng  $\text{Row}(A)$  là một không gian vectơ 2 chiều với một cơ sở là hệ vectơ  $(1, 3, 1), (0, -19, -5)$ .

- ▷ Không gian cột  $\text{Col}(A)$  là một không gian vectơ 2 chiều với một cơ sở là hệ vectơ  $(1, 5, 7)$ ,  $(3, -4, 2)$ .
- ▷ Hạt nhân  $\text{Nul}(A)$  là một không gian vectơ 1 chiều với một cơ sở là vectơ  $(-4, -5, 19)$ .

b. Khử Gauss ma trận  $B$ , ta thu được ma trận bậc thang

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ▷  $\dim \text{Row}(B) = 2$ , một cơ sở của  $\text{Row}(B)$  là hệ vectơ  $(1, 4, 5, 6, 9)$ ,  $(0, 1, 1, 1, 2)$ .
- ▷  $\dim \text{Col}(B) = 2$ , một cơ sở của  $\text{Col}(B)$  là hệ vectơ  $(1, 2, 1, 2)$ ,  $(4, 1, 0, 3)$ .
- ▷  $\dim \text{Nul}(B) = 3$ , một cơ sở của  $\text{Nul}(B)$  là hệ vectơ  $(-1, -1, 1, 0, 0)$ ,  $(-2, -1, 0, 1, 0)$ .

**4.7.** Khử Gauss ma trận  $C$ , ta thu được ma trận bậc thang

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ▷  $\dim \text{Row}(C) = 3$ , một cơ sở của  $\text{Row}(C)$  là hệ vectơ  $(1, -2, 5, 0)$ ,  $(0, -1, -3, 0)$ .
- ▷  $\dim \text{Col}(C) = 3$ , một cơ sở của  $\text{Col}(C)$  là hệ vectơ  $(1, 1, 1, -3)$ ,  $(-2, -2, -3, 8)$ .
- ▷  $\dim \text{Nul}(C) = 1$ , một cơ sở của  $\text{Nul}(C)$  là hệ vectơ  $(-11, -3, 1, 0)$ .

**4.77.** Thành lập ma trận nhận hệ vectơ đã cho là hệ vectơ cột rồi khử Gauss ma trận này, ta thu được ma trận bậc thang

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Một cơ sở cho  $\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)$  là hệ vectơ  $v_1, v_2$ . Biểu thị tuyến tính của các vectơ  $v_3, v_4$  qua cơ sở  $v_1, v_2$  là

$$\begin{aligned} v_3 &= 4v_1 - v_2 \\ v_4 &= -2v_1 + v_2 \end{aligned}$$

**4.78.** Thành lập ma trận nhận hệ vectơ đã cho là hệ vectơ cột rồi khử Gauss ma trận này, ta thu được ma trận bậc thang

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Một cơ sở của  $\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$  là hệ vectơ  $v_1, v_2, v_4$ . Biểu thị tuyến tính của các vectơ  $v_3, v_5$  qua cơ sở  $v_1, v_2, v_4$  là

$$\begin{aligned} v_3 &= -2v_1 - v_2 \\ v_5 &= v_1 + 3v_2 + v_4 \end{aligned}$$

**4.79.** Các đa thức đã cho đều thuộc  $P_3$ . Tọa độ hóa các đa thức đã cho trong cơ sở chính tắc  $\mathcal{S} = \{1, x, x^2, x^3\}$  của  $P_3$ , các vectơ tọa độ thu được lần lượt là

$$[p_1]_{\mathcal{S}} = (1, 4, 5, 2), [p_2]_{\mathcal{S}} = (2, 1, 3, 0), [p_3]_{\mathcal{S}} = (-1, 3, 2, 2).$$

Khử Gauss ma trận  $\begin{bmatrix} [p_1]_{\mathcal{S}} & [p_2]_{\mathcal{S}} & [p_3]_{\mathcal{S}} \end{bmatrix}$  ta thu được ma trận bậc thang

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Một cơ sở cho không gian  $\mathcal{L}(p_1, p_2, p_3)$  là hệ vectơ  $p_1, p_2$ . Biểu thị tuyến tính của  $p_3$  qua cơ sở  $p_1, p_2$  là

$$p_3 = p_1 - p_2.$$

**4.80.** Một cơ sở của  $\mathcal{L}(p_1, p_2, p_3, p_4)$  là hệ vectơ  $p_1, p_2, p_3$ . Biểu thị tuyến tính của  $p_4$  qua cơ sở  $p_1, p_2, p_3$  là

$$p_4 = -p_2 - p_3$$

**4.81.**

a. Dạng bậc thang của ma trận đã cho là

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận đã cho có hạng và số khuyết lần lượt là 2 và 3.

b. Dạng bậc thang của ma trận đã cho là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận đã cho có hạng và số khuyết lần lượt là 4 và 1.

#### 4.82. Khử Gauss ma trận đã cho

$$A = \begin{bmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{bmatrix} \xrightarrow{H_1 \leftrightarrow H_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[tH_1 - H_3 \rightarrow H_3]{H_2 - H_1 \rightarrow H_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t-1 & 1-t \\ 0 & t-1 & t^2-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_3 - H_2 \rightarrow H_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t-1 & 1-t \\ 0 & 0 & t^2+t-2 \end{bmatrix}$$

Ta thấy

$$t-1=0 \Leftrightarrow t=1 \text{ và } t^2+t-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$$

Ta có các trường hợp sau

| Điều kiện của $t$  | hạng của ma trận $A$ |
|--------------------|----------------------|
| $t = 1$            | 1                    |
| $t = -2$           | 2                    |
| $t = 1, t \neq -2$ | 3                    |

**4.83.** Khử Gauss ma trận đã cho

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -t \\ t & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[3H_1 - H_3 \rightarrow H_3]{tH_1 - H_2 \rightarrow H_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -t \\ 0 & 3t - 3 & -t^2 + 1 \\ 0 & 3 & -3t + 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_2 \leftrightarrow H_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -t \\ 0 & 3 & -3t + 2 \\ 0 & 3t - 3 & -t^2 + 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_3 - (t-1)H_2 \rightarrow H_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -t \\ 0 & 3 & -3t + 2 \\ 0 & 0 & 2t^2 - 5t + 3 \end{bmatrix}$$

Ta thấy

$$2t^2 - 5t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = \frac{3}{2}.$$

Có hai trường hợp xảy ra:

- ▷ Trường hợp 1:  $t = 1$  hoặc  $t = \frac{3}{2}$ . Hạng của ma trận đã cho là 2.
- ▷ Trường hợp 2:  $t \neq 1$  và  $t \neq \frac{3}{2}$ . Hạng của ma trận đã cho là 3.

## CHƯƠNG 5

### 5.1.

a. Ta có

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Do đó, ánh xạ  $T$  là biến đổi ma trận với ma trận chính tắc là  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ .

b. Ta có

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

### 5.2.

- a. Theo định nghĩa,  $T$  là một ánh xạ từ  $\mathbb{R}^2$  đến  $\mathbb{R}^2$ . Cho  $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  và  $k \in \mathbb{R}$ . Ta có

$$T(ku) = T\left(\begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (kx)^2 \\ ky \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^2 x^2 \\ ky \end{bmatrix},$$

và

$$kT(u) = k\begin{bmatrix} x^2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx^2 \\ ky \end{bmatrix}.$$

Do đó,  $T(ku) \neq kT(u)$  nếu  $k^2 x^2 \neq kx^2$ , chẳng hạn khi  $k = 2, x = 1$ . Vậy ánh xạ  $T$  không bảo toàn phép toán nhân số và véctơ. Theo định nghĩa,  $T$  không là một ánh xạ tuyến tính.

- b. c. được chứng minh tương tự như a.

**5.3.** Theo định nghĩa,  $T$  là một ánh xạ từ  $\mathbb{R}$  đến  $\mathbb{R}$ . Cho  $x, y \in \mathbb{R}$  và  $k \in \mathbb{R}$ . Ta có

$$\begin{aligned} T(x+y) &= m(x+y) + b = mx + my + b \\ T(x) + T(y) &= (mx + b) + (my + b) = mx + my + 2b \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} T(kx) &= m(kx) + b = kmx + b \\ kT(x) &= k(mx + b) = kmx + kb. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \text{Ánh xạ } T \text{ là tuyến tính} &\Leftrightarrow \begin{cases} T(x+y) = T(x) + T(y) \\ T(kx) = kT(x) \end{cases} \quad \text{với mọi } x, y \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2b \\ b = kb \end{cases} \quad \text{với mọi } k \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow b = 0. \end{aligned}$$

Vậy ánh xạ  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cho bởi  $T(x) = mx + b$  là một ánh xạ tuyến tính khi và chỉ khi  $b = 0$ .

**5.4.**

a. Ta có  $(2, 1, 3) = 2e_1 + e_2 + 3e_3$ . Vì  $T$  là ánh xạ tuyến tính nên

$$T(2, 1, 3) = 2T(e_1) + T(e_2) + 3T(e_3).$$

Sử dụng định nghĩa của  $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$ , ta được

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Vậy  $T(2, 1, 3) = (-2, 7)$ .

b. Ma trận chính tắc của  $T$  có hệ vectơ cột là các vectơ  $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$ . Ta có thể thấy điều này như sau. Với  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , ta có

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) &= x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + x_3T(e_3) \\ &= \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## 5.5.

a. Ta có

$$3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_1.$$

Vì  $T$  tuyến tính nên

$$\begin{aligned} T(e_1) &= 3T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) - T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) \\ &= 3\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -11 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- b. Vì ma trận chính tắc của ánh xạ tuyến tính  $T$  là  $\begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) \end{bmatrix}$  nên ta cần tính thêm  $T(e_2)$ . Làm tương tự như ý (a). Ta có

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e_2.$$

Vì  $T$  tuyến tính nên

$$\begin{aligned} T(e_2) &= T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) - 2T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vậy ma trận chính tắc của ánh xạ tuyến tính  $T$  là

$$\begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -11 & 9 \end{bmatrix}.$$

**5.6.** Ánh xạ trong các ý (b) là một ánh xạ tuyến tính. Các ánh xạ trong các ý (a) và (c) không là ánh xạ tuyến tính.

**5.7.** Các ánh xạ trong các ý (b) và (c) là các ánh xạ tuyến tính. Ánh xạ trong các ý (a) không là ánh xạ tuyến tính.

**5.8.** Các ánh xạ trong các ý (a) và (c) là các ánh xạ tuyến tính. Ánh xạ trong ý (b) không là ánh xạ tuyến tính.

**5.9.** Các ánh xạ trong các ý (a) và (c) là các ánh xạ tuyến tính. Ánh xạ trong ý (b) không là ánh xạ tuyến tính.

**5.10.** Ta có  $\ker(T) = \text{Nul}(A)$  và  $\text{Im}(T) = \text{Col}(A)$ . Để có thông tin về cả  $\text{Nul}(A)$  và  $\text{Col}(A)$ , ta khử Gauss ma trận  $A$  về dạng bậc thang. Từ đó, ta có các kết luận sau

- ▷ Số các khuyết của  $T$  là 1. Một cơ sở của hạt nhân  $\ker(T)$  là vectơ  $(2, 10, 0, 7)$ .
- ▷ Hạng của  $T$  là 3. Một cơ sở của ảnh của  $T$  là 3 vectơ cột đầu tiên của nó.

**5.11.** Theo định nghĩa

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \ker(T) &\iff T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 0 \\ &\iff 3a - 4b + c - d = 0 \\ &\iff d = 3a - 4b + c. \end{aligned}$$

Do đó, các phần tử của  $\ker(T)$  có dạng  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & 3a - 4b + c \end{bmatrix}$  với  $a, b, c \in \mathbb{R}$  xác định duy nhất. Ta có

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & 3a - 4b + c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Do đó  $\ker(T)$  là một không gian vectơ 3 chiều với một cơ sở là hệ ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ta có

$$\dim \operatorname{Im}(T) = \dim M_{2 \times 2} - \dim \ker(T) = 4 - 3 = 1.$$

Hơn nữa,  $\operatorname{Im}(T) \subset \mathbb{R}$ ,  $\dim \mathbb{R} = 1$  nên  $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{R}$ . Một cơ sở của  $\operatorname{Im}(T)$  là số thực 1.

**5.12.** Cho  $p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2$ . Theo định nghĩa

$$T(p(x)) = (a, a + b + c, 2a + b + c).$$

Do đó

$$p(x) \in \ker(T) \iff \begin{cases} a & = 0 \\ a + b + c & = 0 \\ 2a + b + c & = 0. \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính này là  $a = 0, b = -t, c = t$  với  $t \in \mathbb{R}$  tùy ý. Do đó, các đa thức  $p(x)$  thuộc  $\ker(T)$  là

$$-tx + tx^2 = t(-x + x^2).$$

Vậy  $\ker(T)$  là một không gian vectơ 1 chiều với một cơ sở là đa thức  $-x + x^2$ . Số chiều của  $\operatorname{Im}(T)$  là

$$\dim \operatorname{Im}(T) = \dim \mathcal{P}_2 - \dim \ker(T) = 3 - 1 = 2.$$

Vì  $\text{Im}(T)$  là một không gian véc tơ 2 chiều nên để có một cơ sở của  $\text{Im}(T)$ , ta tìm trong  $\text{Im}(T)$  một hệ hai véc tơ độc lập tuyến tính. Ta có

$$T(1) = (1, 1, 2), \quad T(x) = (0, 1, 1)$$

đều thuộc  $\text{Im}(T)$ . Hệ véc tơ  $(1, 1, 2)$  và  $(0, 1, 1)$  độc lập tuyến tính vì chúng không cùng phương với nhau.

Vậy hệ véc tơ  $(1, 1, 2), (0, 1, 1)$  là một cơ sở của  $\text{Im}(T)$ .

Cách khác. Ta có thể tìm số chiều và cơ sở cho  $\text{Im}(T)$  một cách trực tiếp, không sử dụng đến số chiều của  $\ker(T)$  như sau. Mọi véc tơ  $(x_1, x_2, x_3)$  thuộc  $\text{Im}(T)$  khi và chỉ khi hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} a &= x_1 \\ a + b + c &= x_2 \\ 2a + b + c &= x_3 \end{aligned}$$

có nghiệm  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Khử Gauss ma trận hệ số mở rộng của hệ này

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 1 & x_2 \\ 2 & 1 & 1 & x_3 \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 - 2x_1 \end{bmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 - x_2 + x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) \in \text{Im}(T) &\iff -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ &\iff x_1 = -t + s, x_2 = t, x_3 = s \\ &\iff (x_1, x_2, x_3) = t(-1, 1, 0) + s(1, 0, 1). \end{aligned}$$

Vậy  $\text{Im}(T)$  là một không gian véc tơ 2 chiều với một cơ sở là hệ véc tơ  $(-1, 1, 0), (1, 0, 1)$ .

### 5.13.

- a. Để chứng minh  $T$  tuyến tính, ta chỉ ra nó bảo toàn phép toán cộng véc tơ và phép nhân vô hướng với véc tơ:

$$T(p(x) + q(x)) = T(p(x)) + T(q(x)), \quad T(kp(x)) = kT(p(x)).$$

Hãy sử dụng định nghĩa để tính tường minh hai vế của mỗi đẳng thức.

b. Ta có

$$\begin{aligned}
 a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \ker(T) &\iff T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = 0 \\
 &\iff 3a_0 + a_1x + (a_0 + a_1)x^2 = 0 \\
 &\iff \begin{cases} 3a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0 \\ a_0 + a_1 &= 0 \end{cases} \\
 &\iff a_0 = a_1 = 0.
 \end{aligned}$$

Do đó  $\ker(T)$  gồm các đa thức  $a_2x^2 + a_3x^3$  với  $a_2, a_3 \in \mathbb{R}$  bất kì. Suy ra,  $\ker(T)$  là một không gian vectơ 2 chiều với một cơ sở là hệ đa thức  $x^2, x^3$ .

c. Ta có

$$\dim \operatorname{Im}(T) = \dim \mathcal{P}_3 - \dim \ker(T) = 4 - 2 = 2.$$

Do đó, để có một cơ sở của  $\operatorname{Im}(T)$ , ta cần trong  $\operatorname{Im}(T)$  một hệ hai đa thức độc lập tuyến tính. Ta có

$$T(1) = 3 + x^2, \quad T(x) = x + x^2$$

thuộc  $\operatorname{Im}(T)$ . Hệ đa thức  $3 + x^2, x + x^2$  độc lập tuyến tính. Do đó, hệ vectơ này chính là một cơ sở của  $\operatorname{Im}(T)$ .

#### 5.14.

a. Để tính  $T(x_1, x_2, x_3)$ , ta cần biểu thị  $(x_1, x_2, x_3)$  qua các vectơ  $v_1, v_2, v_3$ :

$$(x_1, x_2, x_3) = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3.$$

Phương trình vectơ này tương đương với hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned}
 k_1 &= x_1 \\
 k_1 + k_2 &= x_2 \\
 k_1 + k_2 + k_3 &= x_3.
 \end{aligned}$$

Hệ này có nghiệm duy nhất  $k_1 = x_1, k_2 = x_2 - x_1, k_3 = x_3 - x_2$ . Do đó

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1v_1 + (x_2 - x_1)v_2 + (x_3 - x_2)v_3.$$

Tác động  $T$  vào 2 vế, sử dụng tính tuyến tính của  $T$ , ta được

$$\begin{aligned}
 T(x_1, x_2, x_3) &= x_1T(v_1) + (x_2 - x_1)T(v_2) + (x_3 - x_2)T(v_3) \\
 &= x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (x_2 - x_1) \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + (x_3 - x_2) \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ -5x_1 + 5x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

b. Ma trận chính tắc của  $T$  là

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

c.  $\ker(T) = \text{Nul}(A)$ ,  $\text{Im}(T) = \text{Col}(A)$ . Khử Gauss ma trận  $A$  về dạng bậc thang ta sẽ có được các kết quả mong muốn.

### 5.15.

a. Kí hiệu đạo hàm của một hàm  $f(x)$  là  $f'(x)$ . Ta sẽ chứng minh ánh xạ đạo hàm  $D$  là tuyến tính, sử dụng các tính chất quen thuộc của đạo hàm. Cho  $p(x), q(x) \in \mathcal{P}_3, k \in \mathbb{R}$ . Ta có

$$\begin{aligned} D(p(x) + q(x)) &= (p(x) + q(x))' \\ &= p'(x) + q'(x) \\ &= D(p(x)) + D(q(x)), \end{aligned}$$

và

$$D(kp(x)) = (kp(x))' = kp'(x) = kD(p(x)).$$

Do đó, ánh xạ  $D$  là ánh xạ tuyến tính.

b. Để xác định  $\ker(D)$  và  $\text{Im}(D)$ , ta sử dụng công thức quen thuộc sau

$$D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 &\iff a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 = 0 \\ &\iff a_1 = a_2 = a_3 = 0. \end{aligned}$$

Suy ra  $\ker(D)$  là tập con của  $\mathcal{P}_3$  gồm các đa thức  $a_0$  với  $a_0 \in \mathbb{R}$  tùy ý. Vậy  $\ker(D)$  là một không gian véc tơ 1 chiều với một cơ sở là đa thức 1. Đối với  $\text{Im}(D)$ , từ công thức cụ thể của ánh xạ  $D$  bên trên, ta thấy rằng  $\text{Im}(D)$  là tập con của  $\mathcal{P}_3$  gồm các đa thức  $b_0 + b_1x + b_2x^2$  với  $b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$  bất kì. Vậy  $\text{Im}(D)$  là một không gian véc tơ 3 chiều với cơ sở là hệ đa thức  $1, x, x^2$ .

### 5.16.

a. Chứng minh giống hệt bài tập trên.

b. Làm giống như bài trên. Chú ý

$$D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}.$$

Hạt nhân  $\ker(D)$  chính là  $\mathcal{P}_0$ ,  $\dim \ker(D) = 1$ , một cơ sở của  $\ker(D)$  là đa thức 1. Ảnh  $\text{Im}(D)$  chính là  $\mathcal{P}_{n-1}$ ,  $\dim \text{Im}(D) = n$ , một cơ sở của  $\text{Im}(D)$  là hệ đa thức  $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ .

### 5.17.

a. Để chứng minh ánh xạ  $J$  là tuyến tính, ta sử dụng các tính chất cơ bản của tích phân xác định. Cho  $p(x), q(x) \in \mathcal{P}_2$  và  $k \in \mathbb{R}$ . Ta có

$$\begin{aligned} J(p(x) + q(x)) &= \int_{-1}^1 (p(x) + q(x))dx \\ &= \int_{-1}^1 p(x)dx + \int_{-1}^1 q(x)dx \\ &= J(p(x)) + J(q(x)) \end{aligned}$$

và

$$J(kp(x)) = \int_{-1}^1 kp(x)dx = k \int_{-1}^1 p(x)dx = kJ(x).$$

Do đó,  $J$  là một ánh xạ tuyến tính.

b. Ta xác định công thức tường minh của ánh xạ  $J$ .

$$\begin{aligned} J(a_0 + a_1x + a_2x^2) &= \int_{-1}^1 (a_0 + a_1x + a_2x^2)dx \\ &= \left[ a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3} \right]_{-1}^1 \\ &= 2a_0 + \frac{2}{3}a_2. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \ker(D) &\iff 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 = 0 \\ &\iff a_0 = -t, a_1 = s, a_2 = 3t. \end{aligned}$$

Vậy  $\ker(T)$  là tập con của  $\mathcal{P}_3$  gồm các đa thức

$$-t + sx + 3tx^2 = t(-1 + 3x^2) + sx$$

với  $t, s \in \mathbb{R}$  bất kì. Hạt nhân  $\ker(J)$  là một không gian vectơ 2 chiều với một cơ sở là hệ hai đa thức  $-1 + 3x^2, x$ .

Đối với  $\text{Im}(J)$ , từ công thức cụ thể trên của  $J$ , ta thấy  $\text{Im}(J)$  gồm các đa thức  $b_0$ , với  $b_0 \in \mathbb{R}$  bất kì. Vậy  $\text{Im}(J)$  là một không gian vectơ 1 chiều với một cơ sở là đa thức 1.

**5.18.**

- a. Làm tương tự như bài trên.  
b. Ta có

$$J(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = 2a_0 + 2a_1 + \frac{8}{3}a_2 + 4a_3.$$

Số chiều của  $\ker(J)$  là 3. Một cơ sở của  $\ker(J)$  là hệ 3 đa thức

$$-1 + x, -4 + 3x^2, -2 + x^3.$$

Số chiều của  $\text{Im}(J)$  là 1. Một cơ sở của  $\text{Im}(J)$  là đa thức 1.

**5.19.**

- a. Ma trận chính tắc của  $T$  là  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .  
b.  $\dim \ker(T) = 0, \dim \text{Im}(T) = 2$ .

**5.20.**

- a. Ma trận chính tắc của  $T$  là  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .  
b.  $\dim \ker(T) = 1, \dim \text{Im}(T) = 1$ .

**5.21.**

- a. Ma trận chính tắc của  $T$  là  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .  
b.  $\dim \ker(T) = 0, \dim \text{Im}(T) = 3$ .

**5.22.**

- a. Ma trận chính tắc của  $T$  là  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

b.  $\dim \ker(T) = 0, \dim \operatorname{Im}(T) = 3.$

**5.23.**

a. Ma trận chính tắc của  $T$  là  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

b.  $\dim \ker(T) = 1, \dim \operatorname{Im}(T) = 2.$

**5.24.**

a. Ma trận chính tắc của  $T$  là  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

b.  $\dim \ker(T) = 2, \dim \operatorname{Im}(T) = 1.$

**5.25.** .

**5.26.** .

**5.27.** .

**5.28.** .

**5.29.** Cơ sở chính tắc của  $\mathcal{P}_3$  là  $\{1, x, x^2, x^3\}$ . Ta cần xác định ảnh của các vectơ trong cơ sở này dưới tác động của ánh xạ tuyến tính  $T$  rồi biểu thị các vectơ ảnh thu được qua cơ sở chính tắc. Ví dụ

$$\begin{aligned} T(x^2) &= (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \\ &= 4 \cdot 1 - 4 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3. \end{aligned}$$

Ma trận cần tìm là

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**5.30.** Ánh xạ đạo hàm  $D : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$  cho bởi

$$D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2.$$

a. Ma trận của  $D$  trong cơ sở chính tắc của  $\mathcal{P}_3$  là

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b. Ma trận của  $D$  trong cơ sở đã cho là

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**5.31.** Ánh xạ đạo hàm

$$D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}.$$

Ma trận của  $D$  trong cơ sở chính tắc là

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}.$$

**5.32.** Ta cần tác động lên các vectơ trong cơ sở đã cho của  $M_{3 \times 2}$  rồi biểu thị tuyến tính véc tơ ảnh qua cơ sở đã cho của  $M_{2 \times 2}$ . Ví dụ

$$\begin{aligned} T(E_{21}) = AE_{21} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} & 0 \end{bmatrix} \\ &= a_{12}E_{11} + 0E_{12} + a_{22}E_{21} + 0E_{22}. \end{aligned}$$

Do đó, vectơ cột thứ 3 của ma trận cần tìm là  $(a_{12}, 0, a_{22}, 0)$ . Ma trận cần tìm là

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & a_{23} \end{bmatrix}.$$

**5.33.** .

## CHƯƠNG 6

**6.1.** Với mỗi  $i = 1, 2, 3$ , ta cần tính  $Av_i$  và so sánh nó với vectơ  $v_i$ . Ta có

$$Av_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 5v_1.$$

Suy ra  $v_1$  là một vectơ riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda = 5$ . Tính toán tương tự, ta có

$$Av_2 = v_2, \quad Av_3 = -2v_3.$$

Do đó,  $v_2$  và  $v_3$  cũng là các vectơ riêng của  $A$  với các giá trị riêng tương ứng lần lượt là 1 và  $-2$ .

**6.2.** Có hai khả năng của  $a$ , đó là 1 và  $-1$ . Khi  $a = 1$ , giá trị riêng tương ứng là 5, còn khi  $a = -1$ , giá trị riêng tương ứng là 1. Hai số thực  $b$  và  $c$  có giá trị lần lượt là  $-1$  và 2. Hai vectơ riêng đối với hai giá trị này của  $b$  và  $c$  đều ứng với giá trị riêng là 1.

**6.3.** Với mỗi vô hướng  $\lambda = -1$  và  $\lambda = 1$ , ta cần khử Gauss ma trận  $A - \lambda I$  để xác định xem hạt nhân  $\text{Nul}(A - \lambda I)$  có khác  $\{0\}$  hay không. Khử Gauss ma trận  $A - (-1)I$  ta được

$$A - (-1)I = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

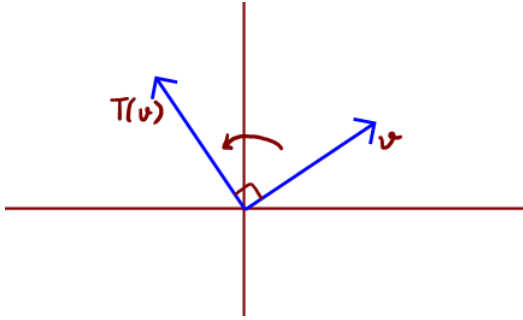
Suy ra  $\text{Nul}(A - (-1)I) = \{0\}$ , tức là  $\lambda_1 = -1$  không là một giá trị riêng của  $A$ .

Tiếp theo, khử Gauss ma trận  $A - I$ , ta được

$$A - I = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Suy ra  $\text{Nul}(A - I) \neq \{0\}$ , tức là  $\lambda_2 = 1$  là một giá trị riêng của  $A$ .

**6.4.** Vì  $T$  là phép quay góc  $90^\circ$  nên không tồn tại vectơ  $v \neq 0$  sao cho  $T(v)$  cùng phương với  $v$ .



Do đó, biến đổi tuyến tính  $T$  này không có giá trị riêng, không có vectơ riêng.

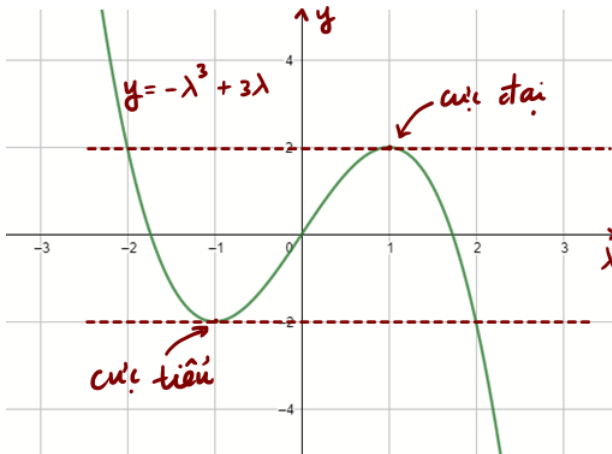
**6.5.** (a) Đa thức đặc trưng của ma trận  $A$  là

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + a.$$

(b) và (c). Số giá trị riêng thực phân biệt của  $A$  là số nghiệm của phương trình đặc trưng  $P_A(\lambda) = 0$ . Phương trình này tương đương với

$$-\lambda^3 + 3\lambda = -a.$$

Số nghiệm của phương trình này là số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = -\lambda^3 + 3\lambda$  với đường thẳng  $y = -a$ . Khảo sát hàm số  $y = -\lambda^3 + 3\lambda$  để phác thảo đồ thị của nó.



Từ đồ thị này, ta có kết luận sau.

- ▷ Ma trận  $A$  có 3 giá trị riêng phân biệt khi và chỉ khi  $-2 < a < 2$ .
- ▷ Ma trận  $A$  có 2 giá trị riêng phân biệt khi và chỉ khi  $a = 2$  hoặc  $a = -2$ .

**6.8.** Bảng các giá trị riêng và bội đại số của ma trận  $A$  là

|               |   |   |   |
|---------------|---|---|---|
| Giá trị riêng | 1 | 2 | 3 |
| Bội đại số    | 1 | 1 | 1 |

**6.9.** (a) Bảng giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận là

|                                   |                                        |                                         |
|-----------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------------|
| Giá trị riêng                     | 5                                      | -1                                      |
| Bội đại số                        | 1                                      | 1                                       |
| Bội hình học                      | 1                                      | 1                                       |
| Cơ sở của<br>không gian con riêng | $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ |

(b) Bảng giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận là

|                                   |                                        |
|-----------------------------------|----------------------------------------|
| Giá trị riêng                     | 2                                      |
| Bội đại số                        | 2                                      |
| Bội hình học                      | 1                                      |
| Cơ sở của<br>không gian con riêng | $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ |

**6.10.** (a) Bảng các giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận là

|               |   |   |   |
|---------------|---|---|---|
| Giá trị riêng | 1 | 2 | 3 |
| Bội đại số    | 1 | 1 | 1 |
| Bội hình học  | 1 | 1 | 1 |

|                                   |                                             |                                              |                                              |
|-----------------------------------|---------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|
| Cơ sở của<br>không gian con riêng | $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ |
|-----------------------------------|---------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|

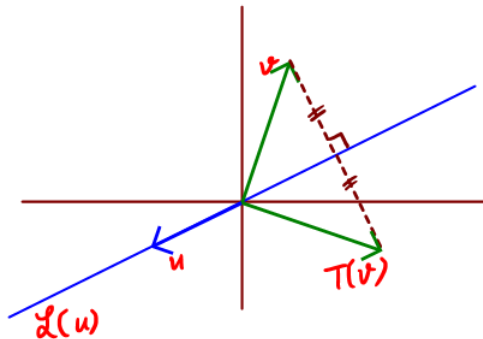
(b) Bảng các giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận là

|                                   |                                               |                                                                                          |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| Giá trị riêng                     | 1                                             | 2                                                                                        |
| Bội đại số                        | 1                                             | 2                                                                                        |
| Bội hình học                      | 1                                             | 2                                                                                        |
| Cơ sở của<br>không gian con riêng | $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ |

**6.11.** Giải phương trình  $Av = \lambda v$  với hai ẩn là  $a$  và  $\lambda$ . Đáp số:  $a = 16$  và  $\lambda = -3$ .

**6.1.**  $a = 5$  và  $b = 3$ . Các giá trị riêng tương ứng với các vectơ riêng  $v_1, v_2$  và  $v_3$  lần lượt là 2, 5 và 4.

**6.13.** Gọi  $T$  là phép đối xứng qua đường thẳng  $\mathcal{L}(u)$ .

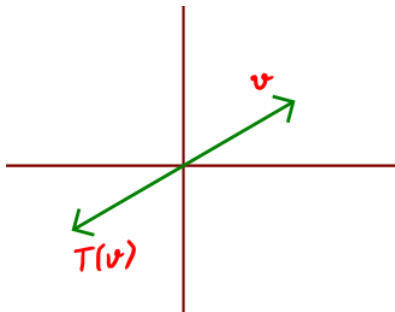


Một vectơ  $v$  là một vectơ riêng của  $T$  nếu và chỉ nếu  $T(v)$  cùng phương với  $v$ . Điều này xảy ra khi và chỉ khi  $v \parallel u$  hoặc  $v \perp u$ .

▷ Nếu  $v \parallel u$  thì  $T(v) = v$ , do đó,  $v$  là một vectơ riêng của  $T$  ứng với giá trị riêng  $\lambda = 1$ .

▷ Nếu  $v \perp u$  thì  $T(v) = -v$ , do đó,  $v$  là một véc tơ riêng của  $T$  ứng với giá trị riêng  $\lambda = -1$ .

**6.14.** Gọi  $T$  là phép quay góc  $180^\circ$ .



Với mọi véc tơ  $v$ , ta luôn có  $T(v) = -v$ . Do đó, giá trị riêng duy nhất của  $T$  là  $-1$  và tất cả các véc tơ  $v \neq 0$  đều là véc tơ riêng của  $T$  ứng với giá trị riêng  $-1$ .

**6.15.** (a) Ta có  $\det(A) = P_A(0) = -5$ . Vì  $\det(A) \neq 0$  nên  $A$  khả nghịch.

(b) Ta có  $\det(A) = P_A(0) = 0$ . Vì  $\det(A) = 0$  nên  $A$  không khả nghịch.

**6.1.** Gọi ma trận cần tìm là  $A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ . Theo giả thiết

$$A \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Từ hai phương trình ma trận này, bằng cách so sánh các phần tử tương ứng, ta nhận được 4 phương trình tuyến tính của các ẩn  $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ . Giải hệ phương trình này, ta tìm được ma trận  $A$ .

Một cách làm khác là ghép lại hai phương trình ma trận trên để được phương trình

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 7 \\ 5 & 14 \end{bmatrix}.$$

Phương trình này tương đương với

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 7 \\ 5 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}.$$

$$\text{Do đó } A = \begin{bmatrix} 6 & -\frac{7}{5} \\ -1 & \frac{42}{5} \end{bmatrix}.$$

**6.17.** Nhắc lại rằng nếu  $v$  là một vectơ riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda$  thì  $Av = \lambda v$ . Từ giả thiết, ta có

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

và

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Do đó,

$$A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ma trận  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  khả nghịch với nghịch đảo là  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ . Vậy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**6.18.** Ta có

$$A \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Do đó

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

### 6.19.

a. Giả sử  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . Đa thức đặc trưng của  $A$  là

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (a - \lambda)(d - \lambda) - cd \\ &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc. \end{aligned}$$

Mặt khác,  $\text{tr}(A) = a + d$  và  $\det(A) = ad - bc$ . Do đó,

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

b. Ta có

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} \\ \text{tr}(A)A &= (a + d) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{bmatrix} \\ \det(A)I &= (ad - bc) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Do đó,

$$A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I = 0.$$

### 6.20.

1. Vì  $\text{tr}(A) = 8$ ,  $\det(A) = 15$  và  $A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I = 0$  nên

$$A^2 - 8A + 15I = 10I.$$

- 2.** Gọi thương và phần dư khi chia  $\lambda^{100}$  cho  $\lambda^2 - 8\lambda + 15$  là các đa thức  $Q(\lambda)$  và  $R(\lambda)$ . Vì bậc của đa thức chia  $\lambda^2 - 8\lambda + 15$  là 2 nên  $\deg R(\lambda) < 2$ , tức là  $R(\lambda) = a\lambda + b$ , với  $a, b \in \mathbb{R}$  nào đó. Ta có

$$\lambda^{100} = (\lambda^2 - 8\lambda + 15) Q(\lambda) + a\lambda + b.$$

Để tìm  $a$  và  $b$ , ta sẽ tính giá trị hai vế của hệ thức trên tại các nghiệm của đa thức  $\lambda^2 - 8\lambda + 15$ . Ta thấy

$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3, \lambda = 5.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} 3^{100} &= 3a + b \\ 5^{100} &= 5a + b \end{aligned}$$

Giải hệ phương trình tuyến tính này ta được

$$a = \frac{1}{2} (5^{100}) - \frac{1}{2} (3^{100}), b = \frac{5}{2} (3^{100}) - \frac{3}{2} (5^{100}).$$

Vậy phần dư khi chia  $\lambda^{100}$  cho  $\lambda^2 - 8\lambda + 15$  là  $a\lambda + b$  với  $a, b$  như trên.

- 3.** Vì  $\lambda^{100} = (\lambda^2 - 8\lambda + 15) Q(\lambda) + a\lambda + b$  và  $A^2 - 8A + 15I = 0$  nên

$$\begin{aligned} A^{100} &= (A^2 - 8A + 15I) Q(A) + aA + bI \\ &= aA + bI \end{aligned}$$

Thay thế các giá trị cụ thể của  $a, b, A, I$  vào biểu thức  $aA + bI$  ta được

$$\begin{aligned} A^{100} &= \left( \frac{1}{2} (5^{100}) - \frac{1}{2} (3^{100}) \right) \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \left( \frac{5}{2} (3^{100}) - \frac{3}{2} (5^{100}) \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(3^{100}) - 5^{100} & 3^{100} - 5^{100} \\ 2(5^{100}) - 2(3^{100}) & 2(5^{100}) - 3^{100} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**6.21.** Ta có

$$A^2 - 4A - 21I = 0.$$

Phần dư khi chia  $\lambda^{100}$  cho  $\lambda^2 - 4\lambda - 21$  là  $a\lambda + b$  với

$$a = \frac{1}{10} (7^{100}) - \frac{1}{10} (3^{100}), b = \frac{3}{10} (7^{100}) + \frac{7}{10} (3^{100}).$$

Khi đó,

$$A^{100} = aA + bI.$$

Thay các giá trị cụ thể của  $a, b, A, I$ , ta tìm được  $A^{100}$ .

**6.22.** Gọi  $x$  là một vectơ riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda$ . Theo định nghĩa  $Ax = \lambda x$ .

(a) Ta có

$$A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda(\lambda x) = \lambda^2x.$$

Do đó,  $\lambda^2$  là một giá trị riêng của  $A^2$ , với một vectơ riêng tương ứng chính là vectơ  $x$ .

(b) Ta có

$$A^3x = A(A^2x) = A(\lambda^2x) = \lambda^2(Ax) = \lambda^2(\lambda x) = \lambda^3x.$$

Do đó,  $\lambda^3$  là một giá trị riêng của  $A^3$ , với một vectơ riêng tương ứng chính là vectơ  $x$ .

**6.23.** Gọi  $x$  là một vectơ riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda$ , tức là  $Ax = \lambda x$ . Từ các công thức  $Ax = \lambda x, A^2x = \lambda^2x$  và  $A^3x = \lambda^3x$ , ta đi đến dự đoán

$$A^n x = \lambda^n x$$

với mọi số nguyên dương  $n$ . Ta sẽ chứng minh đẳng thức này bằng phương pháp quy nạp theo số nguyên dương  $n$ . Khi  $n = 1$ ,  $Ax = \lambda x$  theo định nghĩa của  $x$ . Giả sử đẳng thức đúng với  $n = k \geq 1$  tức là  $A^k x = \lambda^k x$ . Ta có

$$A^{k+1}x = A(A^k x) = A(\lambda^k x) = \lambda^k(Ax) = \lambda^k(\lambda x) = \lambda^{k+1}x.$$

Suy ra đẳng thức cần chứng minh đúng với  $n = k + 1$ . Theo nguyên lý quy nạp,  $A^n x = \lambda^n x$  với mọi  $n$  nguyên dương.

Vì  $A^n x = \lambda^n x$  nên  $\lambda^n$  là một giá trị riêng của  $A^n$ , với một giá trị riêng tương ứng chính là vectơ  $x$ .

**6.24.** Gọi  $x$  là một vectơ riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda$ , tức là  $Ax = \lambda x$ . Giả sử  $f(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$ . Khi đó

$$f(A) = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1} A + a_n I.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f(A)x &= a_0 A^n x + a_1 A^{n-1} x + \cdots + a_{n-1} A x + a_n I x \\ &= a_0 \lambda^n x + a_1 \lambda^{n-1} x + \cdots + a_{n-1} \lambda x + a_n x \\ &= f(\lambda)x. \end{aligned}$$

Đẳng thức thứ hai có được vì ta có  $A^n x = \lambda^n x$  với mọi số nguyên dương  $n$  như đã chứng minh trong bài tập trên. Vậy,  $f(\lambda)$  là một giá trị riêng của  $f(A)$ , với một vectơ riêng tương ứng chính là vectơ  $x$ .

**6.25.** Để nhận được các giá trị riêng của các ma trận  $B, C$  và  $D$  từ các giá trị riêng của  $A$ , ta cần biểu thị mỗi ma trận  $B, C$  và  $D$  này qua ma trận  $A$ .

- (a) Ta có  $B = A + 2I$ . Do đó, mỗi giá trị riêng  $\lambda$  của  $A$  sinh ra một giá trị riêng  $\lambda + 2$  của  $B$ . Do đó, các giá trị riêng của  $B$  là  $-1, -2, 7$ .
- (b) Ta có  $C = A - 3I$ . Do đó, mỗi giá trị riêng  $\lambda$  của  $A$  sinh ra một giá trị riêng  $\lambda - 3$  của  $C$ . Do đó, các giá trị riêng của  $C$  là  $-6, -7, 2$ .
- (c) Ta có  $D = 2A + I$ . Do đó, mỗi giá trị riêng  $\lambda$  của  $A$  sinh ra một giá trị riêng  $2\lambda + 1$  của  $D$ . Do đó, các giá trị riêng của  $D$  là  $-5, -7, 11$ .

**6.26.** (a) Giải các phương trình

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, \quad Av_2 = \lambda_2 v_2$$

với các ẩn là  $a, b, c, \lambda_1, \lambda_2$  ta nhận được

$$a = -4, \quad b = -1, \quad c = 2, \quad \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -1.$$

(b) Từ ý (a) ta thấy rằng ma trận  $A$  có hai giá trị riêng là  $\lambda_1 = -1$  và  $\lambda_2 = -2$ . Vì  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $3 \times 3$  nên  $A$  còn một giá trị riêng  $\lambda_3$ . Ta có thể tìm  $\lambda_3$  bằng cách giải phương trình đặc trưng. Một cách làm khác là dựa vào đẳng thức

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{tr}(A).$$

Khi đó  $\lambda_3 = 1$ . Vậy các giá trị riêng của ma trận  $A$  là  $-2, -1, 1$ .

Một cơ sở cho không gian con riêng  $E_1 = \text{Nul}(A - I)$  là  $v_3 = (-1, 0, 1)$ .  
Bảng các giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận  $A$  là

|                                   |                                              |                                              |                                              |
|-----------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|
| Giá trị riêng                     | -2                                           | -1                                           | 1                                            |
| Bội đại số                        | 1                                            | 1                                            | 1                                            |
| Bội hình học                      | 1                                            | 1                                            | 1                                            |
| Cơ sở của<br>không gian con riêng | $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ |

(c) Vì  $B = A - 2A^3$  nên mỗi vectơ riêng  $\lambda$  của  $A$  sinh ra một vectơ riêng  $\lambda - 2\lambda^3$  của  $B$ . Hơn nữa, nếu  $v$  là một vectơ riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda$  vì  $v$  cũng là một vectơ riêng của  $B$  ứng với giá trị riêng  $\lambda - 2\lambda^3$ . Do đó, từ bảng các giá trị riêng và vectơ riêng của  $A$ , ta nhận được bảng các giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận  $B$  là

|                                   |                                              |                                              |                                              |
|-----------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|
| Giá trị riêng                     | 14                                           | 1                                            | -1                                           |
| Bội đại số                        | 1                                            | 1                                            | 1                                            |
| Bội hình học                      | 1                                            | 1                                            | 1                                            |
| Cơ sở của<br>không gian con riêng | $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ |

6.27. Giải các phương trình

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, \quad Av_2 = \lambda_2 v_2, \quad Av_3 = \lambda_3 v_3$$

ta nhận được các giá trị riêng

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 2$$

của ma trận  $A$ . Bảng các giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận  $A$  là

|               |   |   |   |
|---------------|---|---|---|
| Giá trị riêng | 4 | 3 | 2 |
| Bội đại số    | 1 | 1 | 1 |
| Bội hình học  | 1 | 1 | 1 |

|                                   |                                               |                                              |                                              |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|
| Cơ sở của<br>không gian con riêng | $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|

(a) Bảng các giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận  $A^3$  là

|                                   |                                               |                                              |                                              |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|
| Giá trị riêng                     | 64                                            | 27                                           | 8                                            |
| Bội đại số                        | 1                                             | 1                                            | 1                                            |
| Bội hình học                      | 1                                             | 1                                            | 1                                            |
| Cơ sở của<br>không gian con riêng | $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ |

(b) Bảng các giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận  $2A - A^2$  là

|                                   |                                               |                                                                                          |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| Giá trị riêng                     | -4                                            | -6                                                                                       |
| Bội đại số                        | 1                                             | 2                                                                                        |
| Bội hình học                      | 1                                             | 2                                                                                        |
| Cơ sở của<br>không gian con riêng | $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ |

### 6.28.

- (a) Vì  $A$  khả nghịch nên phương trình  $Ax = 0$  chỉ có nghiệm tầm thường. Do đó, không tồn tại vectơ khác không  $x \in \mathbb{R}^n$  sao cho

$$Ax = 0x.$$

Theo định nghĩa, vô hướng 0 không là một giá trị riêng của  $A$ . Do đó,  $\lambda \neq 0$ .

- (b) Gọi  $x$  là một vectơ riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda$ , tức là

$$Ax = \lambda x.$$

Nhân hai vế với  $A^{-1}$ , ta được

$$x = A^{-1}Ax = A^{-1}(\lambda x) = \lambda(A^{-1}x).$$

Vì  $\lambda \neq 0$  nên đẳng thức trên kéo theo

$$A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x.$$

Do đó  $\frac{1}{\lambda}$  là một giá trị riêng của  $A$ , với một vectơ riêng ứng ứng chính là vectơ  $x$ .

**6.29.** Giả sử  $v$  là vectơ riêng của  $A$  và  $B$  ứng với giá trị riêng là  $\lambda$  và  $\mu$ . Theo định nghĩa

$$Av = \lambda v, \quad Bv = \mu v.$$

Suy ra

$$(A + B)v = Av + Bv = \lambda v + \mu v = (\lambda + \mu)v.$$

Do đó,  $v$  là một vectơ riêng của tổng  $A + B$  ứng với giá trị riêng  $\lambda + \mu$ .

**6.30.** Giả sử  $v$  là vectơ riêng của  $A$  và  $B$  ứng với giá trị riêng là  $\lambda$  và  $\mu$ . Theo định nghĩa

$$Av = \lambda v, \quad Bv = \mu v.$$

Suy ra

$$(AB)v = A(Bv) = A(\mu v) = \mu(Av) = \mu\lambda v$$

Do đó,  $v$  là một vectơ riêng của tích  $AB$  ứng với giá trị riêng  $\lambda\mu$ .

**6.31.** Gọi ma trận cần tìm là  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . Ta có

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = -7 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2a + 3b \\ 2c + 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ -21 \end{bmatrix}.$$

So sánh các thành phần của các vectơ, ta nhận được hệ phương trình tuyến tính đối với các ẩn  $a, b, c, d$

$$\begin{array}{rcl} 2a & + & 3b & = & -14 \\ 2c & + & 3d & = & -21 \end{array}$$

Cho các ẩn tự do  $b, d$  các tham số  $2t$  và  $2s$ , và tính các ẩn còn lại qua  $t$  và  $s$  ta được

$$a = -7 - 3t, \quad b = 2t, \quad c = -\frac{21}{2} - 3s, \quad d = 2s.$$

Vậy các ma trận cần tìm là

$$\begin{bmatrix} -7 - 3t & 2t \\ -\frac{21}{2} - 3s & 2s \end{bmatrix}.$$

**6.32.** Các ma trận cần tìm là

$$\begin{bmatrix} 5 + 2t & t \\ -10 + 2s & s \end{bmatrix}.$$

**6.36.** Vì  $v$  là một vectơ riêng của ma trận vuông  $A$  ứng với giá trị riêng là 5 nên

$$Av = 5v.$$

Nhân cả hai vế với  $\frac{1}{5}$  ta được

$$A\left(\frac{1}{5}v\right) = v.$$

Do đó,  $v \in \text{Col}(A)$ .

**6.37.** Giả sử  $v$  là một vectơ riêng của ma trận  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda$ . Theo định nghĩa

$$Av = \lambda v. \quad (10)$$

Xét hai trường hợp.

- ▷ Trường hợp  $\lambda = 0$ . Khi đó  $Av = 0$ . Suy ra  $v \in \text{Nul}(A)$ .
- ▷ Trường hợp  $\lambda \neq 0$ . Nhân cả hai vế của (10) với  $\frac{1}{\lambda}$  ta được

$$A\left(\frac{1}{\lambda}v\right) = v.$$

Suy ra  $v \in \text{Col}(A)$ .

Vậy  $v \in \text{Col}(A)$  hoặc  $v \in \text{Nul}(A)$ .

**6.38.** Cho  $v \in \text{Col}(A)$ ,  $v \neq 0$ . Vì  $\text{rank}(A) = 1$  nên  $\dim \text{Col}(A) = 1$ . Do đó, véc tơ  $v$  là một cơ sở của  $\text{Col}(A)$ .

Vì  $Av \in \text{Col}(A)$  nên tồn tại một vô hướng  $\lambda$  sao cho

$$Av = \lambda v.$$

Vậy  $v$  là một véc tơ riêng của  $A$ .

**6.40.** Cho  $A$  và  $B$  là hai ma trận đồng dạng. Theo định nghĩa, tồn tại một ma trận khả nghịch  $P$  sao cho

$$A = PBP^{-1}.$$

Ta cần chứng minh  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ . Vì  $\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)$  với  $M, N$  là hai ma trận vuông cùng cỡ nên

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(PBP^{-1}) = \text{tr}(P(BP^{-1})) = \text{tr}((BP^{-1})P) = \text{tr}(B).$$

**6.41.** (a) Ta có

$$\text{tr}(A) = 5, \text{tr}(B) = 13.$$

Vì  $\text{tr}(A) \neq \text{tr}(B)$  nên hai ma trận  $A$  và  $B$  không đồng dạng với nhau.

(b) Ta có

$$\det(A) = -2, \det(B) = 2.$$

Vì  $\det(A) \neq \det(B)$  nên hai ma trận  $A$  và  $B$  không đồng dạng với nhau.

**6.42.**  $\triangleright$  Đa thức đặc trưng của  $A$  là

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 & -1 \\ 1 & 3 - \lambda & -1 \\ -1 & -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda) \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= +(-1) \begin{vmatrix} 1 & 3-\lambda \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\
&= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 \\
&= -(\lambda - 5)(\lambda - 1)^2
\end{aligned}$$

Do đó, ma trận  $A$  có các giá trị riêng là 5 và 1 với bội đại số lần lượt là 1 và 2.

▷ Không gian con riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng 1 là hạt nhân  $\text{Nul}(A - I)$ . Khử Gauss ma trận  $A - I$  ta được,

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
x \in \text{Nul}(A - I) &\Leftrightarrow x_1 = -2s + t, x_2 = s, x_3 = t \\
&\Leftrightarrow x = s(-2, 1, 0) + t(1, 0, 1)
\end{aligned}$$

▷ Không gian con riêng  $\text{Nul}(A - I)$  là một không gian véc tơ 2 chiều với một cơ sở là hệ véc tơ  $(-2, 1, 0), (1, 0, 1)$ . Bội hình học của giá trị riêng 1 là 2. Không gian con riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng 5 là hạt nhân  $\text{Nul}(A - 5I)$ . Khử Gauss ma trận  $A - 5I$ :

$$A - 5I = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
x \in \text{Nul}(A - 5I) &\Leftrightarrow x_1 = -t, x_2 = -t, x_3 = t \\
&\Leftrightarrow x = t(-1, -1, 1)
\end{aligned}$$

Không gian con riêng  $\text{Nul}(A - 5I)$  là một không gian véc tơ 1 chiều với một cơ sở là véc tơ  $(-1, -1, 1)$ . Bội hình học của giá trị riêng 5 là 1.

Bảng các giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận đã cho là

|               |   |   |
|---------------|---|---|
| Giá trị riêng | 1 | 5 |
| Bội đại số    | 2 | 1 |
| Bội hình học  | 2 | 1 |

$$\begin{array}{c|c|c|c} \text{Cơ sở của} & \left[ \begin{array}{c} -2 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] & , & \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] & \left| \right| & \left[ \begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right] \\ \text{không gian con riêng} & & & & & \end{array}$$

▷ Vì ma trận  $A$  cỡ  $3 \times 3$  có đủ 3 giá trị riêng, tính cả bội đại số, và mỗi giá trị riêng có bội đại số bằng bội hình học nên  $A$  chéo hóa được. Từ tính toán trên, ta có

$$A = PDP^{-1}$$

trong đó

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

### 6.43.

a. Đa thức đặc trưng của  $A$  là

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} d - \lambda & 0 \\ a & d - \lambda \end{vmatrix} = (d - \lambda)^2.$$

Do đó,  $\lambda = d$  là giá trị riêng duy nhất của  $A$ . Bội đại số của giá trị riêng này là 2.

b. Không gian con riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda = d$  là  $\text{Nul}(A - \lambda I)$ . Ta có

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Trường hợp 1.  $a \neq 0$ . Khi đó  $\text{Nul}(A - \lambda I)$  là một không gian véc tơ 1 chiều. Suy ra bội hình học của giá trị riêng  $\lambda = d$  là 1. Vì giá trị riêng  $\lambda = d$  có bội hình học khác bội đại số nên  $A$  không chéo hóa được.

Trường hợp 2.  $a = 0$ . Khi đó  $A = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$  là một ma trận chéo nên tất nhiên  $A$  chéo hóa được.

Vậy ma trận  $A = \begin{bmatrix} d & 0 \\ a & d \end{bmatrix}$  chéo hóa được khi và chỉ khi  $a = 0$ .

**6.44.** (a) Ta có

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}.$$

(b) Ta có

$$A^n = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\ \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \left( \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Tính cụ thể ta được

$$A^n = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2(-3)^n + 3(2)^n & -3(-3)^n + 3(2)^n \\ -2(-3)^n + 2(2)^n & 3(-3)^n + 2(2)^n \end{bmatrix}.$$

**6.2.** Ta có

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}^{-1}$$

Suy ra

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tính cụ thể ta được

$$A^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & -5(-2)^n + 4(-1)^n + 1 & (-2)^n - (-1)^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 - 5(-2)^n & (-2)^n \end{bmatrix}.$$

**6.47.** Bảng các giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận đã cho là

|                                   |                                             |                                                                                         |
|-----------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| Giá trị riêng                     | 5                                           | 3                                                                                       |
| Bội đại số                        | 1                                           | 2                                                                                       |
| Bội hình học                      | 1                                           | 2                                                                                       |
| Cơ sở của<br>không gian con riêng | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ |

Vì ma trận vuông  $A$  cỡ  $3 \times 3$  có đầy đủ 3 giá trị riêng tính cả bội và mỗi giá trị riêng có bội hình học bằng bội đại số nên  $A$  chéo hóa được. Ta có phân tích  $A = PDP^{-1}$  trong đó

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

6.48.

a. Ma trận  $A$  chéo hóa được,  $A = PDP^{-1}$  trong đó

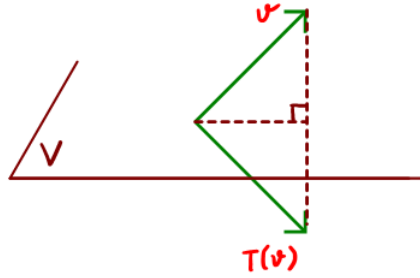
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

b. Ma trận  $B$  không chéo hóa được. Ma trận  $B$  có giá trị riêng duy nhất  $\lambda = 5$ , với bội đại số bằng 3 và bội hình học bằng 1, khác bội đại số.

c. Ma trận  $C$  chéo hóa được,  $C = PDP^{-1}$  trong đó

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

**6.49.** Gọi  $T$  là phép đối xứng qua một không gian con 2 chiều  $V$  trong không gian véc tơ Euclid  $\mathbb{R}^3$ .



Một véc tơ  $v$  là véc tơ riêng của  $T$  khi và chỉ khi  $T(v)$  cùng phương với  $v$ . Điều này xảy ra khi và chỉ khi  $v \in V$  hoặc  $v \perp V$ .

- ▷ Nếu  $v \in V$  thì  $T(v) = v$ , do đó,  $v$  là một véc tơ riêng của  $T$  ứng với giá trị riêng  $\lambda = 1$ .
- ▷ Nếu  $v \in V$  thì  $T(v) = -v$ , do đó,  $v$  là một véc tơ riêng của  $T$  ứng với giá trị riêng  $\lambda = -1$ .

Do đó, các giá trị riêng của  $T$  là 1 và  $-1$ . Các không gian con riêng tương ứng là  $E_1 = V$  và  $E_{-1} = V^\perp$ . Vì tổng các bội hình học của  $T$  là 3, bằng đúng số chiều của  $\mathbb{R}^3$  nên  $T$  chéo hóa được.

Hơn nữa, nếu  $u_1, u_2$  là một cơ sở của  $V$  và  $u_3$  là một cơ sở của  $V^\perp$  thì ma trận của  $T$  trong cơ sở  $u_1, u_2, u_3$  là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

**6.52.** Đa thức đặc trưng của  $A$  là

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} d - \lambda & 0 & 0 \\ a & d - \lambda & 0 \\ 0 & b & d - \lambda \end{vmatrix} = (d - \lambda)^3.$$

Do đó, ma trận  $A$  có giá trị riêng duy nhất là  $d$  với bội đại số bằng 3.

Không gian con riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $d$  là hạt nhân  $\text{Nul}(A - dI)$ . Khử Gauss ma trận  $A - dI$  ta được

$$A - 5I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Trường hợp 1.  $a \neq 0$  và  $b \neq 0$ . Không gian con riêng  $\text{Nul}(A - dI)$  là một không gian véc tơ 1 chiều. Bội hình học của giá trị riêng  $d$  bằng 1. Vì giá trị riêng  $d$  có bội hình học khác bội đại số nên  $A$  không chéo hóa được.

Trường hợp 2.  $a \neq 0$  và  $b = 0$  hoặc  $a = 0$  và  $b \neq 0$ . Không gian con riêng  $\text{Nul}(A - dI)$  là một không gian véc tơ 2 chiều. Bội hình học của giá trị riêng  $d$  bằng 2. Vì giá trị riêng  $d$  có bội hình học khác bội đại số nên  $A$  không chéo hóa được.

Trường hợp 3.  $a = b = 0$ . Khi đó  $A - dI = 0$ . Không gian con riêng  $\text{Nul}(A - dI)$  là một không gian véc tơ 3 chiều. Bội hình học của giá trị riêng  $d$  bằng 3. Vì giá trị riêng duy nhất  $d$  có bội đại số bằng bội hình học nên  $A$  chéo hóa được.

**6.53.** Một ví dụ về ma trận  $A$  là

$$\begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & -3 & & & & \\ & 1 & -3 & & & \\ & & & -3 & & \\ & & & & 5 & \\ & & & & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

trong đó các vị trí để trống của ma trận là các số 0.

**6.55.**

- a. Vì đa thức đặc trưng  $P_A(\lambda)$  là một đa thức bậc 3 nên  $A$  là một ma trận vuông cỡ  $3 \times 3$ . Phân tích đa thức  $P_A(\lambda)$  thành nhân tử, ta được

$$P_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 3)^2.$$

Do đó, ma trận  $A$  có các giá trị riêng là 1 và  $-3$  với bội đại số lần lượt là 1 và 2.

- b. Giá trị riêng 1 có bội đại số bằng 1 nên bội hình học của nó cũng bằng 1. Giá trị riêng  $-3$  có bội đại số bằng 2 nên bội hình học của nó bằng 1 hoặc 2.

Trường hợp 1. Bội hình học của giá trị riêng  $-3$  bằng 2. Khi đó, ma trận vuông  $A$  cỡ  $3 \times 3$  có đủ 3 giá trị riêng tính cả bội đại số và mỗi giá trị riêng có bội hình học bằng bội đại số. Do đó,  $A$  chéo hóa được. Ví dụ đơn giản nhất về ma trận kiểu này là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Trường hợp 2. Bội hình học của giá trị riêng  $-3$  bằng 1. Khi đó, giá trị riêng  $-3$  có bội hình học khác bội đại số. Do đó,  $A$  không chéo hóa được. Một ví dụ về ma trận kiểu này là

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -3 & \\ & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

**6.56.** Trong mỗi phần, ký hiệu đa thức đã cho là  $f(\lambda)$ . Theo giả thiết  $P_A(\lambda) = f(\lambda)$ . Do đó:

$A$  là một ma trận cỡ  $n \times n$  với  $n$  là bậc của đa thức  $f(\lambda)$ .

Các giá trị riêng của  $A$  là các nghiệm của thực của  $f(\lambda)$ . Bội đại số của mỗi giá trị riêng là bội đại số của số thực này xem như là một nghiệm của  $f(\lambda)$ .

Với mỗi giá trị riêng  $\lambda$ , nếu bội đại số là  $d$  thì bội hình học của nó, tức là số chiều của không gian con riêng tương ứng có thể là một giá trị bất kỳ trong tập hợp  $\{1, 2, \dots, d\}$ .

### 6.57.

- (a) Ta chứng minh  $A^n = PB^nP^{-1}$  với mọi số nguyên dương  $n$  bằng quy nạp theo  $n$ .

Khi  $n = 1$ ,  $A = PBP^{-1}$  theo giả thiết. Giả sử khẳng định đúng với số nguyên dương  $n = k$ , tức là  $A^k = PB^kP^{-1}$ . Ta có

$$A^{k+1} = A^k A = PB^kP^{-1}PBP^{-1} = PB^{k+1}P^{-1}.$$

Do đó, khẳng định đúng với  $n = k + 1$ . Theo nguyên lý quy nạp, ta có  $A^n = PB^nP^{-1}$  với mọi số nguyên dương  $n$ .

(b) Giả sử  $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_p\lambda^p$ . Khi đó,

$$f(A) = a_0I + a_1A + \cdots + a_pA^p, \quad f(B) = a_0I + a_1B + \cdots + a_pB^p.$$

Vì  $A^n = PB^nP^{-1}$  với mọi số nguyên dương  $n$  nên

$$\begin{aligned} f(A) &= a_0PIP^{-1} + a_1PBP^{-1} + \cdots + a_pPB^pP^{-1} \\ &= P(a_0I + a_1B + \cdots + a_pB^p)P^{-1} = Pf(B)P^{-1} \end{aligned}$$

(c)

(i) Vì  $A = PBP^{-1}$  nên  $B = P^{-1}AP$ . Theo giả thiết, các ma trận  $P$  và  $A$  khả nghịch. Do đó,  $B$  là tích của các ma trận khả nghịch. Suy ra  $B$  khả nghịch.

(ii) Nghịch đảo hai vế đẳng thức  $A = PBP^{-1}$  ta được

$$A^{-1} = (PBP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}B^{-1}P^{-1} = PB^{-1}P^{-1},$$

như mong muốn.

(iii) Khẳng định này là hệ quả của ii) và a). Thật vậy, vì  $n$  là nguyên âm nên  $-n$  là nguyên dương. Do đó,

$$A^n = (A^{-1})^{-n} = (PB^{-1}P^{-1})^{-n} = P(B^{-1})^{-n}P^{-1} = PB^nP^{-1}.$$

**6.58.** .

**6.59.** (a) Ta có

$$\begin{aligned} x \in \text{Nul}(A) &\Leftrightarrow Ax = 0 \\ &\Leftrightarrow PBP^{-1}x = 0 \\ &\Leftrightarrow BP^{-1}x = 0 \\ &\Leftrightarrow P^{-1}x \in \text{Nul}(B) \end{aligned}$$

**6.60.**

(a) Vì

$$\det(MN) = \det(M) \det(N) = \det(N) \det(M) = \det(NM)$$

với mọi cặp ma trận vuông cùng cỡ  $M$  và  $N$  nên

$$\det(A) = \det(PBP^{-1}) = \det(P(BP^{-1})) = \det((BP^{-1})P) = \det(B).$$

(b) Ta có

$$P(B - \lambda I)P^{-1} = PBP^{-1} - P(\lambda I)P^{-1} = A - \lambda PIP^{-1} = A - \lambda I.$$

(c) Từ ý b), hai ma trận  $A - \lambda I$  và  $B - \lambda I$  đồng dạng với nhau. Do đó

$$\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I).$$

Theo định nghĩa,  $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ , và  $P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I)$ .  
Vậy  $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$ .

(d) Vì giá trị riêng và bội đại số của nó chỉ phụ thuộc vào đa thức đặc trưng của ma trận nên hai đa thức đặc trưng của  $A$  và  $B$  bằng nhau kéo theo các giá trị riêng và bội đại số của nó là giống hệt nhau đối với hai ma trận  $A$  và  $B$ .

(e) Cho  $\lambda$  là một giá trị riêng chung của  $A$  và  $B$ . Theo định nghĩa, Bội hình học của  $\lambda$  như là một giá trị riêng của  $A$  là  $\dim \text{Nul}(A - \lambda I)$ . Bội hình học của  $\lambda$  như là một giá trị riêng của  $B$  là  $\dim \text{Nul}(B - \lambda I)$ . Theo ý b), hai ma trận  $A - \lambda I$  và  $B - \lambda I$  đồng dạng với nhau. Do đó hai không gian vectơ  $\text{Nul}(A - \lambda I)$  và  $\text{Nul}(B - \lambda I)$  có cùng số chiều.

### 6.61.

(a) Vì  $A$  chéo hóa được nên tồn tại phân tích

$$A = PDP^{-1}$$

trong đó  $P$  là một ma trận khả nghịch và  $D$  là một ma trận chéo. Lấy chuyển vị hai vế của đẳng thức trên và sử dụng công thức chuyển vị của tích và của nghịch đảo, ta được

$$A^T = (PDP^{-1})^T = (P^{-1})^T D^T P^T = (P^T)^{-1} D^T P^T.$$

Vì  $D$  là một ma trận chéo nên  $D^T = D$ . Đặt  $S = (P^T)^{-1}$ . Ma trận  $S$  khả nghịch với  $S^{-1} = ((P^T)^{-1})^{-1} = P^T$ . Suy ra

$$A^T = SDS^{-1}.$$

Do đó, theo định nghĩa, ma trận  $A^T$  chéo hóa được.

- (b) Từ chứng minh của ý a), ta thấy hai ma trận  $A$  và  $A^T$  cùng đồng dạng với một ma trận chéo  $D$ . Ta biết rằng quan hệ đồng dạng của các ma trận có tính chất bắc cầu. Do đó,  $A$  đồng dạng với  $B$ .

**6.63.** Vì  $D$  là một ma trận chéo nên ta có phân tích

$$A = PDP^{-1}$$

với  $P$  là một ma trận khả nghịch và  $D$  là một ma trận chéo. Vì  $A$  đồng dạng với  $D$  nên

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(D).$$

Hạng của ma trận chéo  $D$  chính là số phần tử khác không trên đường chéo chính của nó. Các phần tử trên đường chéo chính của  $D$  lại chính là các giá trị riêng của  $A$  với số lần lặp lại bằng đúng bội của giá trị riêng.

Vậy  $\text{rank}(A)$  chính là số các giá trị riêng khác không của  $A$ , tính cả bội.

## CHƯƠNG 7

---

**7.1.** (a) Ta có

$$\begin{aligned} & \langle 5u_1 - 7u_2, 8v_1 + 6v_2 \rangle \\ = & \langle 5u_1, 8v_1 \rangle + \langle 5u_1, 6v_2 \rangle + \langle -7u_2, 8v_1 \rangle + \langle -7u_2, 6v_2 \rangle \\ = & 40 \langle u_1, v_1 \rangle + 30 \langle u_1, v_2 \rangle - 56 \langle u_2, v_1 \rangle - 42 \langle u_2, v_2 \rangle. \end{aligned}$$

(b) Ta có

$$\begin{aligned} & \langle u - 4v, 5u + 2v \rangle \\ = & \langle u, 5u \rangle + \langle u, 2v \rangle + \langle -4v, 5u \rangle + \langle -4v, 2v \rangle \\ = & 5 \langle u, u \rangle + 2 \langle u, v \rangle - 20 \langle v, u \rangle - 8 \langle v, v \rangle \\ = & 5|u|^2 - 18 \langle u, v \rangle - 8|v|^2. \end{aligned}$$

(c) Ta có

$$|3u - 2v|^2$$

$$\begin{aligned}
&= \langle 3u - 2v, 3u - 2v \rangle \\
&= 9|u|^2 - 12\langle u, v \rangle + 4|v|^2.
\end{aligned}$$

**7.3.**  $\langle u, v \rangle = 3, |u + 2v| = \sqrt{78}, d(u, v) = \sqrt{15}.$

**7.4.** Ta có

$$u' = Au = \begin{bmatrix} 13 \\ 3 \end{bmatrix}, v' = Av = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Do đó

$$\langle u, v \rangle = u' \cdot v' = -8, |u - v| = 3\sqrt{26}$$

và

$$d(u - v, v) = |u - 2v| = \sqrt{370}.$$

**7.5.** Ta có

$$u' = Au = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, v' = Av = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Do đó

$$\langle u, v \rangle = u' \cdot v' = \sqrt{13}, |u - v| = \sqrt{56}$$

và

$$d(u + v, v) = |u| = 5\sqrt{2}.$$

**7.6.** Ta có

$$\langle u, u \rangle = x_1x_1 - x_2x_2 = x_1^2 - x_2^2.$$

Do đó, tồn tại véc tơ  $u$  sao cho  $\langle u, u \rangle < 0$ , ví dụ, với  $u = (0, 1)$ , ta có  $\langle u, u \rangle = -1 < 0$ .

Do đó, ánh xạ đã cho không thỏa mãn tiên đề xác định dương của tích vô hướng. Vậy, nó không phải là một tích vô hướng trên  $\mathbb{R}^2$ .

**7.7.** Theo định nghĩa, với  $u = (x_1, x_2)$  và  $v = (y_1, y_2)$ , ta có

$$\langle u, v \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 + x_2y_2.$$

Từ đó suy ra

$$\langle v, u \rangle = y_1 x_1 - y_1 x_2 + y_2 x_2.$$

So sánh hai đẳng thức này, ta thấy

$$\langle u, v \rangle \neq \langle v, u \rangle$$

nếu  $x_1 y_2 \neq x_2 y_1$ . Một ví dụ về cặp véc tơ thỏa mãn điều kiện này là  $u = (0, 1)$  và  $v = (1, 0)$ .

Do đó, ánh xạ đã cho không thỏa mãn tiên đề đối xứng của tích vô hướng. Vậy, nó không phải là một tích vô hướng trên  $\mathbb{R}^2$ .

**7.12.** Ta có

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ * & 13 & * \\ * & * & 2 \end{bmatrix}, |A| = 4.$$

Theo định nghĩa,  $d(A, B) = |A - B|$ .

$$(A - B)^T (A - B) = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ * & 13 & * \\ * & * & 2 \end{bmatrix}, d(A, B) = \sqrt{35}.$$

**7.13.** Ta có

$$\langle p, p \rangle = 1^2 + 4^2 + 2^2 + 3^2 = 30,$$

$$\langle q, q \rangle = (-1)^2 + 2^2 + 3^2 = 14,$$

$$\langle p, q \rangle = (1)(-1) + (4)(2) + (2)(0) + (3)(3) = 16.$$

Do đó

$$\cos \angle(p, q) = \frac{\langle p, q \rangle}{|p| |q|} = \frac{16}{\sqrt{30} \sqrt{14}} = \frac{8}{\sqrt{105}}.$$

**7.14.** (a) Đối với tích vô hướng Euclid, ta có

$$u \cdot v = (1)(-3) + (-2)(1) + (3)(2) = 1$$

Vì  $u \cdot v \neq 0$  nên  $u \not\perp v$ .

(b) Đối với tích vô hướng có trọng số cho trong đề bài, ta có

$$\langle u, v \rangle = a(1)(-3) + 2(-2)(1) + (3)(2) = -3a + 2.$$

Do đó

$$u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow -3a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}.$$

**7.15.** (a) Ta có

$$\langle x, x^2 \rangle = \int_{-1}^1 x x^2 dx = \int_{-1}^1 x^3 dx = \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = 0.$$

Vì  $\langle x, x^2 \rangle = 0$  nên  $x \perp x^2$ .

(b) Ta có

$$\begin{aligned} \langle x^m, x^n \rangle &= \int_{-1}^1 x^m x^n dx = \int_{-1}^1 x^{m+n} dx \\ &= \left[ \frac{x^{m+n+1}}{m+n+1} \right]_{-1}^1 = \frac{1 - (-1)^{m+n+1}}{m+n+1}. \end{aligned}$$

Do đó

$$x^m \perp x^n \Leftrightarrow \langle x^m, x^n \rangle = 0 \Leftrightarrow 1 - (-1)^{m+n+1} = 0.$$

Đẳng thức cuối cùng xảy ra khi và chỉ khi  $m+n+1$  là một số chẵn, tức là  $m+n$  là một số lẻ.

**7.16.** (a) Ta có

$$u \cdot v = -20, \quad u \cdot u = 81, \quad v \cdot v = 10.$$

Suy ra

$$\cos \angle(u, v) = \frac{u \cdot v}{|u| |v|} = \frac{-20}{9\sqrt{10}} = -\frac{2\sqrt{10}}{9}.$$

(b) Ta có

$$Au = (1, 16, 12), \quad Av = (0, -1, -2).$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle &= (Au) \cdot (Av) = -18, \\ \langle u, u \rangle &= (Au) \cdot (Au) = 401, \\ \langle v, v \rangle &= (Av) \cdot (Av) = 5.\end{aligned}$$

Vậy

$$\cos \angle(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{|u| |v|} = \frac{-18}{\sqrt{401}\sqrt{5}} = -\frac{18}{\sqrt{2005}}.$$

**7.17.** (a) Đối với tích vô hướng chính tắc của  $\mathcal{P}_2$ , ta có

$$\langle p, q \rangle = -16, \quad \langle p, p \rangle = 30, \quad \langle q, q \rangle = 21.$$

Suy ra

$$\cos \angle(p, q) = \frac{\langle p, q \rangle}{|p| |q|} = \frac{-16}{\sqrt{30}\sqrt{21}} = -\frac{8\sqrt{70}}{105}.$$

(b) Đối với tích vô hướng tính giá trị tại dãy điểm  $-1, 0, 1$ , ta có

$$\langle p, q \rangle = -40, \quad \langle p, p \rangle = 56, \quad \langle q, q \rangle = 35.$$

Suy ra

$$\cos \angle(p, q) = \frac{\langle p, q \rangle}{|p| |q|} = \frac{-40}{\sqrt{56}\sqrt{35}} = -\frac{2\sqrt{10}}{7}.$$

**7.24.** Ta có

$$\begin{aligned}|u + v|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= |u|^2 + 2\langle u, v \rangle + |v|^2.\end{aligned}$$

Công thức tương tự cho  $|u - v|^2$  là

$$|u - v|^2 = |u|^2 - 2\langle u, v \rangle + |v|^2.$$

Do đó

$$\begin{aligned}|u + v|^2 + |u - v|^2 &= (|u|^2 + 2\langle u, v \rangle + |v|^2) + (|u|^2 - 2\langle u, v \rangle + |v|^2) \\ &= 2(|u|^2 + |v|^2).\end{aligned}$$

**7.25.** Ta có

$$\begin{aligned} |u+v|^2 - |u-v|^2 &= (|u|^2 + 2\langle u, v \rangle + |v|^2) - (|u|^2 - 2\langle u, v \rangle + |v|^2) \\ &= 4\langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

**7.30.** Một đa thức bất kỳ  $p(x) = a + bx + cx^2$  trong  $\mathcal{P}_2$  thuộc phần bù trực giao  $\mathcal{L}(2+x)^\perp$  khi và chỉ khi  $\langle p(x), 2+x \rangle = 0$ . Ta có

$$\begin{aligned} \langle p(x), 2+x \rangle &= \int_0^1 (a + bx + cx^2)(2+x) dx \\ &= \int_0^1 (2a + (a+2b)x + (b+2c)x^2 + cx^3) dx \\ &= \left[ 2ax + (a+2b)\frac{x^2}{2} + (b+2c)\frac{x^3}{3} + c\frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12}(30a + 16b + 11c). \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} p(x) \in \mathcal{L}(2+x)^\perp &\Leftrightarrow 30a + 16b + 11c = 0 \\ &\Leftrightarrow p(x) = (-16t - 11s) + (30t)x + (30s)x^2 \\ &\Leftrightarrow p(x) = t(-16 + 30x) + s(-11 + 30x^2). \end{aligned}$$

Vậy một cơ sở của  $\mathcal{L}(2+x)^\perp$  là hệ đa thức  $-16 + 30x, -11 + 30x^2$ .

**7.32.** Khi  $r = 1$ , đẳng thức cần chứng minh trở thành đẳng thức hiển nhiên  $|u_1|^2 = |u_1|^2$ . Khi  $r = 2$ , đẳng thức cần chứng minh chính là định lý Pythagoras. Khi  $r \geq 3$ , ta chứng minh tương tự như đã chứng minh định lý Pythagoras.

Trước khi xét trường hợp tổng quát, ta xét trường hợp  $r = 3$ . Ta có

$$\begin{aligned} &|u_1 + u_2 + u_3|^2 \\ &= \langle u_1 + u_2 + u_3, u_1 + u_2 + u_3 \rangle \\ &= \langle u_1, u_1 \rangle + \langle u_1, u_2 \rangle + \langle u_1, u_3 \rangle + \langle u_2, u_1 \rangle + \langle u_2, u_2 \rangle + \langle u_2, u_3 \rangle \\ &\quad + \langle u_3, u_1 \rangle + \langle u_3, u_2 \rangle + \langle u_3, u_3 \rangle \end{aligned}$$

Vì  $\mathcal{B}$  là một hệ véc tơ trực giao nên  $\langle u_i, u_j \rangle = 0$  với mọi  $i \neq j$ . Suy ra

$$\begin{aligned} |u_1 + u_2 + u_3|^2 &= \langle u_1, u_1 \rangle + \langle u_2, u_2 \rangle + \langle u_3, u_3 \rangle \\ &= |u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2. \end{aligned}$$

Bây giờ xét trường hợp  $r$  tổng quát. Ta có

$$\begin{aligned} |u_1 + u_2 + \cdots + u_r|^2 &= \langle u_1 + u_2 + \cdots + u_r, u_1 + u_2 + \cdots + u_r \rangle \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \langle u_i, u_j \rangle. \end{aligned}$$

Vì  $\mathcal{B}$  là một hệ véc tơ trực giao nên  $\langle u_i, u_j \rangle = 0$  với mọi  $i \neq j$ . Suy ra

$$\begin{aligned} |u_1 + u_2 + \cdots + u_r|^2 &= \sum_{i=1}^r \langle u_i, u_i \rangle = \sum_{i=1}^r |u_i|^2 \\ &= |u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_r|^2. \end{aligned}$$

**7.34.** (a) Giả sử

$$[u]_{\mathcal{B}} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad [v]_{\mathcal{B}} = (b_1, b_2, \dots, b_n).$$

Suy ra

$$[u]_{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \langle a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n, b_1 e_1 + b_2 e_2 + \cdots + b_n e_n \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle a_i e_i, b_j e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \langle e_i, e_j \rangle. \end{aligned}$$

Vì  $\mathcal{B}$  là một cơ sở trực chuẩn nên  $\langle e_i, e_j \rangle = 0$  với mọi  $i \neq j$  và  $\langle e_i, e_i \rangle = 1$  với mọi  $i$ . Suy ra

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \sum_{i=1}^n a_i b_i \langle e_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \\ &= [u]_{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

(b) Vì  $\mathcal{B}$  là một cơ sở trực chuẩn của  $V$  nên

$$\begin{aligned}[u]_{\mathcal{B}} &= (\langle u, e_1 \rangle, \langle u, e_2 \rangle, \dots, \langle u, e_n \rangle), \\ [v]_{\mathcal{B}} &= (\langle v, e_1 \rangle, \langle v, e_2 \rangle, \dots, \langle v, e_n \rangle).\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle &= [u]_{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} \\ &= \langle u, e_1 \rangle \langle v, e_1 \rangle + \langle u, e_2 \rangle \langle v, e_2 \rangle + \dots + \langle u, e_n \rangle \langle v, e_n \rangle.\end{aligned}$$

**7.37.** (a) Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt hệ véc tơ  $u_1, u_2, u_3$ :

$$\triangleright v_1 = u_1 = (1, 1, 1, 1).$$

$$\triangleright v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{|v_1|^2} v_1 = (2, 2, 3, 5) - \frac{12}{4} (1, 1, 1, 1) = (-1, -1, 0, 2).$$

$$\triangleright v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{|v_1|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{|v_2|^2} v_2 = (2, 3, -2, 1) - \frac{4}{4} (1, 1, 1, 1) - \frac{-3}{6} (-1, -1, 0, 2) = \frac{1}{2} (1, 3, -6, 2).$$

Vậy, trực giao hóa Gram-Schmidt, ta nhận được hệ véc tơ trực giao

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), \quad v_2 = (-1, -1, 0, 2), \quad v_3 = \frac{1}{2} (1, 3, -6, 2).$$

(b) Để trực chuẩn hóa Gram-Schmidt hệ véc tơ  $u_1, u_2, u_3$ , ta chuẩn hóa hệ véc tơ  $v_1, v_2, v_3$  bên trên, và nhận được hệ véc tơ trực chuẩn.

$$\begin{aligned}w_1 &= \frac{1}{|v_1|} v_1 = \frac{1}{2} (1, 1, 1, 1) \\ w_2 &= \frac{1}{|v_2|} v_2 = \frac{1}{6} (-1, -1, 0, 2) \\ w_3 &= \frac{1}{|v_3|} v_3 = \frac{1}{5\sqrt{2}} (1, 3, -6, 2).\end{aligned}$$

**7.38.** Trực giao hóa Gram-Schmidt hệ véc tơ  $v_1, e_1, e_2, e_3$ :

$$\triangleright u_1 = v_1 = (1, 1, 1).$$

$$\triangleright u_2 = e_1 - \frac{\langle e_1, u_1 \rangle}{|u_1|^2} u_1 = (1, 0, 0) - \frac{1}{3} (1, 1, 1) = \frac{1}{3} (2, -1, -1).$$

$$\triangleright u_3 = e_2 - \frac{\langle e_2, u_1 \rangle}{|u_1|^2} u_1 - \frac{\langle e_2, u_2 \rangle}{|u_2|^2} u_2 = (0, 1, 0) - \frac{1}{3} (1, 1, 1) - \frac{-1}{6} (2, -1, -1) = \frac{1}{2} (0, 1, -1).$$

$\triangleright u_4 = 0$  vì hệ véc tơ  $u_1, u_2, u_3$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^3$ . (Hệ này độc lập tuyến tính và có số véc tơ bằng  $\dim \mathbb{R}^3$ .)

Do đó, ta có thể chọn

$$v_2 = (2, -1, -1), \quad v_3 = (0, 1, -1)$$

để được cơ sở trực giao  $v_1, v_2, v_3$  của  $\mathbb{R}^3$ .