Sur l'application de Quillen pour la cohomologie modulo 2 de certains groupes finis

Jean Lannes

0 Introduction

La théorie de Quillen

Soit G un groupe fini arbitraire. Le célèbre article de Quillen [Qui] fournit en particulier une "approximation" de $\mathrm{H}^*(G;\mathbb{F}_2)$, la cohomologie modulo 2 du groupe G. On rappelle ci-après la théorie de Quillen dans ce contexte.

On considère la catégorie, disons $\mathcal{Q}_G$, suivante :

– les objets de $\mathcal{Q}_G$ sont les 2-sous-groupes abéliens élémentaires $E \subset G$ ($E \approx (\mathbb{Z}/2)^d$ pour un certain d) ;

– les morphismes de $\mathcal{Q}_G$ sont les homomorphismes de groupes $f : E \to E'$ induits par une conjugaison dans G.

On note respectivement $\mathrm{ob}\,\mathcal{Q}_G$ et $\mathrm{mor}\,\mathcal{Q}_G$ l'ensemble des objets et l'ensemble des morphismes de $\mathcal{Q}_G$; on obervera que ces deux ensembles sont finis.

Comme une conjugaison dans G induit l'identité de $\mathrm{H}^*(G;\mathbb{F}_2)$, le produit des homomorphismes de restriction

$$\mathrm{H}^*(G;\mathbb{F}_2) \to \prod_{E\in\mathrm{ob}\,\mathcal{Q}_G} \mathrm{H}^*(E;\mathbb{F}_2)$$

induit un homomorphisme de $\mathbb{F}_2$-algèbres (commutatives) $\mathbb{N}$-graduées de $\mathrm{H}^*(G;\mathbb{F}_2)$ sur la sous-algèbre de $\prod_{E\in\mathrm{ob}\,\mathcal{Q}_G} \mathrm{H}^*(E;\mathbb{F}_2)$ constituée des éléments $(x_E)_{E\in\mathrm{ob}\,\mathcal{Q}_G}$ vérifiant $x_E = f^*x_{E'}$ pour tout $f \in \mathrm{mor}\,\mathcal{Q}_G$. Nous notons $\mathrm{L}(G)$ cette sous-algèbre et

$$\mathrm{q}_G : \mathrm{H}^*(G;\mathbb{F}_2) \to \mathrm{L}(G)$$

l'homomorphisme défini ci-dessus ; nous appelons q_G *l'application de Quillen.*

Remarque 0.1. Soit $\mathcal{K}^{\mathbb{F}_2}$ la catégorie des $\mathbb{F}_2$-algèbres $\mathbb{N}$-graduées. Quillen observe que l'application $E \mapsto \mathrm{H}^*(E;\mathbb{F}_2)$ peut être vue comme un foncteur défini sur la catégorie $\mathcal{Q}_G^{\mathrm{op}}$, opposée de $\mathcal{Q}_G$, à valeurs dans $\mathcal{K}^{\mathbb{F}_2}$ et que l'objet $\mathrm{L}(G)$ de $\mathcal{K}^{\mathbb{F}_2}$ n'est rien d'autre que la limite de ce foncteur :

$$\mathrm{L}(G) \;:=\; \lim_{\mathcal{Q}_G^{\mathrm{op}}} \mathrm{H}^*(E;\mathbb{F}_2) \qquad .$$

Le théorème 6.2 de [Qui] ("main theorem") se spécialise de la façon suivante :

Théorème 0.2. *Soit G un groupe fini.*

(a) *Tout élément du noyau de* q_G *est nilpotent.*

(b) *Pour tout élément x de* $\mathrm{L}(G)$ *il existe un entier naturel r tel que x^{2^r} est dans l'image de* q_G*.*

Remarque 0.3. Pour le point (a) ci-dessus nous avons respecté la formulation de [Qui]. Comme $\mathrm{H}^*((\mathbb{Z}/2)^d;\mathbb{F}_2)$ est isomorphe à une algèbre de polynômes $\mathbb{F}_2[u_1,u_2,\dots,u_d]$ ($u_1,u_2,\dots,u_d$ désignant des indéterminées de degré un) la $\mathbb{F}_2$-algèbre $\mathrm{L}(G)$ est réduite si bien que tout élément nilpotent de $\mathrm{H}^*(G;\mathbb{F}_2)$ est dans le noyau de q_G. On peut donc remplacer le point (a) en question par le suivant :

(a-bis) *Le noyau de* q_G *est le nilradical de* $\mathrm{H}^*(G;\mathbb{F}_2)$*.*

Entrée en scène de l'algèbre de Steenrod

On observe que la cohomologie modulo 2 d'un groupe G est la cohomologie modulo 2 d'un espace topologique à savoir son espace classifiant $\mathrm{B}G$: $\mathrm{H}^*(G;\mathbb{F}_2)=\mathrm{H}^*(\mathrm{B}G;\mathbb{F}_2)$. Soit A l'algèbre de Steenrod modulo 2 ; $\mathrm{H}^*(G;\mathbb{F}_2)$ est donc muni d'une action de A qui en fait un A-*module instable*. Rappelons qu'un A-module instable est un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel $\mathbb{N}$-gradué $M=\{M^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ muni d'applications $\mathrm{A}^i\otimes M^n\to M^{n+i}$, qui en font un A-module ($\mathbb{N}$-gradué), tel que l'on a $\mathrm{Sq}^i x=0$ pour $i>|x|$, $|x|$ désignant le degré d'un élément (homogène) de M (*condition d'instabilité*) [1]. La catégorie dont les objets sont les A-modules instables et dont les morphismes sont les applications A-linéaires de degré zéro est notée $\mathcal{U}$. De plus $\mathrm{H}^*(G;\mathbb{F}_2)=\mathrm{H}^*(\mathrm{B}G;\mathbb{F}_2)$ est une A-*algèbre instable*, c'est-à-dire que l'on a :

($\mathcal{K}_1$) $\mathrm{Sq}^i(x\smile y)=\sum_{j+k=i}\mathrm{Sq}^j x\smile\mathrm{Sq}^k y$ pour tous x et y dans $\mathrm{H}^*(G;\mathbb{F}_2)$;

($\mathcal{K}_2$) $\mathrm{Sq}^{|x|}x=x\smile x$ pour tout x dans $\mathrm{H}^*(G;\mathbb{F}_2)$.

1. On pourrait supposer que M est $\mathbb{Z}$-gradué ; en effet la condition d'instabilité entraîne que $x=\mathrm{Sq}^0 x$ est nul pour $|x|<0$. La terminologie "A-module instable" peut paraître étrange : si l'on convient qu'un A-module stable est un A-module ne vérifiant pas la condition d'instabilité alors ce n'est rien d'autre qu'un A-module $\mathbb{Z}$-gradué. Le mot "stable" dans ce contexte fait référence à la théorie de l'homotopie stable (voir par exemple [Ad]).

La catégorie des A-algèbres instables est notée $\mathcal{K}$; par définition elle est munie de deux foncteurs “oubli” :

$$\mathcal{K}^{\mathbb{F}_2} \longleftarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{U} \qquad .$$

La condition $(\mathcal{K}_2)$ ci-dessus conduit aux définitions ci-dessous.

Soit M un A-module instable ; on note Sq_0 l'application, de M dans M, $x \mapsto \mathrm{Sq}^{|x|}x$ (Sq_0 n'est pas de degré zéro mais multiplie le degré par 2). On dit qu'un élément de M est *nilpotent* s'il est annulé par une itérée de Sq_0. On dit que M est *nilpotent* si tous ses éléments sont nilpotents. En général, soit $\mathrm{Nil}(M)$ le sous-ensemle ($\mathbb{N}$-gradué) de M constitué des éléments nilpotents ; $\mathrm{Nil}(M)$ est stable par addition, la relation $\mathrm{Sq}_0\mathrm{Sq}^i = \mathrm{Sq}^{2i}\mathrm{Sq}_0$ implique qu'il est aussi stable sous l'action des opérations de Steenrod : c'est le plus grand sous-A-module instable nilpotent de M qu'il est raisonnable d'appeler le *nilradical* de M.

L'application $\mathrm{q}_G : \mathrm{H}^*(G;\mathbb{F}_2) \to \mathrm{L}(G)$ est un homomorphisme de A-algèbres instables. Le théorème 0.2 fait intervenir l'homomorphisme sous-jacent de $\mathbb{F}_2$-algèbres $\mathbb{N}$-graduées ; ce qui précède montre que l'on peut le reformuler en termes de l'homomorphisme sous-jacent de A-modules instables :

Théorème 0.4. *Soit G un groupe fini ; le noyau et le conoyau de l'homomorphisme de* A*-modules instables sous-jacent à* q_G *sont nilpotents.*

Sans surprise, on dit qu'un A-module instable M est *réduit* si 0 est son seul élément nilpotent.

La catégorie $\mathcal{U}$ est une catégorie abélienne avec assez d'injectifs (et de projectifs). On constate que M est réduit si et seulement si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(N,M) = \mathrm{Ext}^0_{\mathcal{U}}(N,M)$ est nul pour tout N nilpotent (pour s'en convaincre prendre $N = \mathrm{Nil}(M)$). On dit que M est *$\mathcal{N}il$-fermé* si l'on a en outre $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{U}}(N,M) = 0$ pour tout N nilpotent. Un peu d'algèbre homologique dans la catégorie $\mathcal{U}$, voir 1.9 et 1.10, fournit l'énoncé suivant :

Proposition 0.5. *Soit G un groupe fini ; les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) L'application de Quillen q_G *est un isomorphisme.*

(ii) Le A*-module instable* $\mathrm{H}^*(G;\mathbb{F}_2)$ *est $\mathcal{N}il$-fermé.*

Soit S un sous-groupe d'indice impair de G ; le fait que l'homomorphisme de transfert $\mathrm{tr} : \mathrm{H}^*(S;\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(G;\mathbb{F}_2)$ commute aux opérations de Steenrod entraîne que $\mathrm{H}^*(G;\mathbb{F}_2)$ est (canoniquement) facteur direct, comme A-module instable, de $\mathrm{H}^*(S;\mathbb{F}_2)$. La définition-même de la notion de A-module instable $\mathcal{N}il$-fermé en termes des foncteurs $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{U}}(N,-)$, $k = 0, 1$ et N nilpotent, implique donc :

PROPOSITION 0.6. *Soient G un groupe fini et $S \subset G$ un sous-groupe d'indice impair. Si le* A*-module instable* $\mathrm{H}^*(S;\mathbb{F}_2)$ *est $\mathcal{N}il$-fermé alors il en est de même pour le* A*-module instable* $\mathrm{H}^*(G;\mathbb{F}_2)$.

Les propositions 0.5 et 0.6 conduisent aux corollaires suivants :

COROLLAIRE 0.7. *Soient G un groupe fini et $S \subset G$ un sous-groupe d'indice impair. Si le* A*-module instable* $\mathrm{H}^*(S;\mathbb{F}_2)$ *est $\mathcal{N}il$-fermé alors* q_G *est un isomorphisme .*

On en vient maintenant aux résultats de notre article.

TROIS FAMILLES DE GROUPES FINIS G TELLES QUE LA COHOMOLOGIE MODULO 2 D'UN 2-SYLOW DE G EST $\mathcal{N}il$-FERMÉE

On montre dans [GLZ] que si la cohomologie modulo 2 d'un groupe fini G est $\mathcal{N}il$-fermée (comme A-module instable) alors il en est de même pour celle du produit en couronne [2] $\mathfrak{S}_2 \wr G$. On en déduit que la cohomologie modulo 2 d'un 2-Sylow du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est $\mathcal{N}il$-fermée si l'entier n est une puissance de 2 ; le cas général en résulte en observant que le produit tensoriel de deux A-modules instables $\mathcal{N}il$-fermés est encore $\mathcal{N}il$-fermé. Le corollaire 0.7 dit alors que l'application de Quillen $\mathrm{q}_{\mathfrak{S}_n}$ est un isomorphisme.

Par les mêmes méthodes (mais avec un peu plus d'efforts) nous montrons dans le présent article que la cohomologie modulo 2 d'un 2-Sylow du groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ est $\mathcal{N}il$-fermée.

Notre stratégie est de remplacer les A-modules instables par les P-A-modules instables, P désignant la cohomologie modulo 2 du groupe $\mathbb{Z}/2$. Rappelons la définiton de ces objets. Un P-A-module instable est un A-module instable M muni d'une application A-linéaire $\mathrm{P} \otimes M \to M$ qui fait de M un P-module. Exemple : l'homomorphisme de A-algèbres instables $\mathrm{P} \to \mathrm{H}^*(\mathfrak{S}_n;\mathbb{F}_2)$, induit par la signature, fait du A-module instable $\mathrm{H}^*(\mathfrak{S}_n;\mathbb{F}_2)$ un P-A-module instable.

Comme dans le cas des groupes symétriques nous commençons par traiter le cas de $\mathfrak{A}_n$ avec n une puissance de 2. Ce cas particulier est au coeur de notre travail ; le passage au cas général se fait par une méthode similaire à celle employée pour les groupes symétriques.

2. La notation $G \wr \mathfrak{S}_2$ semble plus fréquente.

Comme précédemment le corollaire 0.7 dit que l'application de Quillen $\mathrm{q}_{\mathfrak{A}_n}$ est un isomorphisme. Ici un commentaire s'impose : Chad Giusti et Dev Sinha ont récemment déterminé $\mathrm{H}^*(\mathfrak{A}_n;\mathbb{F}_2)$ [GS] et montré en particulier que $\mathrm{H}^*(\mathfrak{A}_n;\mathbb{F}_2)$ est réduit ce qui entraîne que $\mathrm{q}_{\mathfrak{A}_n}$ est un monomorphisme. Nous montrons que $\mathrm{q}_{\mathfrak{A}_n}$ est un isomorphisme mais nous ne déterminons pas $\mathrm{L}(\mathfrak{A}_n)$!

Enfin nous observons que les 2-Sylow des groupes de Coxeter finis (le cas des groupes diédraux mis à part) sont produits de 2-Sylow de groupes symétriques ou alternés ; l'application de Quillen est donc encore un isomorphisme pour les groupes de Coxeter finis (le cas des groupes diédraux est traité séparément).

Crédits et remerciements

Les recherches exposées dans cet article ont commencé au début des années 2000 à l'initiative de Mark Feshbach (qui connaissait [GLZ] et avait observé que les 2-Sylow des groupes de Coxeter finis étaient reliés à ceux des groupes symétriques et alternés). Nous avions traité le cas du groupe alterné $\mathfrak{A}_8$ en utilisant la structure particulière de "son" 2-Sylow. La mort prématurée de Mark en 2010 n'a malheureusement pas permis à notre collaboration d'aller jusqu'à son terme ; je dédie cet article à sa mémoire.

Je remercie Jean-Pierre Serre pour les questions qu'il m'a posées sur la cohomologie modulo 2 des groupes alternés qui ont renouvelé mon intérêt pour ce sujet.

Je remercie le VIASM qui m'a invité à donner un cours sur mon travail à l'automne 2023. Je remercie en particulier Nguyen The Cuong et Pham Van Tuan qui ont été des cobayes-auditeurs efficaces.

Je remercie l'IRL FVMA CNRS, L'IMJ-PRG et le VIASM pour leur soutien matériel à ma visite à Hanoï.

Je remercie enfin le CMLS pour son hospitalité durant la rédaction de cet article.

1 Sur les A-modules instables réduits et $\mathcal{N}il$-fermés

Pour le confort du lecteur nous commençons par regrouper quelques-unes des définitions apparues dans l'introduction.

Définition 1.1. Soit M un A-module instable.

(a) On note $\mathrm{Sq}_0 : M \to M$ l'application linéaire $x \mapsto \mathrm{Sq}^{|x|}x$, $|x|$ désignant le degré de x (on observera que l'on a $|\mathrm{Sq}_0 x| = 2|x|$).

(b) On dit qu'un élément x de M est *nilpotent* s'il est annulé par une itérée de l'application Sq_0. On dit que le A-module instable M est *nilpotent* si tous ses éléments sont nilpotents.

Proposition-Définition 1.2. Soit M un A-module instable.

On appelle *nilradical* de M le sous-espace vectoriel $\mathbb{N}$-gradué constitué des éléments nilpotents ; on le note $\mathrm{Nil}(M)$. *Le nilradical de M est stable sous l'action des opérations de Steenrod ; c'est le plus grand sous-*A*-module instable nilpotent de M.*

PROPOSITION-DÉFINITION 1.3. Soit M un A-module instable.
Les trois conditions suivantes sont équivalentes :
(i) l'application linéaire $\mathrm{Sq}_0 : M \to M$ *est injective ;*
(ii) le nilradical $\mathrm{Nil}(M)$ *est nul ;*
(iii) on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(N, M) = 0$ *pour tout* A*-module instable nilpotent* N.

Si ces conditions sont vérifiées on dit que M est *réduit.*

DÉFINITION 1.4. On dit qu'un A-module instable M est *$\mathcal{N}il$-fermé* si M est réduit et si l'on a en outre $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{U}}(N, M) = 0$ pour tout A-module instable nilpotent N ; en d'autres termes si l'on a $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{U}}(N, M) = 0$ pour $k = 0, 1$ et tout A-module instable nilpotent N.

Les trois propositions ci-après s'obtiennent en considérant la longue suite exacte des $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}(N, -)$ avec N nilpotent, associée à une suite exacte courte.

PROPOSITION 1.5. *Soit* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *une suite exacte dans la catégorie $\mathcal{U}$ avec M $\mathcal{N}il$-fermé ; les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) M'' est réduit ;
(ii) M' est $\mathcal{N}il$-fermé.

SCHOLIE 1.6. *Soit* $0 \to M' \to M \to M''$ *une suite exacte dans la catégorie $\mathcal{U}$; si M est $\mathcal{N}il$-fermé et M'' réduit alors M' est $\mathcal{N}il$-fermé.*

Démonstration. Soit M''' l'image de l'homomorphisme $M \to M''$. Comme M'' est réduit M''' l'est aussi, si bien que l'on dispose d'une suite exacte courte $0 \to M' \to M \to M''' \to 0$ avec M $\mathcal{N}il$-fermé et M''' réduit. On peut donc invoquer l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ de 1.5. □

SCHOLIE 1.7. *Soit M un* A*-module instable muni d'une action (à gauche) d'un groupe G commutant à l'action de* A, *en clair muni d'une famille d'automorphismes* $(\mathrm{a}_g : M \circlearrowleft)_{g \in G}$ *de M vérifiant* $\mathrm{a}_{gh} = \mathrm{a}_g \circ \mathrm{a}_h$ *pour tous g et h dans G.*
*Si M est $\mathcal{N}il$-fermé alors le sous-*A*-module instable M^G constitués des éléments de M invariants par G est aussi $\mathcal{N}il$-fermé.*

Démonstration. Par définition même on a une suite exacte de A-modules instables

$$0 \longrightarrow M^G \longrightarrow M \xrightarrow{\ f\ } \prod_{g\in G} M_g \qquad ,$$

M_g désignant une copie de M et f le produit des homomorphismes $\mathrm{a}_g - \mathrm{id}$; on achève à l'aide de 1.6 en observant qu'un produit (arbitraire) de A-modules instables $\mathcal{N}il$-fermés est $\mathcal{N}il$-fermé et *a fortiori* réduit. $\square$

Proposition 1.8. *Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte dans la catégorie $\mathcal{U}$ avec M'' $\mathcal{N}il$-fermé ; les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) M' est $\mathcal{N}il$-fermé ;
(ii) M est $\mathcal{N}il$-fermé.

Proposition 1.9. *Soit $f : M \to L$ un $\mathcal{U}$-morphisme. Si L est $\mathcal{N}il$-fermé et si* $\ker f$ *et* $\operatorname{coker} f$ *sont nilpotents alors les deux conditions sont équivalentes :*
(i) f est un isomorphisme ;
(ii) M est $\mathcal{N}il$-fermé.

Démonstration de $(ii) \Rightarrow (i)$. Si M est réduit il en est de même pour $\ker f$, d'où $\ker f = 0$. En considérant la longue suite exacte des $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}(N, -)$ avec N nilpotent, associée à la suite exacte courte $0 \to M \xrightarrow{f} L \to \operatorname{coker} f \to 0$, on constate que $\operatorname{coker} f$ est réduit, d'où $\operatorname{coker} f = 0$. $\square$

Exemple 1.10. La proposition 1.9 fournit une démonstration de l'énoncé 0.5. En effet on a, par définition de $\mathrm{L}(G)$, une suite exacte dans la catégorie $\mathcal{U}$

$$0 \to \mathrm{L}(G) \to \mathrm{L}^0(G) \to \mathrm{L}^1(G)$$

avec

$$\mathrm{L}^0(G) := \prod_{E\in \mathrm{ob}\,\mathcal{Q}_G} \mathrm{H}^*E \quad \text{et} \quad \mathrm{L}^1(G) := \prod_{f\in \mathrm{mor}\,\mathcal{Q}_G} \mathrm{H}^*(\text{source de } f) \qquad .$$

Or, à l'occasion des recherches sur la conjecture de Sullivan, il a été découvert [Ca][Mi][LZ1], que H^*V est un A-module instable injectif (réduit puisque l'on a $\mathrm{H}^*V \cong \mathbb{F}_2[u_1, u_2, \ldots, u_d]$, $\{u_1, u_2, \ldots, u_d\}$ désignant une base de H^1V), pour tout 2-groupe abélien élémentaire V ; il en résulte que $\mathrm{L}(G)$ est $\mathcal{N}il$-fermé (par exemple d'après 1.6) si bien que l'on peut appliquer 1.9. En fait on verra (condition (*iii*) de 1.13) que tout A-module instable $\mathcal{N}il$-fermé prend place dans une suite exacte analogue à celle qui définit $\mathrm{L}(G)$.

Origine de la terminologie "$\mathcal{N}il$-fermé"

On reprend les hypothèses de 1.9. Soit L' un A-module instable $\mathcal{N}il$-fermé, alors des arguments du même type que ceux utilisés dans la démonstration de 1.9 montrent que f induit un isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(L, L') \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, L')$. En d'autres termes, étant donné un $\mathcal{U}$-morphisme $f' : M \to L'$, il existe un unique $\mathcal{U}$-morphisme $\phi : L \to L'$ tel que l'on a $f' = \phi \circ f$. Si l'on suppose en outre que f' satisfait les hypothèses de la proposition 1.9 alors on constate que ϕ est un isomorphisme (échanger les rôles de f et f') : le $\mathcal{U}$-morphisme $f : M \to L$ est "unique à isomorphisme canonique près".

Ce qui précède est relié à la théorie de la *localisation dans les catégories abéliennes* développée dans [Ga, Chap. III] où la terminologie (-)-fermé est introduite. Soit $\mathcal{N}il$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{U}$ dont les objets sont les A-modules instables nilpotents. Cette sous-catégorie est *épaisse* : étant donnée une $\mathcal{U}$-suite exacte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, M est nilpotent si et seulement si M' et M'' le sont. Cette propriété permet de définir la *catégorie quotient* $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ et un foncteur $\mathbf{t} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}/\mathcal{N}il$. De plus ce foncteur admet un adjoint à droite $\mathbf{s} : \mathcal{U}/\mathcal{N}il \to \mathcal{U}$ (on dit alors que la sous-catégorie est *localisante*) ; l'existence de cet adjoint résulte du fait que $\mathcal{U}$ a assez d'injectifs et que tout objet de $\mathcal{U}$ contient un sous-objet maximal qui appartient à $\mathcal{N}il$. Le foncteur $\ell := \mathbf{s} \circ \mathbf{t} : \mathcal{U} \circlearrowleft$ est le *foncteur localisation* ; par construction on dispose d'une transformation naturelle $\eta_M : M \to \ell(M)$, à savoir l'unité de l'adjonction, et on constate que $\ell(M)$ est $\mathcal{N}il$-fermé et que $\ker \eta_M$ et $\operatorname{coker} \eta_M$ sont nilpotents.

La conclusion de la discussion ci-dessus est la suivante : $\mathrm{L}(G)$ est "la" localisation "away from $\mathcal{N}il$" du A-module instable H^*G et le $\mathcal{U}$-morphisme sous-jacent à q_G s'identifie à $\eta_{\mathrm{H}^*G} : \mathrm{H}^*G \to \mathrm{L}(G)$. Pour une description "concrète" de la catégorie $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ et de l'endofonteur $\ell : \mathcal{U} \circlearrowleft$, le lecteur pourra consulter [HLS2].

Produit tensoriel de A-modules instables $\mathcal{N}il$-fermés

Soient M_1 et M_2 deux A-modules instables. Le produit tensoriel des deux $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels $\mathbb{N}$-gradués sous-jacents est naturellement muni d'une structure de A-module grâce à la structure d'algèbre de Hopf de A [3] ; on le note $M_1 \otimes M_2$, c'est encore un A-module instable.

3. En clair : soient x_1 un élément de M_1, x_2 un élément de M_2 et i un entier naturel, on a la *formule de Cartan* :

$$\mathrm{Sq}^i(x_1 \otimes x_2) = \sum_{i_1+i_2=i} \mathrm{Sq}^{i_1} x_1 \otimes \mathrm{Sq}^{i_2} x_2 \qquad .$$

On a $\mathrm{Sq}_0(x_1 \otimes x_2) = \mathrm{Sq}_0 x_1 \otimes \mathrm{Sq}_0 x_2$ pour tout x_1 dans M_1 et tout x_2 dans M_2. Cette formule implique que si M_1 et M_2 sont réduits alors il en est de même pour $M_1 \otimes M_2$. Pareillement :

PROPOSITION 1.11. *Soient M_1 et M_2 deux* A*-modules instables ; si M_1 et M_2 sont $\mathcal{N}il$-fermés alors il en est de même pour $M_1 \otimes M_2$.*

Démonstration. Celle-ci utilise la théorie des $\mathcal{U}$-injectifs [LZ1][LS] ($\mathcal{U}$-injectif est une abréviation pour "objet injectif de la catégorie $\mathcal{U}$ des A-modules instables") que nous mettons en œuvre ci-après

PROPOSITION 1.12. *Soit M un* A*-module instable. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) M est réduit ;

(ii) il existe un $\mathcal{U}$-monomorphisme $M \hookrightarrow I$ avec I un $\mathcal{U}$-injectif réduit ;

(iii) il existe une famille $(E_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ de 2*-groupes abéliens élémentaires et un $\mathcal{U}$-monomorphisme $M \hookrightarrow \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{H}^*E_\gamma$.*

Démonstration de (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*). Soit $i : M \to I$ une enveloppe injective de M. Si M est réduit alors on a $i^{-1}(\mathrm{Nil}(I)) = 0$ et donc $\mathrm{Nil}(I) = 0$ (la définition du nilradical $\mathrm{Nil}(-)$ d'un A-module instable est rappelée en 1.2) si bien que I est réduit. □

Démonstration de (*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*). On pose $\mathrm{P} := \mathrm{H}^*\mathbb{Z}/2$. On considère l'ensemble des facteurs directs indécomposables de $\mathrm{P}^{\otimes m}$, m parcourant $\mathbb{N}$ (par convention $\mathrm{P}^{\otimes m} = \mathbb{F}_2$ pour $m = 0$), et on choisit un sous-ensemble $\mathcal{L}$ de cet ensemble tel que chaque classe d'isomorphisme de ces facteurs directs ait dans $\mathcal{L}$ un representant et un seul ; le théorème [LS, 6.2.1] dit qu'il existe une (unique) famille de cardinaux $(a_L)_{L\in\mathcal{L}}$ telle que l'on a $I \cong \bigoplus_{L\in\mathcal{L}} L^{\oplus a_L}$. □

Démonstration de (*iii*) $\Rightarrow$ (*i*). Cette implication est évidente puisque les H^*E_γ sont réduits comme A-modules instables. □

COROLLAIRE 1.13. *Soit M un* A*-module instable. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) M est $\mathcal{N}il$-fermé ;

(ii) il existe une suite exacte dans $\mathcal{U}$ de la forme $0 \to M \to I^0 \to I^1$ avec I^0 et I^1 des $\mathcal{U}$-injectifs réduits ;

(iii) il existe deux familles $(E_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ et $(F_\delta)_{\delta\in\Delta}$ de 2*-groupes abéliens élémentaires et une suite exacte dans $\mathcal{U}$ de la forme*

$$0 \to M \to \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{H}^*E_\gamma \to \bigoplus_{\delta\in\Gamma} \mathrm{H}^*F_\delta \qquad .$$

Démonstration de $(i) \Rightarrow (ii)$. Si M est $\mathcal{N}il$-fermé, il est *a fortiori* réduit. La proposition 1.12 dit qu'il existe un monomorphisme $M \hookrightarrow I^0$ avec I^0 un $\mathcal{U}$-injectif réduit ; soit Q le conoyau de ce monomorphisme, l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ de 1.5 montre que Q est réduit. Il existe donc un monomorphisme $Q \hookrightarrow I^1$ avec I^1 un $\mathcal{U}$-injectif réduit. □

Démonstration de $(ii) \Rightarrow (i)$. Puisque la catégorie $\mathcal{U}$ a assez d'injectifs, la suite exacte $0 \to M \to I^0 \to I^1$ se prolonge en une résolution injective

$$0 \to M \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to I^3 \to \dots \qquad .$$

Soit N un A-module instable nilpotent ; $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(N, I^k) = 0$ pour $k = 0, 1$ implique $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{U}}(N, M) = 0$ pour $k = 0, 1$. □

Démonstration de $(i) \Rightarrow (iii)$. Elle est analogue à celle de $(i) \Rightarrow (ii)$, l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ de la proposition 1.12 étant remplacé par l'implication $(i) \Rightarrow (iii)$ de cette même proposition. □

Démonstration de $(iii) \Rightarrow (i)$. C'est un cas particulier de $(ii) \Rightarrow (i)$ car la cohomologie modulo 2 d'un groupe abélien élémentaire est un $\mathcal{U}$-injectif réduit. □

Fin de la démonstration de la proposition 1.11

On utilise par exemple l'équivalence $(i) \iff (iii)$ du corollaire 1.13. Soient M_1 et M_2 deux A-modules instables $\mathcal{N}il$-fermés et $0 \to M_i \to I_i^0 \to I_i^1$, $i = 1, 2$, deux suites exactes de A-modules instables avec I_i^k des sommes directes de cohomologie modulo 2 de 2-groupes abéliens élémentaires pour $i = 1, 2$ et $k = 0, 1$. On a alors une suite exacte de A-modules instables

$$0 \to M_1 \otimes M_2 \to I_{1,2}^0 := I_1^0 \otimes I_2^0 \to I_{1,2}^1 := (I_1^0 \otimes I_2^1) \oplus (I_1^0 \otimes I_2^0)$$

et $I_{1,2}^0$ et $I_{1,2}^1$ sont aussi des sommes directes de cohomologie modulo 2 de 2-groupes abéliens élémentaires. □

Compléments

Suspension d'un A*-module instable*

Soient $M = (M^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un A-module $\mathbb{Z}$-gradué et k un élément de $\mathbb{Z}$. On note $\Sigma^k M$ le A-module $\mathbb{Z}$-gradué $(M^{n-k})_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\Sigma^k x$ l'élément de degré n de $\Sigma^k M$ correspondant à un élément de degré $n-k$ de M ; $\Sigma^k M$ s'appelle la k-*suspension* de M, on abrège $\Sigma^1 M$ en ΣM et 1-*suspension* en *suspension*.

La proposition suivante est évidente :

Proposition 1.14. *Soit M un* A*-module instable.*

(a) *Si k est un élément de $\mathbb{N}$ alors le* A*-module $\mathbb{Z}$-gradué $\Sigma^k M$ est encore un* A*-module instable.*

(b) *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*
  (i) M est une suspension (en clair M est la suspension d'un un A*-module instable) ;*
  (ii) le A*-module $\mathbb{Z}$-gradué $\Sigma^{-1}M$ est un* A*-module instable ;*
  (iii) l'application $\mathrm{Sq}_0 : M \to M$ est triviale.

(c) *Si M est une suspension alors on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, M') = 0$ quand le* A*-module instable M' est réduit.*

Foncteur T_V et A*-modules instables $\mathcal{N}il$-fermés*

Soit V un 2-groupe abélien élémentaire ; on étudie dans [La1][La2] le foncteur $\mathrm{T}_V : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ adjoint à droite du foncteur $\mathcal{U} \to \mathcal{U}, M \mapsto \mathrm{H}^*V \otimes M$. On montre en particulier que T_V est exact (cette propriété est implicite dans [LZ1]).

Proposition 1.15. *Soit M un* A*-modules instable ; si M est $\mathcal{N}il$-fermé alors il en est de même pour $\mathrm{T}_V M$.*

Démonstration. Soit E un 2-groupe abélien élémentaire ; le A-module instable $\mathrm{T}_V\mathrm{H}^*E$ est isomorphe à une somme directe de copies de H^*E indexées par l'ensemble $\mathrm{Hom}(V, E)$ (voir [La1, 4.2]). Comme T_V est exact et commute aux sommes directes, on conclut en invoquant l'équivalence $(i) \iff (iii)$ de 1.13. □

Proposition 1.16. *Soient G un groupe fini, V un 2-groupe abélien élémentaire et $\phi : V \to G$ un homomorphisme de groupes ; soit $G_\phi \subset G$ le sous-groupe de G centralisateur de $\phi(V)$. Si le* A*-module instable H^*G est $\mathcal{N}il$-fermé, alors il en est de même pour le* A*-module instable H^*G_ϕ.*

Démonstration. On pose $\mathrm{Rep}(V, G) := G\backslash\mathrm{Hom}(V, G)$, G agissant à gauche sur l'ensemble $\mathrm{Hom}(V, G)$ par conjugaison au but. On montre (voir la remarque qui suit [La2, 3.4.6]) que l'on a un isomorphisme canonique de A-modules instables

$$\mathrm{T}_V\mathrm{H}^*G \;\cong\; \prod_\phi \mathrm{H}^*G_\phi \qquad ,$$

ϕ décrivant un système de représentants de $\mathrm{Rep}(V, G)$ dans $\mathrm{Hom}(V, G)$ (ce résultat est une généralisation de [La1, 4.2]). En particulier H^*G_ϕ est un facteur direct de $\mathrm{T}_V\,\mathrm{H}^*G$ qui est $\mathcal{N}il$-fermé d'après 1.15. $\square$

2 Groupes symétriques

On montre dans cette section que la cohomologie modulo 2 d'un 2-sous-groupe de Sylow d'un groupe symétrique est $\mathcal{N}il$-fermé ; ce résultat apparaît déjà dans [GLZ]. Notre rédaction est bien plus détaillée que celle de [GLZ] mais sa trame est assez semblable ; en fait le rôle principal de cette section est de servir de modèle à la stratégie que nous adopterons dans la section 5 où nous traiterons des groupes alternés.

On note $\mathfrak{S}_n (n \in \mathbb{N})$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ (vide pour $n = 0$).

Soit G un groupe fini ; on abrège 2-*sous-groupe de Sylow de* G en 2-*Sylow de* G (abréviation fréquente dans la littérature).

2.1 "Le" 2-Sylow de $\mathfrak{S}_n$

Le contenu de cette sous-section est fort classique.

On considère tout d'abord le cas où n est une puissance de 2.

On note S_{2^m} $(m \in \mathbb{N})$, le groupe défini par récurrence de la façon suivante :

$$\mathrm{S}_{2^0} = \mathfrak{S}_1 \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_{2^m} = \mathfrak{S}_2 \wr \mathrm{S}_{2^{m-1}} := \mathfrak{S}_2 \ltimes (\mathrm{S}_{2^{m-1}} \times \mathrm{S}_{2^{m-1}})$$

($\mathfrak{S}_2$ agissant à gauche sur le groupe $\mathrm{S}_{2^{m-1}} \times \mathfrak{S}_{2^{m-1}}$ par permutation des deux facteurs). On constate que S_{2^m} est un 2-groupe de cardinal $2^{(2^m-1)}$.

Soit $m \geq 1$ un entier ; la considération de la bijection

$$\{1, 2\} \times \{1, 2, \ldots, 2^{m-1}\} \to \{1, 2, \ldots, 2^m\} \quad , \quad (i, k) \mapsto k + (i-1)\, 2^{m-1}$$

conduit à la définition d'un monomorphisme $\mathfrak{S}_2 \wr \mathfrak{S}_{2^{m-1}} \hookrightarrow \mathfrak{S}_{2^m}$ et donc, par récurrence sur m, à l'identification de S_{2^m} avec un sous-groupe de $\mathfrak{S}_{2^m}$. On constate, par exemple à l'aide du lemme 2.1.1 ci-après (bien connu), que ce sous-groupe est un 2-Sylow.

On traite ensuite le cas général.

On écrit $n = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \ldots + 2^{m_r}$ avec $m_1 > m_2 > \ldots > m_r \geq 0$ et on pose $\mathrm{S}_n := \mathrm{S}_{2^{m_1}} \times \mathrm{S}_{2^{m_2}} \times \ldots \times \mathrm{S}_{2^{m_r}}$; la considération de la bijection évidente

$$\coprod_{1 \leq i \leq r} \{1, 2, \ldots, 2^{m_i}\} \;\cong\; \{1, 2, \ldots, n\}$$

donne un monomorphisme $\mathfrak{S}_{2^{m_1}} \times \mathfrak{S}_{2^{m_2}} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{2^{m_r}} \hookrightarrow \mathfrak{S}_n$ et conduit donc à l'identification de S_n avec un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$. On se convainc que ce sous-groupe est un 2-Sylow en invoquant à nouveau le lemme 2.1.1.

LEMME 2.1.1. *Soit $n \geq 0$ un entier ; soit $\alpha(n)$ le nombre de chiffres 1 dans l'écriture de n en base 2. Alors la valuation 2-adique de $n!$ est $n - \alpha(n)$.*

Démonstration. On note respectivement $[x]$ et $\mathrm{v}_2(y)$ la partie entière d'un nombre réel x et la valuation 2-adique d'un nombre rationnel non nul y.

Soit F^k, $k \in \mathbb{N}$, le sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$ constitué des entiers p avec $\mathrm{v}_2(p) \geq k$; on a donc une filtration décroissante

$$\{1, 2, \ldots, n\} = F^0 \supset F^1 \supset \ldots \supset F^k \supset \ldots$$

(F^k est vide pour k assez grand). Comme le cardinal de F^k est $[\frac{n}{2^k}]$, on a :

$$\mathrm{v}_2(n!) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} k\,(\,[\frac{n}{2^k}] - [\frac{n}{2^{k+1}}]\,) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} [\frac{n}{2^k}]$$

(les sommes ci-dessus sont en fait finies).

D'autre part le k-ième chiffre de l'écriture en base 2 de n est $[\frac{n}{2^k}] - 2[\frac{n}{2^{k+1}}]$, si bien que l'on a ;

$$\alpha(n) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (\,[\frac{n}{2^k}] - 2[\frac{n}{2^{k+1}}]\,) \;=\; n - \sum_{k=1}^{\infty} [\frac{n}{2^k}] \qquad .$$

□

2.2 Constructions quadratiques

Nous aurons à considérer dans cette sous-section "le" classifiant $\mathrm{B}G$ d'un groupe fini G ; pour fixer les idées il sera commode de disposer d'un modèle "fonctoriel" en G.

Soit G un groupe fini, on note $\mathrm{E}G$ le groupe simplicial défini par $\mathrm{E}_nG := G^{\{0,1,\ldots,n\}}$, les faces et dégénérescences étant les applications évidentes ; on note encore $\mathrm{E}G$ la réalisation géométrique de cet ensemble simplicial. L'espace $\mathrm{E}G$ est contractile et muni d'une action (à droite) de G qui est (topologiquement) libre. On note $\mathrm{B}G$ le quotient $\mathrm{E}G/G$ ($\mathrm{E}G \to \mathrm{B}G$ est un revêtement galoisien de groupe G). Pour une généralisation de cette construction le lecteur pourra consulter [Seg, §3] (dans cette référence G est un groupe topologique).

Soit G un groupe fini ; on rappelle que la notation $\mathfrak{S}_2 \wr G$ désigne le produit semi-direct $\mathfrak{S}_2 \ltimes (G \times G)$, $\mathfrak{S}_2$ agissant à gauche sur $G \times G$ par permutation des deux facteurs ($\mathfrak{S}_2 \wr G$ est le *produit en couronne* de $\mathfrak{S}_2$ et G, il est plus souvent noté $G \wr \mathfrak{S}_2$).

On constate que l'on a

$$\mathrm{B}(\mathfrak{S}_2 \wr G) \;=\; \mathrm{E}\mathfrak{S}_2 \times_{\mathfrak{S}_2} (\mathrm{B}G \times \mathrm{B}G) \qquad ,$$

le groupe $\mathfrak{S}_2$ agissant à gauche sur l'espace $\mathrm{B}G \times \mathrm{B}G$ par permutation des deux facteurs. Plus généralement :

Définition 2.2.1. Soit X un espace topologique ; on pose

$$\mathfrak{S}_2 X \;:=\; \mathrm{E}\mathfrak{S}_2 \times_{\mathfrak{S}_2} (X \times X) \qquad ,$$

le groupe $\mathfrak{S}_2$ agissant à gauche sur l'espace $X \times X$ par permutation des deux facteurs. L'espace $\mathfrak{S}_2 X$ est appelé la *construction quadratique* sur X.

On note $\pi : \mathrm{E}\mathfrak{S}_2 \times (X \times X) \to \mathfrak{S}_2 X$ l'application de passage au quotient ; π est un revêtement double.

Calcul de $\mathrm{H}^*(\mathfrak{S}_2 X; \mathbb{F}_2)$

Ce calcul est aussi classique (voir par exemple [Mg, §3], [Vo, Chap.IV, §2]) ; il est intimement relié à la définition des opérations de Steenrod.

On note $\mathrm{C}_\bullet X$ le complexe des chaînes singulières d'un espace topologique X et $\varepsilon : \mathrm{C}_\bullet X \to \mathbb{Z}$ son augmentation. L'action de $\mathfrak{S}_2$ sur l'espace $\mathrm{E}\mathfrak{S}_2$ fait de $\mathrm{C}_\bullet \mathrm{E}\mathfrak{S}_2$ un complexe de $\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_2]$-modules à droite et $\varepsilon : \mathrm{C}_\bullet \mathrm{E}\mathfrak{S}_2 \to \mathbb{Z}$ est une résolution libre de $\mathbb{Z}$, vu comme un $\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_2]$-module à droite trivial. Pour allèger la notation on pose $\mathrm{W} := \mathrm{C}_\bullet \mathrm{E}\mathfrak{S}_2$.

Le théorème d'Eilenberg-Zilber montre que l'on dispose d'une équivalence d'homotopie de $\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_2]$-complexes de chaînes (fonctorielle en X) :

$$\mathrm{C}_\bullet(\mathrm{E}\mathfrak{S}_2 \times (X \times X)) \;\cong\; \mathrm{W} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{C}_\bullet(X \times X) \qquad ,$$

le groupe $\mathfrak{S}_2$ agissant sur $\mathrm{C}_\bullet(X \times X)$ par échange des facteurs. Le théorème d'Eilenberg-Zilber dit encore que l'on dispose d'une équivalence d'homotopie, disons ez : $\mathrm{C}_\bullet(X \times X) \cong \mathrm{C}_\bullet X \otimes \mathrm{C}_\bullet X$ (fonctorielle en X et unique à homotopie fonctorielle près). Le groupe $\mathfrak{S}_2$ opère aussi sur $\mathrm{C}_\bullet X \otimes \mathrm{C}_\bullet X$ par échange des facteurs, mais il est bien connu que ez ne peut être $\mathfrak{S}_2$-équivariante car si elle l'était les opérations de Steenrod Sq^i seraient triviales pour $i > 0$. Cependant :

Proposition 2.2.2. *Soit X un espace topologique. On dispose d'une équivalence d'homotopie de $\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_2]$-complexes de chaînes*

$$\mathrm{W} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{C}_\bullet(X \times X) \;\cong\; \mathrm{W} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathrm{C}_\bullet X \otimes \mathrm{C}_\bullet X) \qquad .$$

De plus cette équivalence d'homotopie est unique à homotopie fonctorielle près.

COROLLAIRE 2.2.3. *Soit X un espace topologique. On dispose d'une équivalence d'homotopie fonctorielle en X :*

$$\mathrm{C}_\bullet \mathfrak{S}_2 X \;\cong\; \mathrm{W} \otimes_{\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_2]} (\mathrm{C}_\bullet X \otimes \mathrm{C}_\bullet X) \qquad ,$$

le groupe $\mathfrak{S}_2$ agissant sur $\mathrm{C}_\bullet X \otimes \mathrm{C}_\bullet X$ par échange des facteurs. De plus cette équivalence d'homotopie est unique à homotopie fonctorielle près. [4]

Démonstration. La théorie des revêtements montre que le complexe de chaînes $\mathrm{C}_\bullet \mathfrak{S}_2 X$ est le quotient de $\mathrm{C}_\bullet(\mathrm{E}\mathfrak{S}_2 \times (X \times X))$ par l'action de $\mathfrak{S}_2$. □

Le lecteur pourra trouver une démonstration détaillée de la proposition 2.2.2 dans [Za, Chap. I] qui emploie la méthode des modèles acycliques. Nous donnons ci-après, en petits caractères, un aperçu de cette démonstration.

Soit $\mathcal{T}$ la catégorie des espaces topologiques et Θ l'endofoncteur $(X_1, X_2) \mapsto (X_2, X_1)$ de la catégorie $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$. On constate que $\Theta \circ \Theta$ est le foncteur identité de $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$(en d'autes termes que la catégorie $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ est munie d'une action du groupe $\mathfrak{S}_2$) ; ceci permet de définir une catégorie $\mathfrak{S}_2 \wr \mathcal{T}$. Quelques détails :

– Les objets de $\mathfrak{S}_2 \wr \mathcal{T}$ sont les mêmes que ceux de $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$.

– Soient Y et Z deux objets de $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$, on pose

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_2 \wr \mathcal{T}}(Y, Z) \;:=\; \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}}(Y, Z) \coprod \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}}(\Theta Y, Z) \qquad ;$$

le lecteur devinera sans peine la règle de composition des morphismes de $\mathfrak{S}_2 \wr \mathcal{T}$ et observera, chemin faisant, que l'application $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_2 \wr \mathcal{T}}(Y, Z) \to \mathfrak{S}_2$ qui envoie le premier terme sur id et le second sur la transposition $\tau_{1,2}$ induit un foncteur $\mathrm{p} : \mathfrak{S}_2 \wr \mathcal{T} \to \underline{\mathfrak{S}_2}$, $\underline{\mathfrak{S}_2}$ désignant la catégorie associée au groupe $\mathfrak{S}_2$ [5]

– L'inclusion $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}}(Y, Z) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_2 \wr \mathcal{T}}(Y, Z)$ induit un foncteur, qui est l'identité sur les objets, de $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ dans $\mathfrak{S}_2 \wr \mathcal{T}$; on le note i.

– L'inclusion $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}}(\Theta Y, \Theta Y) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_2 \wr \mathcal{T}}(Y, \Theta Y)$ envoie l'identité de ΘY dans la catégorie $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ sur un élément que l'on note $\iota(Y)$. On constate que l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}}(\Theta Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_2 \wr \mathcal{T}}(Y, Z) \quad , \quad f \mapsto \mathrm{i}(f) \circ \iota(Y)$$

est l'inclusion naturelle te que le composé $\iota(\Theta Y) \circ \iota(Y)$ est l'identité de Y.

Après avoir mis en place le formalisme ci-dessus, on considère les foncteurs

$$\mathrm{F}_1(X_1, X_2) = \mathrm{W} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{C}_\bullet(X_1 \times X_2) \quad , \quad \mathrm{F}_2(X_1, X_2) = \mathrm{W} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathrm{C}_\bullet(X_1) \otimes \mathrm{C}_\bullet(X_2)) \quad .$$

4. Si l'on suppose que X est un CW-complexe et que $\mathrm{C}_\bullet$ désigne le complexe des chaînes cellulaires alors les complexes $\mathrm{C}_\bullet \mathfrak{S}_2 X$ et $\mathrm{W} \otimes_{\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_2]} (\mathrm{C}_\bullet X \otimes \mathrm{C}_\bullet X)$ sont isomorphes ; ce point de vue est notamment adopté dans [Mg] et [Vo].

5. La catégorie $\underline{\mathfrak{S}_2}$ possède un seul objet, disons $*$, et le monoïde $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathfrak{S}_2}}(*, *)$ est le groupe $\mathfrak{S}_2$.

définis sur $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ et à valeurs dans la catégorie dans la catégorie des $\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_2]$-complexes de chaînes (l'action de $\mathfrak{S}_2$ sur $\mathrm{C}_\bullet(X_1 \times X_2)$ et $\mathrm{C}_\bullet(X_1) \otimes \mathrm{C}_\bullet(X_2)$ étant triviale).

On montre que ces foncteurs se prolongent canoniquement en des foncteurs, disons $\widehat{\mathrm{F}}_1$ et $\widehat{\mathrm{F}}_2$, définis sur la catégorie $\mathfrak{S}_2 \wr \mathcal{T}$. La valeur de $\widehat{\mathrm{F}}_1$ (resp. $\widehat{\mathrm{F}}_2$) sur $\iota(X_1, X_2)$ est le produit tensoriel de l'action de $\mathfrak{S}_2$ sur W et de l'isomorphisme canonique $\mathrm{C}_\bullet(X_1 \times X_2) \cong \mathrm{C}_\bullet(X_2 \times X_1)$ (resp. $\mathrm{C}_\bullet(X_1) \otimes \mathrm{C}_\bullet(X_2) \cong \mathrm{C}_\bullet(X_2) \otimes \mathrm{C}_\bullet(X_1)$).

On vérifie que les foncteurs $\widehat{\mathrm{F}}_1$ et $\widehat{\mathrm{F}}_2$, sont libres sur les “modèles” $\{(\Delta^{n_1}, \Delta^{n_2})\}$, (n_1, n_2) parcourant $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (Δ^n désigne ici le n-simplexe standard), et que leurs versions augmentées (par le foncteur constant de valeur $\mathbb{Z}$) sont acycliques sur ces mêmes modèles. Le théorème des modèles acycliques fournit alors l'énoncé suivant :

Proposition 2.2.4. *Soient X_1 et X_2 deux espaces topologiques. On dispose d'une équivalence d'homotopie fonctorielle en (X_1, X_2), vu comme un objet de la catégorie $\mathfrak{S}_2 \wr \mathcal{T}$,*

$$\widehat{\mathrm{ez}}_{(X_1,X_2)} \ : \ \mathrm{W} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{C}_\bullet(X_1 \times X_2) \ \cong \ \mathrm{W} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathrm{C}_\bullet(X_1) \otimes \mathrm{C}_\bullet(X_2)) \qquad .$$

De plus cette équivalence d'homotopie est unique à homotopie fonctorielle (au même sens que ci-dessus) près.

Remarque 2.2.5. La catégorie $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ s'identifie à une sous-catégorie (non pleine) de $\mathfrak{S}_2 \wr \mathcal{T}$; toujours d'après le théorème des modèles acycliques, la “restriction” de la transformation naturelle $\widehat{\mathrm{ez}}$ à $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ est homotope, (fonctoriellement en $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$) à la transformation naturelle $1_{\mathrm{W}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{ez}$ (ez désignant la transformation naturelle d'Eilenberg-Zilber).

Soit X un espace topologique ; il découle de la proposition 2.2.4 que les équivalences d'homotopie

$$\widehat{\mathrm{ez}}_{(X,X)} \ : \ \mathrm{W} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{C}_\bullet(X \times X) \ \cong \ \mathrm{W} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathrm{C}_\bullet(X) \otimes \mathrm{C}_\bullet(X))$$

induisent une transformation naturelle de foncteurs définis sur la catégorie des espaces topologiques et à valeurs dans la catégorie des $\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_2]$-complexes de chaînes. La proposition 2.2.2 en résulte.

Remarque 2.2.6. La catégorie $\underline{\mathfrak{S}_2} \times \mathcal{T}$ s'identifie à une sous-catégorie (non pleine) de $\mathfrak{S}_2 \wr \mathcal{T}$. La transformation naturelle évoquée ci-dessus est simplement la restriction de $\widehat{\mathrm{ez}}$ à $\underline{\mathfrak{S}_2} \times \mathcal{T}$.

La proposition 2.2.3 implique :

Corollaire 2.2.7. *Soit X un espace topologique. On a un isomorphisme canonique de $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels gradués*

$$\mathrm{H}_*(\mathfrak{S}_2 X; \mathbb{F}_2) \ \cong \ \mathrm{H}_*(\mathfrak{S}_2; \mathrm{H}_*(X; \mathbb{F}_2) \otimes \mathrm{H}_*(X; \mathbb{F}_2)) \qquad ,$$

le groupe $\mathfrak{S}_2$ agissant sur $\mathrm{H}_*(X; \mathbb{F}_2) \otimes \mathrm{H}_*(X; \mathbb{F}_2)$ par échange des facteurs.

Précisons la notation. Soient G un groupe et $M_* = (M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un $\mathbb{Z}[G]$-module gradué ; $\mathrm{H}_*(G; M_*)$ désigne le groupe abélien gradué dont le n-ième terme est $\bigoplus_{p+q=n} \mathrm{H}_p(G; M_q)$. On définit $\mathrm{H}^*(G; M^*)$ *mutatis mutandis.*

Démonstration. On note $\mathrm{H}_\bullet(X;\mathbb{F}_2)$ le complexe de chaînes à différentielle nulle

$$\mathrm{H}_0(X;\mathbb{F}_2) \xleftarrow{0} \mathrm{H}_1(X;\mathbb{F}_2) \xleftarrow{0} \mathrm{H}_2(X;\mathbb{F}_2) \xleftarrow{0} \ldots \xleftarrow{0} \mathrm{H}_n(X;\mathbb{F}_2) \xleftarrow{0} \ldots \qquad .$$

Comme $\mathrm{C}_\bullet(X;\mathbb{F}_2)$ est un complexe de chaînes sur un corps il existe une équivalence d'homotopie $h : \mathrm{C}_\bullet(X;\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}_\bullet(X;\mathbb{F}_2)$ induisant l'identité en homologie ; de plus un tel h est unique à homotopie près. Ces deux propriétés (fort classiques) résultent par exemple de l'équivalence (*iii*) $\Leftrightarrow$ (*iv*) de [Boh, §2, n° 5, Proposition 6]. Précisons un peu. Posons $\mathrm{C}_\bullet(X;\mathbb{F}_2) = \mathrm{C}_\bullet$ et $\mathrm{H}_\bullet(X;\mathbb{F}_2) = \mathrm{H}_\bullet$. La condition (*iv*) évoquée ci-dessus dit en particulier que $\mathrm{C}_\bullet$ est isomorphe à un complexe de la forme $\mathrm{H}_\bullet \oplus \mathrm{D}_\bullet$ avec $\mathrm{D}_\bullet$ homotope à 0. Pour un complexe de cette forme, l'existence de h et son unicité à homotopie près sont évidentes.

On invoque alors un célèbre lemme de Steenrod [St, Lemma 5.2] dont nous rappelons l'énoncé dans le contexte qui nous intéresse :

Lemme 2.2.8. *Soient $f_0, f_1 : C_\bullet \to D_\bullet$ deux homomorphismes de complexes de chaînes. Si f_0 et f_1 sont homotopes alors il en est de même pour*

$$1_{\mathrm{W}} \otimes_{\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_2]} (f_0 \otimes f_0),\, 1_{\mathrm{W}} \otimes_{\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_2]} (f_1 \otimes f_1) : \mathrm{W} \otimes_{\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_2]} (C_\bullet \otimes C_\bullet) \to \mathrm{W} \otimes_{\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_2]} (D_\bullet \otimes D_\bullet).$$

Scholie 2.2.9. *Soit $f : C_\bullet \to D_\bullet$ un homomorphisme de complexes de chaînes. Si f est une équivalence d'homotopie alors il en est de même pour*

$$1_{\mathrm{W}} \otimes_{\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_2]} (f \otimes f) \,:\, \mathrm{W} \otimes_{\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_2]} (C_\bullet \otimes C_\bullet) \to \mathrm{W} \otimes_{\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_2]} (D_\bullet \otimes D_\bullet) \qquad .$$

Le lemme de Steenrod et son scholie montrent que l'homomorphisme de complexes de chaînes

$$\mathrm{W} \otimes_{\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_2]} (\mathrm{C}_\bullet(X;\mathbb{F}_2) \otimes \mathrm{C}_\bullet(X;\mathbb{F}_2)) \xrightarrow{1_{\mathrm{W}} \otimes_{\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_2]}(h \otimes h)} \mathrm{W} \otimes_{\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_2]} (\mathrm{H}_\bullet(X;\mathbb{F}_2) \otimes \mathrm{H}_\bullet(X;\mathbb{F}_2))$$

est une équivalence d'homotopie et que la classe d'homotopie de cet homomorphisme est indépendante du choix de h. $\square$

Remarque 2.2.10. Il est implicite dans [St] que l'on dispose de versions équivariantes de 2.2.8 et 2.2.9 dans lesquelles les complexes sont remplacés par des $\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_2]$-complexes el le produit tensoriel $\otimes_{\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_2]}$ par le produit tensoriel $\otimes_{\mathbb{Z}}$. La présence de W dans la théorie de Steenrod est nécessaire : Soit $\mathrm{E}_\bullet$ le complexe défini par $\mathrm{E}_n = \mathbb{F}_2$ pour $n = 0, 1$, $\mathrm{E}_n = 0$ pour $n \neq 0, 1$ et

$d_1 = 1$; $E_\bullet$ est homotope à 0 mais $E_\bullet \otimes E_\bullet$ n'est pas homotope à 0 en tant que $\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_2]$-complexe.

Dualement :

Corollaire 2.2.11. *Soit X un espace topologique avec $\mathrm{H}^*(X;\mathbb{F}_2)$ de dimension finie en chaque degré. On a un isomorphisme canonique de $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels gradués*

$$\mathrm{H}^*(\mathfrak{S}_2 X;\mathbb{F}_2) \;\cong\; \mathrm{H}^*(\mathfrak{S}_2;\mathrm{H}^*(X;\mathbb{F}_2)\otimes \mathrm{H}^*(X;\mathbb{F}_2)) \qquad ,$$

le groupe $\mathfrak{S}_2$ agissant sur $\mathrm{H}^*(X;\mathbb{F}_2)\otimes \mathrm{H}^*(X;\mathbb{F}_2)$ par échange des facteurs.

(L'hypothèse de finitude est juste là pour assurer que le $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel $\mathrm{H}^s(X;\mathbb{F}_2)\otimes \mathrm{H}^t(X;\mathbb{F}_2)$ est le dual de $\mathrm{H}_s(X;\mathbb{F}_2)\otimes \mathrm{H}_t(X;\mathbb{F}_2)$ pour tout couple d'entiers (s,t).)

Notation. A partir de maintenant la cohomologie que nous considèrerons sera la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{F}_2$, aussi nous abrègerons la notation $\mathrm{H}^*(-;\mathbb{F}_2)$ en $\mathrm{H}^*(-)$ ou H^*-.

Scholie 2.2.12. *Soit X un espace topologique avec $\mathrm{H}^n X$ de dimension finie pour tout n. Soit B_n une base (totalement) ordonnée de $\mathrm{H}^n X$; on pose $B := \coprod_{n\in\mathbb{N}} B_n$.*
On munit B de la relation d'ordre (total) qui prolonge celles des B_n et qui vérifie en outre $x<y$ pour $x\in B_n$, $y\in B_p$ et $n<p$.
On a un isomorphisme canonique de $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels gradués

$$\mathrm{H}^*\mathfrak{S}_2 X \;\cong\; \bigoplus_{(x,y)\in B\times B\,,\,x<y} \mathbb{F}_2\,.\,(x\otimes y + y\otimes x) \;\oplus\; \bigoplus_{x\in B} \mathrm{H}^*\mathfrak{S}_2\,.\,x\otimes x \qquad .$$

Démonstration. Le $\mathbb{F}_2[\mathfrak{S}_2]$-module ($\mathbb{N}$-gradué) $\mathrm{H}^*X\otimes \mathrm{H}^*X$ est somme directe des sous-modules suivants :
– le sous-module engendré par $x\otimes y$ et $y\otimes x$ avec $(x,y)\in B\times B$, $x<y$;
– le sous-module engendré par $x\otimes x$ avec $x\in B$.
Oublions la graduation ; le premier est isomorphe à $\mathbb{F}_2[\mathfrak{S}_2]$, le second à $\mathbb{F}_2$ (muni de l'action triviale de $\mathfrak{S}_2$). La formule pour $\mathrm{H}^*\mathfrak{S}_2 X$ en résulte. $\square$

Nous nous proposons maintenant de "polir" la formule du scholie 2.2.12 en retravaillant la définition des deux termes du second membre.

1) On considère le revêtement double $\pi : \mathrm{E}\mathfrak{S}_2 \times (X \times X) \to \mathfrak{S}_2 X$ et l'homomorphisme de transfert qui lui est associé :

$$\mathrm{tr} : \mathrm{H}^*(\mathrm{E}\mathfrak{S}_2 \times (X \times X)) = \mathrm{H}^*X \otimes \mathrm{H}^*X \to \mathrm{H}^*\mathfrak{S}_2 X \qquad .$$

Soient z_1 et z_2 deux éléments de H^*X, on constate (invoquer 2.2.5) que l'on a $\mathrm{tr}(z_1 \otimes z_2) = z_1 \otimes z_2 + z_2 \otimes z_1$ (et en particulier $\mathrm{tr}(z_1 \otimes z_2) = 0$ pour $z_1 = z_2$). D'où l'égalité :

$$\bigoplus_{(x,y)\in B\times B\,,\,x<y} \mathbb{F}_2 \,.\, (x \otimes y + y \otimes x) \;=\; \mathrm{im}\,\mathrm{tr}$$

(la notation $\mathrm{im}\,\mathrm{tr}$ désigne ci-dessus l'image de l'homomorphisme tr).

2) Soient A un groupe abélien et n un entier ; on note $A[n]$ le complexe de chaînes dont le n-ième terme est A et dont tous les autres sont nuls.

Soient z un élément de H^nX et $\tilde{z} : \mathrm{C}_nX \to \mathbb{F}_2$ un cocycle représentant z ; on rappelle que $\tilde{z}$ s'identifie à une morphisme de complexes $\mathrm{C}_\bullet X \to \mathbb{F}_2[n]$ et z à la classe d'homotopie de ce morphisme.

Le morphisme de complexes

$$\mathrm{W} \otimes \mathrm{C}_\bullet X \otimes \mathrm{C}_\bullet X \xrightarrow{\varepsilon \otimes \tilde{z} \otimes \tilde{z}} \mathbb{Z}[0] \otimes \mathbb{F}_2[n] \otimes \mathbb{F}_2[n] = \mathbb{F}_2[2n]$$

se factorise à travers $\mathrm{W} \otimes_{\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_2]} (\mathrm{C}_\bullet X \otimes \mathrm{C}_\bullet X)$. Compte tenu de 2.2.3, il définit un élément de $\mathrm{H}^{2n}\mathfrak{S}_2 X$; le lemme ci-dessous est encore dû à Steenrod.

Lemme-Définition 2.2.13. *L'élément de* $\mathrm{H}^{2n}\mathfrak{S}_2 X$ *introduit ci-dessus est indépendant du choix du cocycle* $\tilde{z}$ *représentant* z *; on le note* $\mathrm{P}_2 z$ *et on l'appelle la* puissance de Steenrod *de* z*.*

Démonstration. Conséquence de 2.2.8 avec $C_\bullet = \mathrm{C}_\bullet X$ et $D_\bullet = \mathbb{F}_2[n]$. □

Soient z_1 et z_2 deux éléments de H^nX, on constate que l'on a $\mathrm{P}_2(z_1 + z_2) = \mathrm{P}_2 z_1 + \mathrm{P}_2 z_2 + \mathrm{tr}(z_1 \otimes z_2)$: l'application $\mathrm{P}_2 : \mathrm{H}^nX \to \mathrm{H}^{2n}\mathfrak{S}_2 X$ est quadratique.

La définition même de P_2 montre que le terme $\bigoplus_{x\in B} \mathrm{H}^*\mathfrak{S}_2 \,.\, x \otimes x$ peut être réécrit $\bigoplus_{x\in B} \mathrm{H}^*\mathfrak{S}_2 \,.\, \mathrm{P}_2 x$.

La diagonale de Steenrod et le foncteur R_1 de Singer

L'application $\mathrm{id} \times \delta : \mathrm{E}\mathfrak{S}_2 \times X \to \mathrm{E}\mathfrak{S}_2 \times (X \times X)$, δ désignant la diagonale de X, induit par passage au quotient une application $\Delta : \mathrm{B}\mathfrak{S}_2 \times X \to \mathfrak{S}_2 X$ que l'on appelle la *diagonale de Steenrod*.

La contemplation du diagramme de revêtements doubles

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{E}\mathfrak{S}_2 \times X & \xrightarrow{\mathrm{id}\times\delta} & \mathrm{E}\mathfrak{S}_2 \times (X \times X) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\
\mathrm{B}\mathfrak{S}_2 \times X & \xrightarrow{\Delta} & \mathfrak{S}_2 X
\end{array}$$

montre que l'homomorphisme composé

$$\mathrm{H}^*X \otimes \mathrm{H}^*X \xrightarrow{\mathrm{tr}} \mathrm{H}^*\mathfrak{S}_2X \xrightarrow{\Delta^*} \mathrm{H}^*(\mathrm{B}\mathfrak{S}_2 \times X)$$

est nul (observer que l'homomorphisme $\mathrm{tr} : \mathrm{H}^0\,\mathrm{B}\mathfrak{S}_2 \to: \mathrm{H}^0\,\mathrm{E}\mathfrak{S}_2$ est nul), d'où l'égalité $\Delta^*(\mathrm{im\,tr}) = 0$.

On a $\mathrm{H}^*\mathfrak{S}_2 = \mathrm{H}^*\mathbb{Z}/2 = \mathbb{F}_2[u]$, u désignant l'élément non nul de $\mathrm{H}^1\mathfrak{S}_2$; on a donc $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}\mathfrak{S}_2 \times X) = \mathbb{F}_2[u] \otimes \mathrm{H}^*X$. Soit z un élément de H^nX, on rappelle que l'on peut définir les opérations de Steenrod par la formule ci-dessous :

$$\Delta^*\mathrm{P}_2\,z \;=\; \sum_{i=1}^{n} u^{n-i} \otimes \mathrm{Sq}^i z \qquad .$$

On note que l'expression au second membre de cette égalité ne fait intervenir que la structure de A-module instable de H^*X ; cette observation conduit à la définition ci-après.

Définition 2.2.14. Soient M un A-module instable et z un élément (homogène) de M ; on note $\mathrm{St}_1\,z$ l'élément $\sum_{i=1}^{|z|} u^{|z|-i} \otimes \mathrm{Sq}^i z$ de $\mathbb{F}_2[u] \otimes M$.[6]
On observera que l'application $\mathbb{F}_2$-linéaire

$$\mathrm{St}_1 : M \to \mathbb{F}_2[u] \otimes M \;\;,\;\; z \mapsto \mathrm{St}_1\,z$$

"multiplie le degré par 2".

Proposition-Définition 2.2.15. *Soit M un* A*-module instable ; on note* R_1M *le sous-*$\mathbb{F}_2[u]$*-module de* $\mathbb{F}_2[u] \otimes M$ *engendré par* St_1M.

(a) *Le module* R_1M *est un sous-*A*-module de* $\mathbb{F}_2[u] \otimes M$*, en particulier* R_1M *est un* A*-module instable.*

(b) *La correspondance* $M \mapsto \mathrm{R}_1M$ *s'étend en un endofoncteur* $\mathrm{R}_1 : \mathcal{U} \circlearrowleft$.

(c) *Le foncteur* R_1 *préserve les sommes directes.*

6. L'indice 1 est là parce qu'il existe des $\mathrm{St}_s\,z$ avec $s \in \mathbb{N}$, voir par exemple [LZ2].

(d) *Soit* $\mathcal{O} : \mathcal{K} \to \mathcal{U}$ *le foncteur oubli. Si* M *est une* A-*algèbre instable alors* $\mathrm{R}_1\mathcal{O}M$ *est une sous-*A-*algèbre instable de la* A-*algèbre instable* $\mathbb{F}_2[u] \otimes M$*. La correspondance* $M \mapsto \mathrm{R}_1M$ *s'étend en un endofoncteur* $\mathrm{R}_1 : \mathcal{K} \circlearrowleft$ *tel que le diagramme de foncteurs*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[r, "\mathrm{R}_1"] \arrow[d, "\mathcal{O}"'] & \mathcal{K} \arrow[d, "\mathcal{O}"'] \\ \mathcal{U} \arrow[r, "\mathrm{R}_1"] & \mathcal{U} \end{tikzcd}$$

est commutatif.

(e) *Soit* $B \subset M$ *une base (au sens gradué) du* $\mathbb{F}_2$-*espace vectoriel* $\mathbb{N}$-*gradué sous-jacent à* M*, alors* St_1B *est une base du* $\mathbb{F}_2[u]$-*module* $\mathbb{N}$-*gradué sous-jacent à* R_1M*.*

(f) *Soit* E *un* $\mathbb{F}_2$-*espace vectoriel* $\mathbb{N}$-*gradué ; on note* ΦE *le* $\mathbb{F}_2$-*espace vectoriel* $\mathbb{N}$-*gradué défini par*

$$(\Phi E)^n = \begin{cases} E^{\frac{n}{2}} & \textit{pour } n \textit{ pair,} \\ 0 & \textit{pour } n \textit{ impair.} \end{cases}$$

Soit $\mathcal{E}$ *la catégorie des* $\mathbb{F}_2$-*espaces vectoriels* $\mathbb{N}$-*gradués ; on a un* $\mathcal{E}$-*isomorphisme naturel en* M *:*

$$\mathcal{O}\mathrm{R}_1M \;\cong\; \mathbb{F}_2[u] \otimes \Phi\mathcal{O}M \qquad ,$$

$\mathcal{O}$ *désignant cette fois le foncteur oubli de* $\mathcal{U}$ *vers* $\mathcal{E}$*.*

(g) *Le foncteur* R_1 *est exact.*

Démonstration. Pour les points (a) et (e) nous renvoyons à [LZ2]. Les points (b) et (c) sont évidents. Le point (f) résulte du point (e) et du fait que le degré de $\mathrm{St}_1 z$ est le double de celui de z. Le point (f) implique le point (g) (une $\mathcal{U}$-suite est exacte si et seulement si la $\mathcal{E}$-suite sous-jacente est exacte). Soient M une A-algèbre instable, z_1, z_2 deux éléments de M et i un entier naturel ; l'égalité $\mathrm{Sq}^i(z_1z_2) = \sum_{j+k=i} \mathrm{Sq}^j z_1 \, \mathrm{Sq}^k z_2$ est équivalente à l'égalité $\mathrm{St}_1(z_1z_2) = \mathrm{St}_1 z_1 \, \mathrm{St}_1 z_2$, d'où le point (d). □

Les endofoncteurs $\Phi : \mathcal{U} \circlearrowleft$ et $\Phi : \mathcal{K} \circlearrowleft$

On a défini dans le point (f) de 2.2.15 un endofoncteur "double" $\Phi : \mathcal{E} \circlearrowleft$; on va définir ci-dessous des endofoncteurs $\Phi : \mathcal{U} \circlearrowleft$ et $\Phi : \mathcal{K} \circlearrowleft$ compatibles (en un sens évident) avec les foncteurs oubli $\mathcal{K} \to \mathcal{U} \to \mathcal{E}$.

Soit M un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel $\mathbb{N}$-gradué ; on note $\sigma : M \otimes M \circlearrowleft$ l'automorphisme involutif $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ définissant l'action de $\mathfrak{S}_2$ sur $M \otimes M$. On considère le 0-ième groupe de cohomologie de Tate $\widehat{\mathrm{H}}^0(\mathfrak{S}_2; M \otimes M)$ ("les invariants divisés par les normes") :

$$\widehat{\mathrm{H}}^0(\mathfrak{S}_2; M \otimes M) \ := \ \ker(1-\sigma)/\operatorname{im}(1+\sigma) \qquad .$$

On constate que l'application

$$M \to \widehat{\mathrm{H}}^0(\mathfrak{S}_2; M \otimes M) \quad , \quad x \mapsto \text{classe de } x \otimes x$$

est un isomorphisme "multipliant le degré par 2", en d'autres termes que l'on a un $\mathcal{E}$-isomorphisme naturel $\Phi M \cong \widehat{\mathrm{H}}^0(\mathfrak{S}_2; M \otimes M)$.

Si M est un A-module instable alors $\sigma : M \otimes M \circlearrowleft$ est un $\mathcal{U}$-automorphisme si bien que $\Phi M \cong \widehat{\mathrm{H}}^0(\mathfrak{S}_2; M \otimes M)$ est muni d'une structure naturelle de A-module instable. Il n'est pas difficile d'expliciter l'action des opérations de Steenrod sur ΦM :

$$\mathrm{Sq}^i \Phi x = \begin{cases} \Phi\, \mathrm{Sq}^{\frac{i}{2}} x & \text{pour } i \text{ pair,} \\ 0 & \text{pour } n \text{ impair,} \end{cases}$$

Φx désignant la classe de $x \otimes x$.

Si M est une A-algèbre instable alors $\ker(1-\sigma) = (M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2}$ est une sous-A-algèbre instable de $M \otimes M$ et $\operatorname{im}(1+\sigma)$ et un idéal de $(M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2}$ stable sous l'action A si bien que ΦM est muni d'une $\mathcal{K}$-structure naturelle. On constate que le produit de ΦM est simplement le "double" de celui de M : $\Phi x \, \Phi y = \Phi(xy)$.

Remarque 2.2.16. Soit M un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel $\mathbb{N}$-gradué ou un A-module instable, on constate que $\operatorname{im}(1+\sigma)$ est naturellement isomorphe au quotient de $M \otimes M$ par le sous-objet engendré par les $x \otimes x$, x parcourant M ; il est donc raisonnable de poser $\operatorname{im}(1+\sigma) := \Lambda^2 M$.

On revient à présent sur l'application

$$\Delta^* : \mathrm{H}^* \mathfrak{S}_2 X \to \mathrm{H}^*(\mathrm{B}\mathfrak{S}_2 \times X) = \mathbb{F}_2[u] \otimes \mathrm{H}^* X \qquad .$$

Proposition 2.2.17. *Soit X un espace topologique avec $\mathrm{H}^* X$ de dimension finie en chaque degré ; on a les deux égalités suivantes :*

(a) $\operatorname{im} \Delta^* = \mathrm{R}_1 \mathrm{H}^* X$,

(b) $\ker \Delta^* = \operatorname{im} \mathrm{tr}$.

Démonstration. L'égalité $\Delta^* \mathrm{P}_2 x = \mathrm{St}_1 x$ et le fait que Δ^* est $\mathbb{F}_2[u]$-linéaire montrent que l'on a dans $\mathbb{F}_2[u] \otimes \mathrm{H}^* X$ l'inclusion $\mathrm{R}_1 \mathrm{H}^* X \subset \operatorname{im} \Delta^*$.

Le scholie 2.2.12 et le point (f) de 2.2.15 montrent que les $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels $\mathbb{N}$-gradués sous-jacents à $\mathrm{H}^*\mathfrak{S}_2X/\operatorname{im}\mathrm{tr}$ et $\mathrm{R}_1\mathrm{H}^*X$ sont tous deux isomorphes au $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel $\mathbb{N}$-gradué $\mathbb{F}_2[u]\otimes\Phi\mathrm{H}^*X$. Cette observation implique l'égalité

$$\dim(\mathrm{H}^*\mathfrak{S}_2X/\operatorname{im}\mathrm{tr})^n \;=\; \dim(\mathrm{R}_1\mathrm{H}^*X)^n \qquad ,$$

pour tout n dans $\mathbb{N}$, la notation $(-)^n$ désignant ici l'espace des éléments de degré n d'un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel $\mathbb{N}$-gradué.

L'égalité $\Delta^*(\operatorname{im}\mathrm{tr})=0$ dit que Δ^* se factorise à travers $\mathrm{H}^*\mathfrak{S}_2X/\operatorname{im}\mathrm{tr}$, ce qui compte tenu de l'égalité ci-dessus implique l'inégalité

$$\dim(\operatorname{im}\Delta^*)^n \;\leq\; \dim(\mathrm{R}_1\mathrm{H}^*X)^n \qquad .$$

Les informations ci-dessus permettent de se convaincre que Δ^* induit un isomorphisme de $\mathrm{H}^*\mathfrak{S}_2X/\operatorname{im}\mathrm{tr}$ sur $\mathrm{R}_1\mathrm{H}^*X$, d'où (a) et (b). $\square$

Remarque 2.2.18. La suite exacte de Gysin d'un revêtement double (voir section 3) montre que $\operatorname{im}\mathrm{tr}$ est un $\mathbb{F}_2[u]$-module *via* l'augmentation $\varepsilon : \mathbb{F}_2[u]\to\mathbb{F}_2$.

La proposition 2.2.17 peut se reformuler ainsi :

Scholie 2.2.19. *Soit X un espace topologique avec H^*X de dimension finie en chaque degré ; on a une suite exacte, naturelle en X, de* A- *modules instables*

$$0\to\Lambda^2\mathrm{H}^*X\to\mathrm{H}^*\mathfrak{S}_2X\to\mathrm{R}_1\mathrm{H}^*X\to 0 \qquad ,$$

les deuxième et troisième flèches étant respectivement induites par les homomorphismes $\mathrm{tr}:\mathrm{H}^*X\otimes\mathrm{H}^*X\to\mathrm{H}^*\mathfrak{S}_2X$ *et* $\Delta^*:\mathrm{H}^*\mathfrak{S}_2X\to\mathrm{H}^*\mathrm{B}\mathfrak{S}_2\otimes\mathrm{H}^*X$.

(La notation Λ^2 est introduite en 2.2.16.)

Dans la suite exacte ci-dessus les deux termes de part et d'autre de $\mathrm{H}^*\mathfrak{S}_2X$ s'exprime fonctoriellement en H^*X ; en va montrer qu'il en est de même pour $\mathrm{H}^*\mathfrak{S}_2X$ en précisant l'extension. On considère pour cela le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Lambda^2\mathrm{H}^*X & \longrightarrow & \mathrm{H}^*\mathfrak{S}_2X & \xrightarrow{\Delta^*} & \mathrm{R}_1\mathrm{H}^*X & \longrightarrow & 0\\
 & & {\scriptstyle\mathrm{id}}\big\downarrow & & {\scriptstyle\pi^*}\big\downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \Lambda^2\mathrm{H}^*X & \longrightarrow & (\mathrm{H}^*\otimes\mathrm{H}^*X)^{\mathfrak{S}_2} & \xrightarrow{\nu} & \Phi\mathrm{H}^*X & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

dans lequel :

– Les deux lignes sont exactes.

– La deuxième flèche de la ligne du bas est l'inclusion $\ker(1-\sigma) \hookrightarrow \mathrm{im}(1+\sigma)$.
– La flèche notée π^* est celle induite par l'application $\mathrm{E}\mathfrak{S}_2 \times (X \times X) \to \mathfrak{S}_2 X$.
– La flèche ν est la surjection $\mathrm{H}^0(\mathfrak{S}_2; \mathrm{H}^*X \otimes \mathrm{H}^*X) \to \widehat{\mathrm{H}}^0(\mathfrak{S}_2; \mathrm{H}^*X \otimes \mathrm{H}^*X)$.

Puisque les deux lignes sont exactes on peut compléter ce diagramme commutatif par une flèche, disons $f : \mathrm{R}_1\mathrm{H}^*X \to \Phi\mathrm{H}^*X$, uniquement déterminée. Soient x un élément de H^*X et j un entier naturel, les égalités

$$\Delta^*\mathrm{P}_2 x = \mathrm{St}_1 x \quad , \quad \pi^*(u^j\,\mathrm{P}_2 x) = \begin{cases} x \otimes x & \text{pour } j = 0 \\ 0 & \text{pour } j > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \nu(x \otimes x) = \Phi x$$

entraînent que l'on a

$$f(u^j\,\mathrm{St}_1 x) \;=\; \begin{cases} \Phi x & \text{pour } j = 0, \\ 0 & \text{pour } j > 0. \end{cases}$$

Or on montre (voir par exemple [LZ2, 4.2.6]) qu'il existe une unique transformation naturelle $\rho : \mathrm{R}_1 \to \Phi$ de $\mathcal{U}$-endofoncteurs vérifiant

$$\rho_M(u^j\,\mathrm{St}_1 x) \;=\; \begin{cases} \Phi x & \text{pour } j = 0 \\ 0 & \text{pour } j > 0 \end{cases}$$

pour tout A-module instable M et tout élément x de M ; on constate aussi que ρ s'étend en une transformation naturelle, toujours notée $\rho : \mathrm{R}_1 \to \Phi$, de $\mathcal{K}$-endofoncteurs.

On a donc obtenu le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Lambda^2\mathrm{H}^*X \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{H}^*\mathfrak{S}_2 X \arrow[r, "\Delta^*"] \arrow[d, "\pi^*"'] & \mathrm{R}_1\mathrm{H}^*X \arrow[r] \arrow[d, "\rho"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda^2\mathrm{H}^*X \arrow[r] & (\mathrm{H}^* \otimes \mathrm{H}^*X)^{\mathfrak{S}_2} \arrow[r, "\nu"] & \Phi\mathrm{H}^*X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} .$$

On observe que puisque la flèche verticale de gauche est l'identité, le carré de gauche est cartésien. Cette observation conduit aux définitions ci-après :

Définition 2.2.20. Soit M un A-module instable (resp.une A-algèbre instable) ; on pose

$$\mathfrak{S}_2 M := \lim\left((M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2} \xrightarrow{\nu} \Phi M \xleftarrow{\rho} \mathrm{R}_1 M \right) \qquad ,$$

limite (produit fibré) dans la catégorie $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{K}$). Les deux endofoncteurs $\mathfrak{S}_2 : \mathcal{U} \circlearrowleft$ et $\mathfrak{S}_2 : \mathcal{K} \circlearrowleft$ ainsi définis commutent (en un sens évident) avec le foncteur oubli $\mathcal{K} \to \mathcal{U}$.

Nous avons tout fait pour avoir :

PROPOSITION 2.2.21. *Soit X un espace topologique avec* H^*X *de dimension finie en chaque degré ; on a un isomorphisme de* A*-algèbres instables, et* a fortiori *de* A*-modules instables, naturel en X :*

$$\mathrm{H}^*\mathfrak{S}_2 X \;\cong\; \mathfrak{S}_2\mathrm{H}^*X \qquad .$$

Enoncé qui implique le suivant, concernant la cohomologie modulo 2 des groupes finis :

COROLLAIRE 2.2.22. *Soit G un groupe fini ; on a un isomorphisme de* A*-algèbres instables, et* a fortiori *de* A*-modules instables, naturel en G :*

$$\mathrm{H}^*(\mathfrak{S}_2 \wr G) \;\cong\; \mathfrak{S}_2\mathrm{H}^*G \qquad .$$

Démonstration. Elle résulte des points suivants :

- H^*G est de dimension finie en chaque degré ;
- H^*G est la cohomologie modulo 2 de l'espace classifiant $\mathrm{B}G$;
- l'espace $\mathrm{B}(\mathfrak{S}_2 \wr G)$ coïncide avec la construction quadratique $\mathfrak{S}_2\mathrm{B}G$.

2.3 Retour à $\mathrm{H}^*\mathrm{S}_n$

Soit n un entier naturel ; on rappelle que S_n désigne le 2-Sylow du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ décrit dans la sous-section 2.1 dont nous reprenons les notations.

THÉORÈME 2.3.1. *Le* A*-module instable* $\mathrm{H}^*\mathrm{S}_n$ *est $\mathcal{N}il$-fermé pour tout entier naturel n.*

Démonstration. On a $\mathrm{S}_n = \mathrm{S}_{2^{m_1}} \times \mathrm{S}_{2^{m_1}} \times \ldots \times \mathrm{S}_{2^{m_r}}$ et donc

$$\mathrm{H}^*\mathrm{S}_n \;\cong\; \mathrm{H}^*\mathrm{S}_{2^{m_1}} \otimes \mathrm{H}^*\mathrm{S}_{2^{m_2}} \otimes \ldots \otimes \mathrm{H}^*\mathrm{S}_{2^{m_r}} \qquad .$$

Cet isomorphisme et la proposition 1.11 montrent qu'il suffit de démontrer le théorème 2.3.1 pour $n = 2^m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Comme l'on a $\mathrm{S}_{2^{m+1}} = \mathfrak{S}_2 \wr \mathrm{S}_{2^m}$, le corollaire 2.2.22 dit que l'on a un isomorphisme de A-modules instables $\mathrm{H}^*\mathrm{S}_{2^{m+1}} = \mathfrak{S}_2\mathrm{H}^*\mathrm{S}_{2^m}$; on achève par récurrence sur m à l'aide de la proposition 2.3.3 ci-après ($\mathrm{H}^*\mathrm{S}_{2^0} = \mathbb{F}_2$ est $\mathcal{N}il$-fermé !). □

Corollaire 2.3.2. *L'application de Quillen* $\mathrm{q}_{\mathfrak{S}_n} : \mathrm{H}^*(\mathfrak{S}_n\,\mathbb{F}_2) \to \mathrm{L}(\mathfrak{S}_n)$ *est un isomorphisme pour tout entier naturel* n.

Démonstration. C'est une illustration du corollaire 0.7. □

Proposition 2.3.3. *Soit* M *un* A*-module instable ; si* M *est* $\mathcal{N}il$*-fermé alors il en est de même pour* $\mathfrak{S}_2 M$.

Démonstration. Par définition même de l'endofoncteur $\mathfrak{S}_2 : \mathcal{U} \circlearrowleft$, on a la suite exacte suivante dans la catégorie $\mathcal{U}$:

$$0 \to \mathfrak{S}_2 M \to (M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2} \oplus \mathrm{R}_1 M \to \Phi M \qquad .$$

On invoque le scholie 1.6. :

– Comme M est $\mathcal{N}il$-fermé, il est *a fortiori* réduit, c'est donc aussi le cas pour ΦM.

– Le A-module instable $(M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2}$ est $\mathcal{N}il$-fermé d'après 1.11 et 1.7.

– Le A-module instable $\mathrm{R}_1 M$ est aussi $\mathcal{N}il$-fermé, voir ci-dessous. □

Proposition 2.3.4. *Soit* M *un* A*-module instable ; si* M *est* $\mathcal{N}il$*-fermé alors il en est de même pour* $\mathrm{R}_1 M$.

Démonstration. La condition (*iii*) de 1.13 dit qu'il existe une $\mathcal{U}$-suite exacte de la forme $0 \to M \to I^0 \to I^1$ avec I^0 et I^1 somme directe de cohomologies modulo 2 de 2-groupes abéliens élémentaires. Puisque l'endofonteur R_1 est exact on a encore une $\mathcal{U}$-suite exacte $0 \to \mathrm{R}_1 M \to \mathrm{R}_1 I^0 \to \mathrm{R}_1 I^1$; compte tenu de 1.6 et du fait que R_1 préserve les somme directes, on est ramené à montrer que $\mathrm{R}_1\mathrm{H}^*V$ est $\mathcal{N}il$-fermé pour tout 2-groupe abélien élémentaire V. On montre dans [LZ2] (Lemme 4.4.6.2) que $\mathrm{R}_1\mathrm{H}^*V$ est isomorphe au sous-A-module instable d'invariants $(\mathrm{H}^*(\mathbb{Z}/2 \oplus V))^\Gamma$, Γ désignant le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2 \oplus V)$ constitué des automorphismes qui sont l'identité sur V (Γ agit à droite sur $\mathrm{H}^*(\mathbb{Z}/2 \oplus V)$). On achève en invoquant à nouveau 1.7. □

3 Variations sur la suite exacte de Gysin d'un revêtement double

Soit $p : Y \to X$ un revêtement double ; soit e sa classe caractéristique (e est un élément de $\mathrm{H}^1(X;\mathbb{F}_2) = \mathrm{H}^1(X;\mathbb{Z}/2)$, p est un revêtement galoisien de groupe de Galois $\mathbb{Z}/2$).

Comme précédemment, on abrège ci-après la notation $\mathrm{H}^*(-;\mathbb{F}_2)$ en $\mathrm{H}^*(-)$ ou simplement H^*-.

On considère la longue suite exacte de Gysin

$$\ldots \to \mathrm{H}^{n-1}X \xrightarrow{e\smile} \mathrm{H}^n X \xrightarrow{p^*} \mathrm{H}^n Y \xrightarrow{\mathrm{tr}} \mathrm{H}^n X \xrightarrow{e\smile} \mathrm{H}^{n+1}X \to \ldots .$$

On note respectivement $\operatorname{im} e$ et $\ker e$ l'image et le noyau, dans H^*X, de la multiplication par e.

Proposition 3.1. *Dans H^*X, $\operatorname{im} e$ et $\ker e$ sont stables sous l'action de l'algèbre de Steenrod.*

Démonstration. Dans le cas de $\operatorname{im} e$ ceci résulte immédiatement de la formule

$$\mathrm{Sq}^i(ex) \;=\; e\mathrm{Sq}^i x + e^2\mathrm{Sq}^{i-1}x \qquad .$$

Cette même formule permet de régler le cas de $\ker e$ par récurrence sur i. □

On pose $\operatorname{coker} e := \mathrm{H}^*X/\operatorname{im} e$; d'après ce qui précède $\operatorname{coker} e$ est muni d'une structure canonique de A-module instable.

Scholie 3.2. *La suite exacte courte de Gysin*

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker} e \xrightarrow{p^*} \mathrm{H}^*Y \xrightarrow{\mathrm{tr}} \ker e \longrightarrow 0$$

est une suite exacte dans la catégorie $\mathcal{U}$.

Remarque 3.3. Si H^*X est de dimension finie en chaque degré, alors il en est de même pour H^*Y et les séries de Poincaré de H^*X et $\ker e$ déterminent celle de H^*Y. Précisons : soit $\mathrm{S}(E;t) \in \mathbb{N}[[t]]$ la série de Poincaré d'un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel $\mathbb{N}$-gradué E de dimension finie en chaque degré ; on a :

$$\mathrm{S}(\mathrm{H}^*Y;t) \;=\; (1-t)\mathrm{S}(\mathrm{H}^*X;t) + (1+t)\mathrm{S}(\ker e;t) \qquad .$$

Proposition 3.4. *Si H^*X est $\mathcal{N}il$-fermé alors il en est de même pour $\ker e$.*

Démonstration. Compte tenu de 1.5, il faut montrer que la A-algèbre instable quotient $\mathrm{H}^*X/\ker e$ est réduite, c'est-à-dire que si x est un élément de H^*X avec $ex^2 = 0$ alors on a aussi $ex = 0$. Or on a les implications $ex^2 = 0 \Rightarrow$

$(ex)^2 = 0 \Rightarrow ex = 0$; la première est triviale, la seconde tient à l'hypothèse faite sur H^*X : un A-module instable $\mathcal{N}il$-fermé est *a fortiori* réduit. □

Corollaire 3.5. *Si* H^*X *est* $\mathcal{N}il$*-fermé les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) H^*Y *est* $\mathcal{N}il$*-fermé ;*

(ii) $\operatorname{coker} e$ *est* $\mathcal{N}il$*-fermé.*

Démonstration. Compte tenu du scholie 3.2 et de la proposition ci-dessus, on peut invoquer la proposition 1.8. □

4 Sur les P-A-modules et P-A-algèbres instables

4.1 Les notions de P-A-modules et P-A-algèbres instables

Rappelons que P désigne la cohomologie modulo 2 du groupe $\mathbb{Z}/2$; P est une A-algèbre instable.

Définition 4.1.1. Un P-A-*module instable* est un A-module instable M muni d'une application A-linéaire $\mathrm{P} \otimes M \to M$ qui fait de M un P-module ($\mathbb{N}$-gradué). Un homomorphisme de P-A-modules instables est un homomorphisme de $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels $\mathbb{N}$-gradués à la fois A-linéaire et P-linéaire. La catégorie des P-A-modules instables est notée P-$\mathcal{U}$.

Exemple 4.1.2. Produit tensoriel de P et d'un A-module instable.
Soit M un A-module instable ; le $\mathcal{U}$-morphisme

$$\mathrm{P} \otimes (\mathrm{P} \otimes M) = (\mathrm{P} \otimes \mathrm{P}) \otimes M \xrightarrow{\varphi \otimes 1} \mathrm{P} \otimes M$$

fait de $\mathrm{P} \otimes M$ un P-A-module instable. Le foncteur $\mathcal{U} \to$ P-$\mathcal{U}$ ainsi défini est adjoint à gauche du foncteur oubli P-$\mathcal{U} \to \mathcal{U}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, N) \;=\; \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathrm{P} \otimes M, N)$$

pour tout A-module instable M et tout P-A-module instable N

Définition 4.1.3. Une P-A-*algèbre instable* est une A-algèbre instable K munie d'un $\mathcal{K}$-morphisme $f : \mathrm{P} \to K$. Soient $(K_0 ; f_0)$ et $(K_1 ; f_1)$ deux P-A-algèbres instables ; un homomorphisme de P-A-algèbres instables de $(K_0 ; f_0)$

dans $(K_1\,;f_1)$ est la donnée d'un $\mathcal{K}$-morphisme $g : K_0 \to K_1$ avec $f_1 = g \circ f_0$. La catégorie des P-A-modules instables est notée $\mathrm{P}\backslash\mathcal{K}$.

On dispose d'un "foncteur oubli" évident $\mathrm{P}\backslash\mathcal{K} \to \mathrm{P}\text{-}\mathcal{U}$: la donnée d'un $\mathcal{K}$-morphisme $\mathrm{P} \to K$ fait du A-module instable sous-jacent à K un P-A-module instable.

Plus généralement, on définit, *mutatis mutandis*, les catégories $L\text{-}\mathcal{U}$ et $L\backslash\mathcal{K}$ pour toute A-algèbre instable L.

On précise ci-après la structure de P et on démystifie la catégorie $\mathrm{P}\backslash\mathcal{K}$.

La $\mathbb{F}_2$-algèbre $\mathbb{N}$-graduée sous-jacente à P est isomorphe à l'algèbre de polynômes $\mathbb{F}_2[u]$, u désignant une indéterminée de degré 1. La structure de A-algèbre instable de P est uniquement déterminée par cette information. Rappelons pourquoi. Soient K une A-algèbre instable et x un élément de K^1, les axiomes que vérifie une A-algèbre instable impliquent $\mathrm{Sq}^i x^n = \binom{n}{i} x^{n+i}$ pour tous entiers naturels i et n (formule due à Henri Cartan).

La A-algèbre instable P est en outre un co-groupe dans la catégorie $\mathcal{K}$. En clair, en plus des morphismes $\varphi : \mathrm{P} \otimes \mathrm{P} \to \mathrm{P}$ (produit) et $\eta : \mathbb{F}_2 \to \mathrm{P}$ (unité), on dispose de morphismes $\psi : \mathrm{P} \to \mathrm{P} \otimes \mathrm{P}$ (diagonale) et $\varepsilon : \mathrm{P} \to \mathbb{F}_2$ (augmentation) qui font de la $\mathbb{F}_2$-algèbre $\mathbb{N}$-graduée sous-jacente à P une algèbre de Hopf bicommutative ; la diagonale ψ est le $\mathcal{K}$-morphisme induit par l'homomorphisme de groupes $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2, (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$.

La formule de Cartan montre que l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\mathrm{P}, K) \to K^1 \quad , \quad f \mapsto f(u)$$

est bijective. D'après ce qui précède le foncteur $K \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\mathrm{P}, K)$ peut être vu comme un foncteur à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens et la bijection ci-dessus est un isomorphisme de groupes (naturel en K).

La discussion ci-dessus montre qu'un objet de $\mathrm{P}\backslash\mathcal{K}$ peut être vu comme un couple $(K; e)$, K étant une A-algèbre instable et e un élément de K^1, et qu'un morphisme de $(K; e)$ dans $(K'; e')$ est un $\mathcal{K}$-morphisme $g : K \to K'$ avec $g(e) = e'$.

On revient maintenant sur la donnée initiale de la section 3 :

Soit $p : Y \to X$ un revêtement double ; soit $e \in \mathrm{H}^1 X$ sa classe caractéristique. Compte tenu de ce qui précède, la donnée de $e \in \mathrm{H}^1(X; \mathbb{F}_2)$ est équivalente à celle d'un homomorphisme de A-algèbres instables $\mathrm{P} \to \mathrm{H}^* X$; on observera que si le revêtement p est classifié par une application $c : X \to \mathrm{B}(\mathbb{Z}/2)$

alors cet homomorphisme s'identifie à $c^* : \mathrm{H}^*\mathrm{B}(\mathbb{Z}/2) \to \mathrm{H}^*X$. Reformulons : La donnée de e fait de H^*X une P-A-algèbre instable et du même coup un P-A-module instable.

On dispose d'un foncteur "oubli" évident $\mathrm{P}\text{-}\mathcal{U} \to \mathcal{U}$. Ce foncteur possède une "section" tout aussi évidente :

Définition 4.1.4. Soit M un A-module instable, l'augmentation $\mathrm{P} \to \mathbb{F}_2$ permet de faire de M un P-A-module instable, un tel P-A-module instable, sera dit P-*trivial*. On note $\theta : \mathcal{U} \to \mathrm{P}\text{-}\mathcal{U}$ le foncteur ainsi défini.

Le foncteur θ possède un adjoint à droite défini ci-dessous.

Proposition-Définition 4.1.5. *Soit M un* P-A-*module instable. On pose*

$$\tau M \ := \ \{\, x\,;\, x \in M \ \textit{et}\ ux = 0 \,\} \qquad ;$$

τM est stable sous l'action de A, *c'est le plus grand sous-*P-A-*module instable* P-*trivial de M, on l'appelle la* partie triviale *de M. Le foncteur $M \mapsto \tau M$ sera suivant le contexte considéré comme un endofoncteue de* $\mathrm{P}\text{-}\mathcal{U}$ *ou un foncteur* $\mathrm{P}\text{-}\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ *(adjoint à droite de θ).*

Démonstration. La démonstration de la stabilité de τM sous l'action de A est la même que celle du $\ker e$ de la proposition 3.1. □

4.2 Produit tensoriel de P-A-modules instables

Soient M_1 et M_2 deux P-A-modules instables. Le produit tensoriel $M_1 \otimes M_2$ des deux A-modules instables sous-jacents est naturellement un L-A-module instable avec $L = \mathrm{P} \otimes \mathrm{P}$ et tout aussi naturellement un P-A-module instable grâce au $\mathcal{K}$-morphisme $\psi : \mathrm{P} \to \mathrm{P} \otimes \mathrm{P}$ introduit en 4.1. Le P-A-module instable ainsi défini est appelé le *produit tensoriel de M_1 et M_2*.

Comme la loi de composition interne d'un groupe est associative le produit tensoriel de P-A-modules instables est associatif (en un sens que le lecteur devinera aisément). Soit $(M_1, M_2, \ldots M_r)$ une suite finie de P-A-modules instables ; le P-A-module instable $M_1 \otimes M_2 \otimes \ldots \otimes M_r$ peut être défini *via* le $\mathcal{K}$-morphisme $\psi_r : \mathrm{P} \to \mathrm{P} \otimes \mathrm{P} \otimes \ldots \otimes \mathrm{P}$ induit par l'homomorphisme de groupes

$$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \ldots \times \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2 \ \ , \ \ (x_1, x_2, \ldots, x_r) \mapsto x_1 + x_2 + \ldots + x_r \ \ .$$

4.3 Produit tensoriel sur P de deux P-A-modules instables

On note $\mathcal{E}$ la catégorie des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels $\mathbb{N}$-gradués et P-$\mathcal{E}$ la catégorie des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels $\mathbb{N}$-gradués munis d'une structure de P-module (au sens gradué). Il est clair que l'on dispose d'un foncteur oubli P-$\mathcal{U} \to$ P-$\mathcal{E}$.

En vrac quelques observations et définitions :

(1) Puisque l'algèbre P est commutative, les notions de P-module à gauche et à droite coïncident.

(2) Soient M_1 et M_2 deux objets de P-$\mathcal{E}$; par définition $M_1 \otimes_{\mathrm{P}} M_2$ est le $\mathcal{E}$-objet coégalisateur des deux applications $M_1 \otimes \mathrm{P} \otimes M_2 \to M_1 \otimes M_2$ suivantes :

$$x_1 \otimes a \otimes x_2 \mapsto ax_1 \otimes x_2 \quad \text{et} \quad x_1 \otimes a \otimes x_2 \mapsto x_1 \otimes ax_2 \qquad .$$

(3) Soient M_1 et M_2 deux objets de P-$\mathcal{U}$; puisque les deux application ci-dessus sont A-linéaires, la $\mathcal{E}$-structure de $M_1 \otimes_{\mathrm{P}} M_2$ peut être naturellement enrichie en une $\mathcal{U}$-structure.

(4) A nouveau puisque P est commutative, le foncteur $- \otimes_{\mathrm{P}} -$: P-$\mathcal{E} \times$P-$\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ (resp. $- \otimes_{\mathrm{P}} -$: P-$\mathcal{U} \times$ P-$\mathcal{U} \to \mathcal{U}$) peut être “relevé” en un foncteur à valeurs dans P-$\mathcal{E}$ (resp. P-$\mathcal{U}$).

(5) Le diagramme de foncteurs

$$\begin{array}{ccc}
\text{P-}\mathcal{U} \times \text{P-}\mathcal{U} & \xrightarrow{-\otimes_{\mathrm{P}}-} & \text{P-}\mathcal{U} \\
{\scriptstyle \text{oubli}\times\text{oubli}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \text{oubli}}\big\downarrow \\
\text{P-}\mathcal{E} \times \text{P-}\mathcal{E} & \xrightarrow{-\otimes_{\mathrm{P}}-} & \text{P-}\mathcal{E}
\end{array}$$

est commutatif.

4.4 Foncteurs $\mathrm{Tor}_k^{\mathrm{P}}(-,-)$ dans la catégorie P-$\mathcal{U} \times$ P-$\mathcal{U}$

Quelques observations et définitions (toujours en vrac) :

(1) Les foncteurs P-$\mathcal{U} \to$ P-$\mathcal{U}, M_2 \mapsto M_1 \otimes_{\mathrm{P}} M_2$ et $M_1 \mapsto M_1 \otimes_{\mathrm{P}} M_2$ sont exacts à droite.

(2) La catégorie P-$\mathcal{U}$ a assez de projectifs.

On résume ci-après la théorie des projectifs de P-$\mathcal{U}$ (théorie formelle, on peut y remplacer P par une A-algèbre instable L, avec $L^0 = \mathbb{F}_2$, arbitraire).

Soit n un entier naturel. On note $\mathrm{F}(n)$ le A-module instable librement engendré par un générateur de degré n ; $\mathrm{F}(n)$ représente le foncteur, défini sur $\mathcal{U}$ et à valeurs dans la catégorie des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels, $M \mapsto M^n$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathrm{F}(n), M) = M^n$.

Cette égalité implique la suivante $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathrm{P}\otimes \mathrm{F}(n), M) = M^n$ (voir 4.1.2) qui montre que $\mathrm{P}\otimes \mathrm{F}(n)$ est un projectif de P-$\mathcal{U}$. Soient M un objet de P-$\mathcal{U}$ et B une base du P-module gradué sous-jacent à M, le P-$\mathcal{U}$-homomorphisme $\bigoplus_{x\in B} \mathrm{P}\otimes \mathrm{F}(|x|) \to M$ est par construction un épimorphisme : P-$\mathcal{U}$ a assez de projectifs. Du coup tout projectif de P-$\mathcal{U}$ est facteur direct d'une telle somme directe de $\mathrm{P}\otimes \mathrm{F}(n)$'s ce qui entraîne en particulier qu'il est libre comme P-module (voir 4.6.2). On dispose en fait d'un résultat plus précis :

(3) Tout projectif de P-$\mathcal{U}$ est somme directe de $\mathrm{P}\otimes \mathrm{F}(n)$'s. [7]

(4) Les foncteurs $\mathrm{Tor}_k^{\mathrm{P}}(-,-)$ sont les dérivés à droite des foncteurs produit tensoriel.

(5) Dériver par rapport au premier ou second argument “donne le même résultat”.

(6) Les foncteurs $\mathrm{Tor}_k^{\mathrm{P}}(-,-)$ “commutent” avec le foncteur oubli P-$\mathcal{U} \to$ P-$\mathcal{E}$ (puisque tout projectif de P-$\mathcal{U}$ est libre comme P-module).

(7) On a $\mathrm{Tor}_k^{\mathrm{P}}(M_1, M_2) = 0$ pour $k > 1$ (conséquence de l'observation (6)).

Voici une autre conséquence de l'observation (6)

Proposition 4.4.1. *Soient M_1 et M_2 deux* P-A-*modules instables.*
Si $M_1 \leftarrow C_\bullet$ est une résolution dans la catégorie P-$\mathcal{U}$ *qui est libre comme résolution dans la catégorie* P-$\mathcal{E}$ *alors on a un* P-$\mathcal{U}$-*isomorphisme*

$$\mathrm{Tor}_k^{\mathrm{P}}(M_1, M_2) \;\cong\; \mathrm{H}_k(C_\bullet \otimes_{\mathrm{P}} M_2)$$

Démonstration. Un P-A-module instable qui est libre comme P-module est $-\otimes_{\mathrm{P}} M_2$-acyclique (en fait le seul cas non-trivial est $k = 1$). □

Exemple d'application de la proposition ci-dessus :

Proposition 4.4.2. *Soit M un* P-A-*module instable ; on a un isomorphisme canonique de* P-A-*modules instables*

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{P}}(\mathbb{F}_2, M) \;\cong\; \Sigma\,\tau M \qquad .$$

7. Soit $\widetilde{\mathrm{A}}$ l'idéal d'augmentation de A. Soient M un projectif de P-$\mathcal{U}$, $\bar{\bar{B}}$ une base (homogène) du $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel $\mathbb{N}$-gradué $(M/uM)/\widetilde{\mathrm{A}}(M/uM)$ et B un “relèvement” de $\bar{\bar{B}}$ dans M ; le P-$\mathcal{U}$-homomorphisme $\bigoplus_{x\in B} \mathrm{P}\otimes \mathrm{F}(|x|) \to M$ est un isomorphisme.

Démonstration. On considère l'augmentation $\varepsilon : \mathrm{P} \to \mathbb{F}_2$; on pose $\widetilde{\mathrm{P}} := \ker \varepsilon$ et on note i l'inclusion de $\widetilde{\mathrm{P}}$ dans P. La suite exacte $0 \to \widetilde{\mathrm{P}} \xrightarrow{\mathrm{i}} \mathrm{P} \to \mathbb{F}_2 \to 0$ fournit une résolution de $\mathbb{F}_2$ dans la catégorie P-$\mathcal{U}$ qui est une résolution libre dans la catégorie P-$\mathcal{E}$. Comme $\widetilde{\mathrm{P}}$ est un P-module libre de base $\{u\}$, l'application $M \to \widetilde{\mathrm{P}} \otimes_{\mathrm{P}} M, x \mapsto u \otimes_{\mathrm{P}} x$ est un isomorphisme, de degré 1, de $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels $\mathbb{N}$-gradués. L'application $\mathrm{i} \otimes_{\mathrm{P}} M$ s'identifie à l'application $\widetilde{\mathrm{P}} \otimes_{\mathrm{P}} M \to \mathrm{P} \otimes_{\mathrm{P}} M = M$, $u \otimes_{\mathrm{P}} x \mapsto ux$ et son noyau au sous-P-A-module instable $\widetilde{\mathrm{P}} \otimes_{\mathrm{P}} \tau M$ de $\widetilde{\mathrm{P}} \otimes_{\mathrm{P}} M$. On a un isomorphisme canonique de P-A-modules instables $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{P}}(\mathbb{F}_2, M) \cong \widetilde{\mathrm{P}} \otimes_{\mathrm{P}} \tau M$. Il reste à expliciter la structure de A-module instable de $\widetilde{\mathrm{P}} \otimes_{\mathrm{P}} \tau M$.
Soient x un élément de τM et j un entier naturel ; on a :

$$\mathrm{Sq}^j (u \otimes_{\mathrm{P}} x) \;=\; \sum_{k=0}^{j} \mathrm{Sq}^k u \otimes_{\mathrm{P}} Sq^{j-k} x \qquad .$$

Pour $k \geq 1$ le terme $\mathrm{Sq}^k u \otimes_{\mathrm{P}} Sq^{j-k}x$ est de la forme $uv_k \otimes_{\mathrm{P}} Sq^{j-k}x$ avec $v_k \in \widetilde{\mathrm{P}}$ soit encore $u \otimes_{\mathrm{P}} v_k Sq^{j-k}x$; puisque τM est stable sous l'action de A ce terme est nul. On a donc $\mathrm{Sq}^j (u \otimes_{\mathrm{P}} x) = u \otimes_{\mathrm{P}} \mathrm{Sq}^j x$ formule qui montre que le A-module instable $\widetilde{\mathrm{P}} \otimes_{\mathrm{P}} \tau M$ s'identifie à la suspension $\Sigma\, \tau M$ du A-module instable τM. □

Remarque 4.4.3. Les deux A-modules instables $\ker e$ et $\operatorname{coker} e$ introduits en section 3 s'identifient respectivement à $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} \mathrm{H}^* X$ et $\Sigma^{-1} \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{P}}(\mathbb{F}_2, \mathrm{H}^* X)$. Par exemple la suite exacte de du scholie 3.2 peut être réécrite sous la forme

$$0 \to \mathrm{Tor}_0^{\mathrm{P}}(\mathbb{F}_2, \mathrm{H}^* X) \to \mathrm{H}^* Y \to \Sigma^{-1} \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{P}}(\mathbb{F}_2, \mathrm{H}^* X) \to 0 \qquad .$$

4.5 Changement de paradigme

Proposition 4.5.1. *Soient M_1 et M_2 deux* P-A-*modules instables ; on a un isomorphisme de* A-*modules instables*

$$M_1 \otimes_{\mathrm{P}} M_2 \;\cong\; \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (M_1 \otimes M_2) \qquad ,$$

naturel en M_1 et M_2.
(Le P-A-module instable $M_1 \otimes M_2$ qui apparaît ci-dessus est défini en 4.2).

Démonstration. Soient x_1 un élément de M_1 et x_2 un élément de M_2, par définition même de la structure de P-A-module instable de $M_1 \otimes M_2$ on a $u(x_1 \otimes x_2) = ux_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes ux_2$ ($\psi(u) = u \otimes 1 + 1 \otimes u$) ; la proposition résulte simplement de cette égalité. Précisons un peu :

Soit R le sous-$\mathbb{F}_2$-espace vectoriel $\mathbb{N}$-gradué de $M_1 \otimes M_2$ engendré par les $ux_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes ux_2$, x_1 parcourant M_1 et x_2 parcourant M_2.

– L'égalité $R = u(M_1 \otimes M_2)$ montre que R est stable sous l'action de A et que le A-module instable sous-jacent à $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (M_1 \otimes M_2)$ est le quotient $(M_1 \otimes M_2)/R$.

– On a dans $M_1 \otimes M_2$ la congruence $ux_1 \otimes x_2 \equiv x_1 \otimes ux_2 \pmod R$ et par récurrence $u^n x_1 \otimes x_2 \equiv x_1 \otimes u^n x_2 \pmod R$, pour tout n dans $\mathbb{N}$; R contient donc tous les $u^n x_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes u^n x_2$. Cette observation montre que R est l'image de la différence des deux homomorphismes $M_1 \otimes \mathrm{P} \otimes M_2 \to M_1 \otimes M_2$ qui apparaissent dans la définition de $M_1 \otimes_{\mathrm{P}} M_2$; ceci confirme que R est stable sous l'action de A et montre que le A-module instable sous-jacent à $M_1 \otimes_{\mathrm{P}} M_2$ est aussi le quotient $(M_1 \otimes M_2)/R$. □

Remarque 4.5.2. Les A-modules instables $M_1 \otimes_{\mathrm{P}} M_2$ et $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (M_1 \otimes M_2)$ possèdent tous deux une structure naturelle de P-A-modules instable (voir 4.2). Celle du second est P-triviale (voir 4.1.4), celle du premier ne l'est pas en général (prendre par exemple $M_1 = M_2 = \mathrm{P}$).

COROLLAIRE 4.5.3. *Soient M_1 et M_2 deux* P-A-*modules instables ; on a un isomorphisme de* A-*modules instables*

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{P}}(M_1, M_2) \;\cong\; \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{P}}(\mathbb{F}_2, M_1 \otimes M_2) \qquad ,$$

naturel en M_1 et M_2.

Démonstration. Soit $M_1 \leftarrow C_\bullet$ est une résolution projective dans la catégorie P-$\mathcal{U}$.

LEMME 4.5.4. *Le complexe augmenté $M_1 \otimes M_2 \leftarrow C_\bullet \otimes M_2$ est une résolution de $M_1 \otimes M_2$ dans la catégorie* P-$\mathcal{U}$ *qui est libre dans la catégorie* P-$\mathcal{E}$.

Supposons ce lemme démontré. La proposition 4.4.1 dit que l'on a un isomorphisme de P-A-modules instables $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{P}}(M_1, M_2) \cong \mathrm{H}_1(C_\bullet \otimes_{\mathrm{P}} M_2)$ et la proposition 4.5.1 que l'on a un isomorphisme de A-modules instables $\mathrm{H}_1(C_\bullet \otimes_{\mathrm{P}} M_2) \cong \mathrm{H}_1(\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (C_\bullet \otimes M_2))$. On achève en invoquant à nouveau la proposition 4.4.1. □

Démonstration du lemme 4.5.4. Soit k un entier naturel ; compte tenu du point (3) (ou (2)) de 4.4 on peut supposer que C_k est somme directe de $\mathrm{P} \otimes \mathrm{F}(n)$'s. Il suffit donc de vérifier que que le produit tensoriel de P-A-modules instables $(\mathrm{P} \otimes \mathrm{F}(n)) \otimes M_2$ est un P-module libre. Comme le P-A-module instable $\mathrm{P} \otimes \mathrm{F}(n)$ coïncide avec le produit tensoriel de P-A-modules instables $\mathrm{P} \otimes \theta\mathrm{F}(n)$, on a

$$(\mathrm{P} \otimes \mathrm{F}(n)) \otimes M_2 \;=\; (\mathrm{P} \otimes \theta\mathrm{F}(n)) \otimes M_2 \;\cong\; \mathrm{P} \otimes (\theta\mathrm{F}(n) \otimes M_2) \quad .$$

On conclut à l'aide du lemme suivant :

Lemme 4.5.5. *Soit M un* P-A-*module instable ; les deux produits tensoriels de* P-A-*modules instables* $\mathrm{P} \otimes M$ *et* $\mathrm{P} \otimes \theta\mathcal{O}M$*,* $\mathcal{O}$ *désignant ici le foncteur oubli* $\mathrm{P}\text{-}\mathcal{U} \to \mathcal{U}$*, sont canoniquement isomorphes.*

Démonstration L'argument est classique : on utilise le fait que P est une algèbre de Hopf avec antipode (ici l'identité). L'isomorphisme canonique en question est donné par la composition

$$\mathrm{P} \otimes M \xrightarrow{\psi \otimes 1_M} (\mathrm{P} \otimes \mathrm{P}) \otimes M \xrightarrow{=} \mathrm{P} \otimes (\mathrm{P} \otimes M) \xrightarrow{1_\mathrm{P} \otimes \mathrm{a}} \mathrm{P} \otimes M \quad ,$$

$\mathrm{a} : \mathrm{P} \otimes M \to M$ désignant l'action de P sur M. □

Les énoncés 4.4.2 et 4.5.3 conduisent au lemme suivant que nous utiliserons de façon répétitive par la suite :

Lemme 4.5.6. *Soient* $0 \to M_2 \to M_2' \to M_2'' \to 0$ *une suite exacte de* P-A-*modules instables et* M_1 *un* P-A-*module instable ; si le* A-*module instable sous-jacent à* $M_1 \otimes_\mathrm{P} M_2$ *est réduit alors les suites de* P-A-*modules instables*

$$0 \to M_1 \otimes_\mathrm{P} M_2 \to M_1 \otimes_\mathrm{P} M_2' \to M_1 \otimes_\mathrm{P} M_2'' \to 0$$

et

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^\mathrm{P}(M_1, M_2) \to \mathrm{Tor}_1^\mathrm{P}(M_1, M_2') \to \mathrm{Tor}_1^\mathrm{P}(M_1, M_2'') \to 0$$

sont exactes. On a le même énoncé, mutatis mutandis*, avec le produi tensoriel à droite par* M_1*.*

Démonstration. D'après 4.5.3 et 4.4.2 le A-module instable sous jacent à $\mathrm{Tor}_1^\mathrm{P}(M_1, M_2'')$ est une suspension ; le point (c) de 1.14 dit que le connectant $\partial : \mathrm{Tor}_1^\mathrm{P}(M_1, M_2'') \to M_1 \otimes_\mathrm{P} M_2$ est trivial. □

4.6 Sur les P-A-modules instables qui sont réduits comme A-modules instables

Proposition 4.6.1. *Soit M un* P-A-*module instable tel que le* A-*module instable sous-jacent est réduit.*

(a) *Soient x un élément de M et $n \geq 1$ un entier ; les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $u^n x = 0$ *;*
(ii) $ux = 0$.
(En d'autres termes, τM est la P-*torsion du* P-*module sous-jacent à M.)*

(b) *Le* P-*module sous-jacent à $M/\tau M$ est libre.*

(c) *Le* A*-module instable sous-jacent à* $M/\tau M$ *est réduit.*

Démonstration du point (a). La seule implication à vérifier est $(i) \Rightarrow (ii)$. La formule $\mathrm{Sq}^i u^n x = \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} u^{n+j}\,\mathrm{Sq}^{i-j} x$ montre par récurrence sur l'entier i que l'on a $u^n\,\mathrm{Sq}^i x = 0$ pour tout i, et donc en particulier $u^n\,\mathrm{Sq}_0 x = 0$. On écrit $n = 2m - \delta$ avec $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $\delta \in \{0,1\}$(en d'autres termes, on effectue la division euclidienne de $n+1$ par 2) ; on a par construction $u^{2m}\,\mathrm{Sq}_0 x = 0$ soit encore $\mathrm{Sq}_0(u^m x) = 0$ et donc $u^m x = 0$ puisque M est réduit. Or on constate que l'on a $m < n$ pour $n \neq 1$. □

Remarque. Dans le cas où M est une P-A-algèbre instable, la démonstration est moins alambiquée : $u^n x = 0 \Rightarrow (ux)^n = 0$ et $(ux)^n = 0 \Leftrightarrow ux = 0$ car l'hypothèse "le A-module instable sous-jacent à M est réduit équivaut à l'hypothèse "la $\mathbb{F}_2$-algèbre commutative $\mathbb{N}$-graduée sous-jacente à M est réduite".

Le point (b) est conséquence du point (a) et du lemme 4.6.2 ci-après. □

Démonstration du point (c). Soient x un élément de M et y sa classe dans $M/\tau M$. L'égalité $\mathrm{Sq}_0 y = 0$ équivaut à $u\mathrm{Sq}_0 x = 0$; si cette dernière égalité est satisfaite, on a *a fortiori* $\mathrm{Sq}_0(ux) = 0$ ($\mathrm{Sq}_0(ux) = \mathrm{Sq}_0 u\,\mathrm{Sq}_0 x = u^2\mathrm{Sq}_0 x$), donc $ux = 0$ puisque M est réduit c'est-à-dire $y = 0$. □

Lemme 4.6.2. *Soit R un* P*-espace vectoriel* $\mathbb{N}$*-gradué ; les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
- *(i) R est un* P*-module sans torsion ;*
- *(ii) R est un* P*-module libre.*

Démonstration de $(i) \Rightarrow (ii)$. Soient $\bar{B}$ une base (homogène) du $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel $\mathbb{N}$-gradué $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} R$ et B un relèvement (homogène) de $\bar{B}$ dans R, On montre que B est une base de R, c'est-à-dire que le (P-$\mathcal{E}$)-morphisme canonique $\beta : L := \bigoplus_{x\in B} \mathrm{P}x \to R$ est un isomorphisme. Soit C le conoyau de β ; par construction $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} \beta$ est un isomorphisme, il en résulte $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} C = 0$, le lemme de Nakayama $\mathbb{N}$-gradué (trivial) implique $C = 0$. Soit N le noyau de β ; on considère la (P-$\mathcal{E}$)-suite exacte $0 \to N \to L \to R \to 0$, celle-ci induit une suite exacte

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{P}}(\mathbb{F}_2, R) \to \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} N \to \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} L \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} R \to 0 \quad .$$

On a par hypothèse $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{P}}(\mathbb{F}_2, R) = 0$ (invoquer la (P-$\mathcal{E}$)-version, immédiate, de 4.4.2) d'où $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} N = 0$ et donc $N = 0$. □

La proposition 4.6.3 ci-dessous implique la proposition 4.6.1. Cependant la démonstration de 4.6.3 est plus sophistiquée que celle de 4.6.1 car elle utilise la classification des injectifs de la catégorie P-$\mathcal{U}$.

PROPOSITION 4.6.3. *Soit M un* P-A-*module instable ; les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) M est réduit comme A-*module instable ;*

(ii) M se plonge dans un P-A-*module instable de la forme $\theta J \oplus (\mathrm{P} \otimes I)$ avec I et J deux* A-*modules instables injectifs réduits.*

Démonstration de $(i) \Rightarrow (ii)$. Soit $i : M \to E$ une enveloppe injective de M (dans la catégorie P-$\mathcal{U}$). Soit N le nilradical du A-module instable sous-jacent à E ; on constate que N est stable par multiplication par P, en d'autres termes que N est un sous-objet de E dans la catégorie P-$\mathcal{U}$. Par hypothèse on a $i^{-1}(N) = 0$ donc $N = 0$: le A-module instable sous-jacent à E est réduit.

Soit V un 2-groupe abélien élémentaire, on rappelle ci-dessous la classification des H^*V-$\mathcal{U}$-injectifs (objets injectifs dans la catégorie H^*V-$\mathcal{U}$) obtenue dans [LZ3] :

On exhibe (voir [LZ3, 3.2]) un système de représentants pour les classes d'isomorphisme de H^*V-$\mathcal{U}$-injectifs indécomposables

$$\{\mathrm{E}(V, W, L, n)\}_{(W,L,n)\in\mathcal{W}\times\mathcal{L}\times\mathbb{N}} \qquad ,$$

$\mathcal{W}$ désignant l'ensemble des sous-groupes de V et $\mathcal{L}$ l'ensemble de $\mathcal{U}$-injectifs réduits introduit dans la démonstration de l'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ de 1.12. Il en résulte formellement que pour tout H^*V-$\mathcal{U}$-injectif I il existe une unique famille de cardinaux $(a_{W,L,n})_{(W,L,n)\in\mathcal{W}\times\mathcal{L}\times\mathbb{N}}$ telle que I est isomorphe à la somme directe

$$\bigoplus_{(L,W,n)} \mathrm{E}(V, W, L, n)^{\oplus a_{W,L,n}} \qquad .$$

On constate que le A-module instable sous-jacent à $\mathrm{E}(V, W, L, n)$ est réduit si et seulement si l'on a $n = 0$. On en déduit, en prenant $V = \mathbb{Z}/2$, qu'il existe deux familles de cardinaux $(a_L)_{L\in\mathcal{L}}$ et $(b_L)_{L\in\mathcal{L}}$ telles que le P-A-module instable E est isomorphe à la somme directe de deux termes

$$\theta(\bigoplus_{L\in\mathcal{L}} L^{\oplus a_L}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P} \otimes (\bigoplus_{L\in\mathcal{L}} L^{\oplus b_L}) \qquad .$$

□

Remarque 4.6.4. Soit J un $\mathcal{U}$-injectif réduit, on peut se convaincre *ab initio* de ce que θJ est un (P-$\mathcal{U}$)-injectif à l'aide de 4.4.2 :

Soit M un P-A-module instable ; on a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{P}-\mathcal{U}}(M, \theta J) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} M, J)$. Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une (P-$\mathcal{U}$)-suite exacte. On conclut en appliquant le foncteur exact $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(-, J)$ à la $\mathcal{U}$-suite exacte

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{P}}(\mathbb{F}_2, M'') \to \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} M' \to \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} M \to \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} M'' \to 0$$

et en observant que l'on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{P}}(\mathbb{F}_2, M''), J) = 0$ compte tenu de 4.4.2 et du point (c) de 1.14.

Corollaire 4.6.5. *Soit M un* P-A-*module instable ; les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) M est $\mathcal{N}il$-fermé comme A-*module instable ;*

(ii) il existe une suite exacte $0 \to M \to \theta J^0 \oplus (\mathrm{P} \otimes I^0) \to \theta J^1 \oplus (\mathrm{P} \otimes I^1)$ dans la catégorie P-$\mathcal{U}$ *avec J^0, J^1, I^0 et I^1 des* A-*modules instables injectifs réduits.*

Démonstration de $(i) \Rightarrow (ii)$. Analogue à celle de l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ du corollaire 1.13. □

On ajoute maintenant à la condition (i) de 4.6.3 la condition "M libre comme P-module".

Proposition 4.6.6. *Soit M un* P-A-*module instable ; les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) M est libre comme P-*module et réduit comme* A-*module instable ;*

(ii) M se plonge dans un P-A-*module instable de la forme* $\mathrm{P} \otimes I$ *avec I un* A-*module instable injectif réduit.*

Démonstration de $(i) \Rightarrow (ii)$. Soit $i : M \to E$ une enveloppe injective de M (dans la catégorie P-$\mathcal{U}$). On a vu lors de la démonstration de l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ de 4.6.3 que E est de la forme $\theta J \oplus \mathrm{P} \otimes I$ avec J et I des $\mathcal{U}$-injectifs réduits ; si M est un P-module libre on a $i^{-1}(\theta J) = 0$ et donc $\theta J = 0$. □

Remarque 4.6.7. Soit $p : Y \to X$ un revêtement double ; on rappelle que la donnée de p fait de H^*X un P-A-module instable. L'énoncé 3.5 (reformulé en tenant compte de 4.4.3) montre que si H^*X et $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} \mathrm{H}^*X$ sont $\mathcal{N}il$-fermés alors H^*Y l'est aussi.

Cette remarque conduit à la définition *ad hoc* ci-desous :

Définition 4.6.8. Un P-A-module instable M sera dit P-*$\mathcal{N}il$-fermé* si les A-modules instables sous-jacents à M et $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} M$ sont tous deux $\mathcal{N}il$-fermés.

Nous avons tout fait pour avoir :

Proposition 4.6.9. *Soit $p : Y \to X$ un revêtement double ; si le* P-A-*module instable* H^*X *est* P-$\mathcal{N}il$*-fermé alors le* A-*module instable* H^*Y *est* $\mathcal{N}il$*-fermé.*

Conventions. Soit M un P-A-module instable. Nous dirons que M est réduit (resp. $\mathcal{N}il$-fermé) si le A-module instable sous-jacent à M est réduit (resp. $\mathcal{N}il$-fermé). Nous dirons que M est P-libre si le P-module $\mathbb{N}$-gradué sous-jacent est libre. Ces conventions devraient allèger notre rédaction.

Proposition 4.6.10. *Soient M_1 et M_2 deux* P-A-*modules instables. Si M_1 et M_2 sont* P-$\mathcal{N}il$*-fermés alors il en est de même pour leur produit tensoriel $M_1 \otimes M_2$.*

Démonstration. La proposition 1.11 dit que $M_1 \otimes M_2$ est $\mathcal{N}il$-fermé. Il reste à montrer que $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (M_1 \otimes M_2)$ est aussi $\mathcal{N}il$-fermé, soit encore, compte tenu de 4.5.1 à vérifier l'énoncé suivant :

Proposition 4.6.11. *Soient M_1 et M_2 deux* P-A-*modules instables. Si M_1 et M_2 sont* P-$\mathcal{N}il$*-fermés alors $M_1 \otimes_{\mathrm{P}} M_2$ est* $\mathcal{N}il$*-fermé.*

Evidemment cet énoncé implique le suivant :

Proposition 4.6.12. *Soit M un* P-A-*module instable. Si M est* P-$\mathcal{N}il$*-fermé alors $M \otimes_{\mathrm{P}} M$ est* $\mathcal{N}il$*-fermé.*

Réciproquement 4.6.12 implique 4.6.11 : prendre $M = M_1 \oplus M_2$ dans 4.6.12 et observer que $M_1 \otimes_{\mathrm{P}} M_2$ est facteur direct dans $(M_1 \oplus M_2) \otimes_{\mathrm{P}} (M_1 \oplus M_2)$. Nous choisissons de démontrer 4.6.12 afin de limiter un peu le nombre de notations.

Démonstration de 4.6.12. On pose $K := \tau M$ et $L := M/K$. Puisque M est $\mathcal{N}il$-fermé il est *a fortiori* réduit ; les points (b) et (c) de la proposition 4.6.1 disent respectivement que L est P-libre (d'où le choix de la notation !) et que L est réduit.
La proposition 4.6.3 dit que l'on dispose d'un monomorphisme de P-A-modules instables $M \hookrightarrow \theta J \oplus (P \otimes I)$ avec J et I deux $\mathcal{U}$-injectifs réduits. On note Q le conoyau d'un tel monomorphisme ; on observe que Q est réduit (Proposition 1.5).

Ceci posé, la démonstration de 4.6.12 se décompose en six (petits) pas :

(1) On montre que K est $\mathcal{N}il$-fermé.

On considère la suite exacte dans la catégorie P-$\mathcal{U}$

$$S_{(1)} \qquad 0 \to K \to M \to L \to 0 \qquad ;$$

K est $\mathcal{N}il$-fermé parce que M et L sont respectivement $\mathcal{N}il$-fermé et réduit (invoquer à nouveau la Proposition 1.5). $\square$

(2) On montre que $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} L$ est réduit.

On applique le foncteur $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} -$ à la suite exacte $S_{(1)}$; comme L est P-libre on obtient encore une suite exacte dans la catégorie $\mathcal{U}$:

$$0 \to K \to \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} M \to \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} L \to 0 \qquad .$$

Comme $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} M$ est réduit (puisque $\mathcal{N}il$-fermé) et que K est $\mathcal{N}il$-fermé d'après (1), la longue suite exacte des $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}(\text{nilpotent}, -)$ montre que $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} L$ est réduit. $\square$

(3) On montre que $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} Q$ est réduit.

Par définition de Q on dispose d'une seconde suite exacte dans la catégorie P-$\mathcal{U}$, à savoir

$$S_{(3)} \qquad 0 \to M \to \theta J \oplus (\mathrm{P} \otimes I) \to Q \to 0 \qquad .$$

Puisque $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} M$ est réduit on peut invoquer le lemme 4.5.6 ; on a donc une $\mathcal{U}$-suite exacte :

$$0 \to \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} M \to J \oplus I \to \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} Q \to 0 \qquad .$$

Comme $J \oplus I$ est réduit et que $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} M$ est $\mathcal{N}il$-fermé, $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} Q$ est réduit (même argument que précédemment). $\square$

(4) Soit R un P-A-module instable réduit, on montre que $L \otimes_P R$ est réduit. On en déduit en particulier que $L \otimes_P Q$ et $L \otimes_P M$ sont réduits.

D'après 4.6.3, il existe un monomorphisme de P-A-modules instables

$$i_R : R \to \theta J_R \oplus (\mathrm{P} \otimes I_R) \qquad ,$$

avec J_R et I_R deux $\mathcal{U}$-injectifs réduits. Puisque L est P-libre, $L \otimes_P i_R$ est encore un monomorphisme. Il suffit donc de vérifier que le A-module instable $L \otimes_P (\theta J_R \oplus (\mathrm{P} \otimes I_R))$ est réduit. Or celui-ci est somme directe de deux termes, $(\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} L) \otimes J_R$ et $L \otimes I_R$, qui sont tous deux réduits parce que les A-modules instables $(\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} L)$, J_R, L et I_R le sont (le premier d'après (2)).

(5) Soit R un P-A-module instable tel que R et $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} R$ sont réduits ; on montre que $M \otimes_P R$ est réduit. On en déduit en particulier que $M \otimes_P Q$ et $M \otimes_P M$ sont réduits.

On applique le foncteur $- \otimes_{\mathrm{P}} R$ à la suite exacte $S_{(1)}$. Comme L est P-libre, on obtient une suite exacte

$$0 \to K \otimes (\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} R) \to M \otimes_P R \to L \otimes_P R \to 0 \qquad ;$$

$K \otimes (\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} R)$ est réduit, car K et $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} R$ le sont, et $L \otimes_P R$ est réduit d'après (4) du coup $M \otimes_P R$ est aussi réduit. □

(6) On montre (enfin !) que $M \otimes_P M$ est $\mathcal{N}il$-fermé.

On applique le foncteur $M \otimes_{\mathrm{P}} -$ à la suite exacte $S_{(3)}$. Puisque $M \otimes_{\mathrm{P}} M$ est réduit on peut encre invoquer le lemme 4.5.6 ; on obtient une $\mathcal{U}$-suite exacte

$$0 \to M \otimes_P M \to ((\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} M) \otimes J) \oplus (M \otimes I) \to M \otimes_P Q \to 0 \qquad .$$

On conclut en observant que $(\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} M) \otimes J$ et $M \otimes I$ sont $\mathcal{N}il$-fermés d'après la proposition 1.11 (un $\mathcal{U}$-injectif réduit est $\mathcal{N}il$-fermé !) et que $M \otimes_P Q$ est réduit d'après (5). □□

Complément

Bien que la démonstration de 4.6.12 soit terminée on se propose de faire un pas de plus :

(7) On montre que L est $\mathcal{N}il$-fermé.

Soient $i' : K \to \theta J$ et $i'' : L \to \mathrm{P} \otimes I$ des (P-$\mathcal{U}$)-monomorphismes avec J et I des $\mathcal{U}$-injectif réduits (pour se convaincre de l'existence de i' on peut par exemple invoquer 1.12 et 4.6.4). Un prolongement de i' à M induit un (P-$\mathcal{U}$)-monomorphisme $i : M \to \theta J \oplus (\mathrm{P} \otimes I)$ qui prend place dans le (P-$\mathcal{U}$)-diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "i'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "i"] & L \arrow[r] \arrow[d, "i''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \theta J \arrow[r] \arrow[d] & \theta J \oplus (\mathrm{P} \otimes I) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{P} \otimes I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q' \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & Q'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches horizontales de part et d'autre du terme $\theta J \oplus (\mathrm{P} \otimes I)$ sont l'inclusion et la projection canoniques et les termes Q', Q, Q'' sont les conoyaux respectifs des flèches i', i, i''. Par construction les lignes et les colonnes de ce diagramme sont exactes.

Compte tenu du point (2) de la démonstration de 4.6.12 on peut appliquer le lemme 4.5.6 à la suite exacte $0 \to L \to \mathrm{P} \otimes I \to Q'' \to 0$. Il en résulte en particulier $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{P}}(\mathbb{F}_2, Q'') = 0$ ce qui implique que Q'' est P-libre (voir 4.4.2 et 4.6.2).

L'hypothèse "M est $\mathcal{N}il$-fermé" équivaut à "Q est réduit". Comme Q' est P-trivial (puisque quotient de θJ) et que Q'' est P-libre, on a $Q' \cong \tau Q$ (le foncteur τ est exact à gauche !). Le point (c) de 4.6.1 dit que Q'' est réduit ce qui entraîne que L est $\mathcal{N}il$-fermé. □

Remarque 4.6.13. En général $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} L$ n'est pas $\mathcal{N}il$-fermé. Voir 5.2.13.

5 Sur la cohomologie modulo 2 des groupes alternés

L'objet de cette section est de montrer que la cohomologie modulo 2 d'un 2-sous-groupe de Sylow d'un groupe alterné est $\mathcal{N}il$-fermée.

5.1 Stratégie et énoncés

Soit $n \geq 2$ un entier. On note $\epsilon_n : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}/2$ l'homomorphisme signature dont le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ est le noyau. Il est clair que la restriction de ϵ_n au 2-Sylow S_n (décrit en 2.1) de $\mathfrak{S}_n$ est non-triviale ; on la note toujours $\epsilon_n : \mathrm{S}_n \to \mathbb{Z}/2$. On pose

$$\mathrm{A}_n := \ker(\epsilon_n : \mathrm{S}_n \to \mathbb{Z}/2) \qquad ;$$

A_n est un 2-Sylow de $\mathfrak{A}_n$.

Incidemment une remarque :

Remarque 5.1.1. On constate que l'on a $\mathrm{A}_4 = [\mathfrak{A}_4, \mathfrak{A}_4]$ (l'abélianisé de $\mathfrak{A}_4$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/3$), en d'autres termes que A_4 est le *groupe de Klein* (sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$). Nous adopterons la notation A_4 pour le groupe de Klein dans l'appendice C.

Le résultat que nous avons en vue est donc le suivant :

THÉORÈME 5.1.2. *Le* A*-module instable* $\mathrm{H}^*\mathrm{A}_n$ *est* $\mathcal{N}il$*-fermé pour tout entier* $n \geq 2$.

Compte tenu de 0.7 ce théorème implique :

COROLLAIRE 5.1.3. *L'application de Quillen* $\mathrm{q}_{\mathfrak{A}_n} : \mathrm{H}^*(\mathfrak{A}_n\ \mathbb{F}_2) \to \mathrm{L}(\mathfrak{A}_n)$ *est un isomorphisme pour tout entier* $n \geq 2$.

On en revient maintenant à l'énoncé 5.1.2. L'espace classifiant BA_n a le type d'homotopie du revêtement double de BS_n dont la classe caractéristique est l'élément de $\mathrm{H}^1\mathrm{S}_n := \mathrm{H}^1(\mathrm{S}_n; \mathbb{F}_2) = \mathrm{H}^1(\mathrm{S}_n; \mathbb{Z}/2) = \mathrm{Hom}(\mathrm{S}_n, \mathbb{Z}/2)$ donné par l'homomorphisme $\epsilon_n : \mathrm{S}_n \to \mathbb{Z}/2$.

Notre stratégie pour démontrer 5.1.2 est d'utiliser les observations faites en section 3.

Le $\mathcal{K}$-morphisme $\mathrm{P} = \mathrm{H}^*\mathbb{Z}/2 \to \mathrm{H}^*\mathrm{S}_n$ munit $\mathrm{H}^*\mathrm{S}_n$ d'une structure canonique de P-A-algèbre instable et *a fortiori* de P-A-module instable. Comme l'on sait déjà que le A-module instable $\mathrm{H}^*\mathrm{S}_n$ est $\mathcal{N}il$-fermé (Théorème 2.3.1), l'énoncé 3.5 (et la remarque 4.4.3) montrent que l'énoncé 5.1.2 est équivalent aux suivants :

THÉORÈME 5.1.4. *Le* A*-module instable* $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} \mathrm{H}^*\mathrm{S}_n$ *est* $\mathcal{N}il$*-fermé pour tout entier* $n \geq 2$.

THÉORÈME 5.1.5. *Le* P-A*-module instable* $\mathrm{H}^*\mathrm{S}_n$ *est* P-$\mathcal{N}il$*-fermé pour tout entier* $n \geq 2$.

C'est ce dernier énoncé que l'on va démontrer en remplaçant dans les arguments utilisés en 2.3 les A-modules instables par les P-A-modules instables.

On reprend les notations de 2.1 ; on observera que si n est impair alors on a $\mathrm{S}_n = \mathrm{S}_{n-1}$ si bien que l'on peut supposer n pair et ou encore $m_r \geq 1$. L'isomorphisme de A-modules instables

$$\mathrm{H}^*\mathrm{S}_n \;\cong\; \mathrm{H}^*\mathrm{S}_{2^{m_1}} \otimes \mathrm{H}^*\mathrm{S}_{2^{m_2}} \otimes \ldots \otimes \mathrm{H}^*\mathrm{S}_{2^{m_r}}$$

est en fait un isomorphisme de P-A-modules instables. En effet l'homomorphisme $\epsilon_n : \mathrm{S}_n = \mathrm{S}_{2^{m_1}} \times \mathrm{S}_{2^{m_1}} \times \ldots \times \mathrm{S}_{2^{m_r}} \to \mathbb{Z}/2$ est le composé de l'homomorphisme

$$\epsilon_{2^{m_1}} \times \epsilon_{2^{m_2}} \times \ldots \times \epsilon_{2^{m_r}} : \mathrm{S}_{2^{m_1}} \times \mathrm{S}_{2^{m_1}} \times \ldots \times \mathrm{S}_{2^{m_r}} \to \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \ldots \times \mathbb{Z}/2$$

et de l'homorphisme “addition” $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \ldots \times \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2$.

La proposition 4.6.10 montre donc qu'il suffit de démontrer le théorème 5.1.5 pour $n = 2^m$ avec $m \geq 1$.

5.2 Constructions quadratiques dans les catégories $\mathrm{P}\backslash\mathcal{K}$ et P-$\mathcal{U}$

On rappelle que l'on a $\mathrm{S}_{2^{m+1}} = \mathfrak{S}_2 \wr \mathrm{S}_{2^m} := \mathfrak{S}_2 \rtimes (\mathrm{S}_{2^m} \times \mathrm{S}_{2^m})$, $\mathfrak{S}_2$ agissant sur $\mathrm{S}_{2^m} \times \mathrm{S}_{2^m}$ par l'échange des facteurs) ; la diagonale $\mathrm{S}_{2^m} \to \mathrm{S}_{2^m} \times \mathrm{S}_{2^m}$ induit une inclusion de groupes $\mathfrak{S}_2 \times \mathrm{S}_{2^m} \subset \mathrm{S}_{2^{m+1}}$.

On constate que pour $m \geq 1$ la restriction de $\epsilon_{2^{m+1}}$ à $\mathrm{S}_{2^m} \times \mathrm{S}_{2^m}$ est l'homomorphisme composé

$$\mathrm{S}_{2^m} \times \mathrm{S}_{2^m} \xrightarrow{\epsilon_{2^m} \times \epsilon_{2^m}} \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\text{addition}} \mathbb{Z}/2 \qquad .$$

et que sa restriction à $\mathfrak{S}_2 \times \mathrm{S}_{2^m}$ est triviale.

Il en résulte que l'image de $\epsilon_{2^{m+1}}$ par le $\mathcal{K}$-isomorphisme de 2.2.22

$$\mathrm{H}^*\mathrm{S}_{2^{m+1}} \cong \mathfrak{S}_2\mathrm{H}^*\mathrm{S}_{2^m} := \lim\big(\, (\mathrm{H}^*\mathrm{S}_{2^m} \otimes \mathrm{H}^*\mathrm{S}_{2^m})^{\mathfrak{S}_2} \xrightarrow{\nu} \Phi\mathrm{H}^*\mathrm{S}_{2^m} \xleftarrow{\rho} \mathrm{R}_1\mathrm{H}^*\mathrm{S}_{2^m}\,\big)$$

est le couple $(\epsilon_{2^m} \otimes 1 + 1 \otimes \epsilon_{2^m}, 0)$ de $(\mathrm{H}^*\mathrm{S}_{2^m} \otimes \mathrm{H}^*\mathrm{S}_{2^m})^{\mathfrak{S}_2} \times \mathrm{R}_1\mathrm{H}^*\mathrm{S}_{2^m}$.

L'analyse ci-dessus conduit aux définitions 5.2.2 et 5.2.3 ci-après.

On commence par décrire une variante pour les A-algèbres instables de la définition 4.1.4.

Définition 5.2.1. Soit K une A-algèbre instable, l'homomorphisme $\mathrm{P} \to K$ composé de l'augmentation $\mathrm{P} \to \mathbb{F}_2$ et de l'unité $\mathbb{F}_2 \to K$ permet de faire de K une P-A-algèbre instable, une telle P-A-algèbre instable, sera dit P-*triviale*. On note enore $\theta : \mathcal{K} \to \mathrm{P}\backslash\mathcal{K}$ le foncteur ainsi défini.

Il est clair que les foncteurs $\theta : \mathcal{K} \to \mathrm{P}\backslash\mathcal{K}$ et $\theta : \mathcal{U} \to \mathrm{P}\text{-}\mathcal{U}$ sont en un sens évident "oubli-compatibles".

Définition 5.2.2. Soit $(K; f)$ une P-A-algèbre instable K c'est-à-dire une A-algèbre instable K munie d'un $\mathcal{K}$-morphisme $f : \mathrm{P} \to K$.

On munit la A-algèbre instable $(K \otimes K)^{\mathfrak{S}_2}$ du $\mathcal{K}$-morphisme $\mathrm{P} \to (K \otimes K)^{\mathfrak{S}_2}$ composé de la diagonale $\psi : \mathrm{P} \to (\mathrm{P} \otimes \mathrm{P})^{\mathfrak{S}_2}$ (induite par la loi de groupe de $\mathbb{Z}/2$) et du $\mathcal{K}$-morphisme $(f \otimes f)^{\mathfrak{S}_2}$ induit par f.

On note encore $\nu : (K \otimes K)^{\mathfrak{S}_2} \to \theta\Phi K$ le $\mathrm{P}\backslash\mathcal{K}$-morphisme induit par le $\mathcal{K}$-morphisme ν de 2.2.20 (observer que tout $\mathcal{K}$-morphisme de P dans ΦK est forcément trivial).

On pose

$$\mathfrak{S}_2(K; f) := \lim\big(\, (K \otimes K)^{\mathfrak{S}_2} \xrightarrow{\nu} \theta\Phi K \xleftarrow{\theta\rho} \theta\mathrm{R}_1 K\,\big) \qquad ,$$

limite (produit fibré) dans la catégorie $\mathrm{P}\backslash\mathcal{K}$ (soit $e := f(u)$, nous avons vu en 4.1 que la donnée de e est équivalente à celle de f aussi $\mathfrak{S}_2(K; f)$ peut être aussi notée $\mathfrak{S}_2(K; e)$).

L'endofoncteur $\mathfrak{S}_2 : \mathrm{P}\backslash\mathcal{K} \circlearrowleft$ ainsi défini et l'endofoncteur $\mathfrak{S}_2 : \mathcal{K} \circlearrowleft$ de 2.2.20 commutent (en un sens évident) avec le foncteur oubli $\mathrm{P}\backslash\mathcal{K} \to \mathcal{K}$.

On donne ci-dessous la version "linéaire" de la définition ci-dessus. Au préalable deux observations :

On note $\mathcal{O} : \mathrm{P}\text{-}\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ le foncteur oubli. Soit M un un P-A-module instable.

1) Le $\mathcal{U}$-automorphisme σ, $x \otimes y \mapsto y \otimes x$, définissant l'action de $\mathfrak{S}_2$ sur $\mathcal{O}M \otimes \mathcal{O}M$ est en fait un (P-$\mathcal{U}$)-automorphisme du P-A-module instable $M \otimes M$. Il en résulte que $(M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2}$ est un sous-P-A-module instable de $M \otimes M$.

2) Soit z un élément de $(M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2}$; on constate que uz apartient à l'image de $1 + \sigma$. Le $\mathcal{U}$-morphisme $(\mathcal{O}M \otimes \mathcal{O}M)^{\mathfrak{S}_2} \to \Phi\mathcal{O}M$ de 2.2.20 est donc en fait un (P-$\mathcal{U}$)-morphisme que l'on notera encore $\nu : (M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2} \to \theta\Phi\mathcal{O}M$ (ou ν_M si cette précision peut être utile). On observera incidemment que comme $\Phi\mathcal{O}M$ est nul en degrés impairs toute (P-$\mathcal{U}$)-structure sur $\Phi\mathcal{O}M$ est forcément triviale.

Définition 5.2.3. Soit M un P-A-module instable instable ; on pose

$$\mathfrak{S}_2 M := \lim\left((M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2} \xrightarrow{\nu} \theta\Phi\mathcal{O}M \xleftarrow{\theta\rho} \theta\mathrm{R}_1\mathcal{O}M\right) \qquad ,$$

limite (produit fibré) dans la catégorie P-$\mathcal{U}$.

L'endofoncteur $\mathfrak{S}_2 : \mathrm{P}\text{-}\mathcal{U} \circlearrowleft$ ainsi défini et l'endofoncteur $\mathfrak{S}_2 : \mathcal{U} \circlearrowleft$ de 2.2.20 commutent (en un sens évident) avec le foncteur oubli $\mathcal{O} : \mathrm{P}\text{-}\mathcal{U} \to \mathcal{U}$. De même l'endofoncteur $\mathfrak{S}_2 : \mathrm{P}\backslash\mathcal{K} \circlearrowleft$ et l'endofoncteur $\mathfrak{S}_2 : \mathrm{P}\text{-}\mathcal{U} \circlearrowleft$ commute avec le foncteur oubli $\mathrm{P}\backslash\mathcal{K} \to \mathrm{P}\text{-}\mathcal{U}$.

A nouveau nous avons tout fait pour avoir :

Proposition 5.2.4. *Pour tout entier $m \geq 1$ on a un isomorphisme canonique de* P-A-*algèbres instables et* a fortiori *de* P-A-*modules instables*

$$\mathrm{H}^*\mathrm{S}_{2^{m+1}} \;\cong\; \mathfrak{S}_2\mathrm{H}^*\mathrm{S}_{2^m} \qquad .$$

Disposant de cet isomorphisme on achève la démonstration du théorème 5.1.5 dans le cas $n = 2^m$ par récurrence sur m ($\mathrm{H}^*\mathrm{S}_{2^1} = \mathrm{P}$ est un P-A-module instable P-$\mathcal{N}il$-fermé), à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 5.2.5. *Soit M un* P-A-*module instable ; si M est* P-$\mathcal{N}il$*-fermé alors il en est de même pour $\mathfrak{S}_2 M$.*

Puisque les endofoncteurs $\mathfrak{S}_2 : \text{P-}\mathcal{U} \circlearrowleft$ et $\mathfrak{S}_2 : \mathcal{U} \circlearrowleft$ de 2.2.20 sont "oubli-compatibles", la proposition 2.3.3 dit que le A-module instable $\mathfrak{S}_2 M$ est $\mathcal{N}il$-fermé ; la proposition ci-dessus est donc impliquée par la suivante :

Proposition 5.2.6. *Soit M un* P-A-*module instable ; si M est* P-$\mathcal{N}il$*-fermé alors le* A-*module instable* $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} \mathfrak{S}_2 M$ *est* $\mathcal{N}il$*-fermé.*

Nous allons ramener la démonstration de 5.2.6 à celle de 5.2.11. Les énoncés intermédiaires 5.2.7 et 5.2.8 ne font pas intervenir l'hypothèse "M est P-$\mathcal{N}il$-fermé".

Soit M un P-A-module instable. On a par définition même de la construction quadratique $\mathfrak{S}_2 M$, une suite exacte de P-A-modules instables

$$0 \to \mathfrak{S}_2 M \to (M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2} \oplus \theta \mathrm{R}_1 \mathcal{O} M \to \theta \Phi \mathcal{O} M \to 0$$

(l'avant dernière flèche est surjective parce que, par exemple, le $\mathcal{U}$-morphisme $\mathrm{R}_1 \mathcal{O} M \to \Phi \mathcal{O} M$ est surjectif). En appliquant le foncteur $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} -$ à cette suite exacte on obtient la suite exacte de A-modules instables suivante :

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow \Phi \mathcal{O} M \leftarrow \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2} \oplus \mathrm{R}_1 \mathcal{O} M \leftarrow \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} \mathfrak{S}_2 M \xleftarrow{\partial} \Sigma \Phi \mathcal{O} M \leftarrow \\ \Sigma \tau((M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2}) \oplus \Sigma \mathrm{R}_1 \mathcal{O} M \leftarrow \Sigma \tau(\mathfrak{S}_2 M) \leftarrow 0 \end{aligned}$$

(se rappeler de 4.4.2). Comme l'homomorphisme $\Sigma \mathrm{R}_1 \mathcal{O} M \to \Sigma \Phi \mathcal{O} M$ est surjectif le connectant ∂ qui apparaît ci-dessus est trivial. On dispose donc de deux suites exactes courtes de A-modules instables :

$$(\mathcal{S}_1) \quad 0 \to \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} \mathfrak{S}_2 M \to \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2} \oplus \mathrm{R}_1 \mathcal{O} M \to \Phi \mathcal{O} M \to 0$$

et

$$(\mathcal{S}_2) \qquad 0 \to \tau(\mathfrak{S}_2 M) \to \tau((M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2}) \oplus \mathrm{R}_1 \mathcal{O} M \to \Phi \mathcal{O} M \to 0 \qquad .$$

Nous reviendrons sur $(\mathcal{S}_2)$ dans l'appendice A ; l'exactitude de $(\mathcal{S}_1)$ implique :

Proposition 5.2.7. *Soit M un* P-A-*module instable. Le* A-*module instable* $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} \mathfrak{S}_2 M$ *est naturellement isomorphe à la limite (produit fibré) du* $\mathcal{U}$-*diagramme*

$$\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2} \xrightarrow{\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} \nu} \Phi \mathcal{O} M \xleftarrow{\mathcal{O} \rho} \mathrm{R}_1 \mathcal{O} M \qquad .$$

Comme la flèche $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} \nu$ est surjective (parce que le produit tensoriel $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} -$ préserve les surjections) on a :

Scholie 5.2.8. *Soit M un* P-A-*module instable. On a une $\mathcal{U}$-suite exacte naturelle*

$$0 \to \ker(\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2} \to \Phi\mathcal{O}M) \to \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} \mathfrak{S}_2 M \to \mathrm{R}_1\mathcal{O}M \to 0 \ .$$

Remarque 5.2.9. On peut définir un endofoncteur Φ : P-$\mathcal{U}$ $\circlearrowleft$ de la même façon que l'on a défini l'endofoncteur $\Phi : \mathcal{U} \circlearrowleft$.
Soit M un P-A-module instable ; on pose à nouveau $\Phi M := \widehat{\mathrm{H}}^0(\mathfrak{S}_2; M \otimes M)$. Le P-A-module instable ΦM est P-trivial, en formule $\Phi M = \theta\Phi\mathcal{O}M$. Le $\mathcal{U}$-morphisme $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2} \to \Phi\mathcal{O}M$ est un avatar du P-$\mathcal{U}$-morphisme (entre P-A-modules instables P-triviaux) $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2} \to \Phi M$. Nous privilégierons cet avatar dans la suite de cette section car nous aurons besoin de la notation $\mathcal{O}$ pour un autre foncteur oubli.

Compte tenu de 2.3.4 et 1.8, le scholie 5.2.8 entraîne le suivant :

Scholie 5.2.10. *Soit M un* P-A-*module instable. Si l'on suppose que M est $\mathcal{N}il$-fermé alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) Le A-*module instable* $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} \mathfrak{S}_2 M$ *est $\mathcal{N}il$-fermé.*
(ii) Le A-*module instable* $\ker(\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2} \to \Phi M)$ *est $\mathcal{N}il$-fermé.*

Démontrer la proposition 5.2.6 revient donc à démontrer celle-ci :

Proposition 5.2.11. *Soit M un* P-A-*module instable ; si M est* P-*$\mathcal{N}il$-fermé alors le* A-*module instable*

$$\ker(\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2} \to \Phi M)$$

est $\mathcal{N}il$-fermé.

Remarque 5.2.12. La suite exacte $(\mathcal{S}_1)$ et les propositions 2.3.4 et 1.5 montrent que si M et $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2}$ sont $\mathcal{N}il$-fermés alors $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} \mathfrak{S}_2 M$ l'est aussi (même argument que celui utilisé pour 2.3.3). Hélas il est faux en général que $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2}$ soit $\mathcal{N}il$-fermé si M est P-$\mathcal{N}il$-fermé : voir ci-dessous.

Exemple 5.2.13. On prend $M = \mathrm{H}^*\mathrm{S}_2 = \mathrm{P}$; on constate que l'on a un $\mathcal{U}$-isomorphisme $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (\mathrm{P} \otimes \mathrm{P})^{\mathfrak{S}_2} \cong \Phi\mathrm{P}$ (observer que $(\mathrm{P} \otimes \mathrm{P})^{\mathfrak{S}_2}$ est l'algèbre de polynômes $\mathbb{F}_2[u \otimes 1 + 1 \otimes u, u \otimes u]$) Le A-module instable $\Phi\mathrm{P}$ est réduit mais n'est pas $\mathcal{N}il$-fermé. Il s'agit en fait d'un phénomène général : Soit M

un A-module instable $\mathcal{N}il$-fermé, l'application $\Phi M \to M, \Phi x \mapsto \mathrm{Sq}_0 x$ est un $\mathcal{U}$-monomorphisme dont le conoyau, disons Q, vérifie $\mathrm{Sq}_0 y = 0$ pour tout y dans Q ; si ΦM était $\mathcal{N}il$-fermé alors Q serait réduit(1.5), contradiction ! Cependant on constate également que l'isomorphisme $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (\mathrm{P} \otimes \mathrm{P})^{\mathfrak{S}_2} \cong \Phi\mathrm{P}$ est réalisé par la flèche de gauche de 5.2.7.

En fait cet exemple correspond au premier pas de récurrence de la démonstration du théorème 5.1.5 dans le cas $n = 2^m$: la propriété "$\mathrm{H}^*(\mathrm{S}_2; \mathbb{F}_2)$ est P-$\mathcal{N}il$-fermée" implique la propriété "$\mathrm{H}^*(\mathrm{S}_4; \mathbb{F}_2)$ est P-$\mathcal{N}il$-fermée".

Cet exemple permet aussi de tenir la promesse faite en 4.6.13. Compte tenu de 3.5 (et de la remarque 4.4.3), on sait, sans attendre la démonstration de 5.2.5, que $\mathrm{H}^*\mathrm{S}_4 \cong \mathfrak{S}_2\mathrm{H}^*\mathrm{S}_2 = \mathfrak{S}_2\mathrm{P}$ est P-$\mathcal{N}il$-fermé puisque A_4 est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2)^2$ (voir 5.1.1) ; d'autre part on constate que l'on a $\mathfrak{S}_2\mathrm{P}/\tau\mathfrak{S}_2\mathrm{P} = (\mathrm{P} \otimes \mathrm{P})^{\mathfrak{S}_2}$ (pour une généralisation voir l'appendice A).

Démonstration de la proposition 5.2.11

Cette proposition est au niveau technique le point-clef de cette section ; sa démonstration va nous occuper jusqu'à la fin de celle-ci.

La proposition 4.6.11, la proposition 4.5 et le scholie 1.7 montrent que le A-module instable $(\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (M \otimes M))^{\mathfrak{S}_2}$ est $\mathcal{N}il$-fermé. Notre stratégie de démonstration est de comparer $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2}$ et $(\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (M \otimes M))^{\mathfrak{S}_2}$ (attention au parenthésage !)

Le (P-$\mathcal{U}$)-morphisme $M \otimes M \to \mathrm{F}_2 \otimes_P (M \otimes M)$ induit un (P-$\mathcal{U}$)-diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^0(\mathfrak{S}_2; M \otimes M) & \longrightarrow & \mathrm{H}^0(\mathfrak{S}_2; \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (M \otimes M)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{\mathrm{H}}^0(\mathfrak{S}_2; M \otimes M) & \longrightarrow & \widehat{\mathrm{H}}^0(\mathfrak{S}_2; \mathbb{F}_2 \otimes_P (M \otimes M)) \end{array}$$

dans lequel les P-A-modules instables de droite sont P-triviaux, il induit donc un diagrame commutatif de P-A-modules instables P-triviaux

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} \mathrm{H}^0(\mathfrak{S}_2; M \otimes M) & \longrightarrow & \mathrm{H}^0(\mathfrak{S}_2; \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (M \otimes M)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} \widehat{\mathrm{H}}^0(\mathfrak{S}_2; M \otimes M) & \longrightarrow & \widehat{\mathrm{H}}^0(\mathfrak{S}_2; \mathbb{F}_2 \otimes_P (M \otimes M)) \end{array}$$

que l'on peut considérer comme un $\mathcal{U}$-diagramme commutatif. On allège un peu la notation et on nomme les flèches qui y apparaissent :

$$(\mathcal{D}_M) \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2} & \xrightarrow{\kappa_M} & (\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (M \otimes M))^{\mathfrak{S}_2} \\ {\scriptstyle \nu_M}\downarrow & & {\scriptstyle \widetilde{\nu}_M}\downarrow \\ \Phi M & \xrightarrow{\widehat{\kappa}_M} & \widehat{\Phi} M \end{array} \quad .$$

Archivons la définition de $\widehat{\Phi}M$:

Définition 5.2.14. Soit M un P-A-module instable ; le A-module instable $\widehat{\mathrm{H}}^0(\mathfrak{S}_2;\mathbb{F}_2\otimes_P(M\otimes M))$ est noté $\widehat{\Phi}M$.

La commutativité de $(\mathcal{D}_M)$ fait que κ_M induit un $\mathcal{U}$-morphisme naturel, disons ι_M, de $\ker\nu_M$ sur $\ker\widetilde{\nu}_M$.

Proposition 5.2.15. *Soit M un* P-A-*module instable ; si M est réduit*[8] *alors le $\mathcal{U}$-morphisme naturel*

$$\iota_M : \ker(\mathbb{F}_2\otimes_{\mathrm{P}}(M\otimes M)^{\mathfrak{S}_2}\xrightarrow{\nu_M}\Phi M)\to\ker(\mathbb{F}_2\otimes_{\mathrm{P}}(M\otimes M))^{\mathfrak{S}_2}\xrightarrow{\widetilde{\nu}_M}\widehat{\Phi}M)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. On rappelle que l'on note $\mathcal{E}$ la catégorie des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels $\mathbb{N}$-gradués et P-$\mathcal{E}$ la catégorie des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels $\mathbb{N}$-gradués munis d'une structure de P-module (au sens gradué). On note $\mathcal{O}$: P-$\mathcal{U}\to$ P-$\mathcal{E}$ le foncteur oubli évident. Il est clair qu'il suffit de montrer que le $\mathcal{E}$-morphisme sous-jacent à ι_M est un isomorphisme.

On pose, comme dans la démonstration de 4.6.12, $K=\tau M$ et $L:=M/K$; le point (c) de 4.6.1 dit que L est P-libre ce qui implique que la suite exacte $0\to\mathcal{O}K\to\mathcal{O}M\to\mathcal{O}L\to 0$ est scindable. On peut donc supposer dans la démonstration de la $\mathcal{E}$-version de 5.2.15 que l'on a $\mathcal{O}M=\mathcal{O}K\oplus\mathcal{O}L$, ce que nous ferons ci-après. Dégageons au préalable un énoncé quasiment évident.

Soit $\mathcal{C}$ l'une des deux catégories P-$\mathcal{E}$ ou P-$\mathcal{U}$. Soit M un objet de $\mathcal{C}$. On pose $\Theta(M):=M\otimes M$; $\Theta(M)$ est un $\mathcal{C}$-objet muni d'une action de $\mathfrak{S}_2$. En clair $\Theta(M)$ est muni du $\mathcal{C}$-automorphisme involutif défini par $\sigma(x\otimes y)=y\otimes x$.

Proposition 5.2.16. *Soient M_1 et M_2 deux $\mathcal{C}$-objets ; on a un isomorphisme canonique de $\mathcal{C}$-objets munis d'une action de $\mathfrak{S}_2$:*

$$\Theta(M_1\oplus M_2)\ \cong\ \Theta(M_1)\oplus\Theta(M_2)\oplus((M_1\otimes M_2)\oplus(M_1\otimes M_2))\qquad,$$

l'action de $\mathfrak{S}_2$ sur $(M_1\otimes M_2)\oplus(M_1\otimes M_2)$ étant donnée par l'échange des deux termes $M_1\otimes M_2$.

Démonstration. Le $\mathcal{C}$-objet $\Theta(M)$ est somme directe de trois sous-objets invariants sous l'action de $\mathfrak{S}_2$:

$$\Theta(M_1\oplus M_2)\ =\ \Theta(M_1)\oplus\Theta(M_2)\oplus((M_1\otimes M_2)\oplus(M_2\otimes M_1))\qquad.$$

8. L'hypothèse que M est réduit n'est pas nécessaire, cependant elle est satisfaite dans notre contexte (la démonstration de 5.2.11) et elle simplifiera notre démonstration.

Soit $\phi : M_1 \otimes M_2 \to M_2 \otimes M_1$ le $\mathcal{C}$-isomorphisme défini par $\phi(x_1 \otimes y_2) = y_2 \otimes x_1$.
La matrice du $\mathcal{C}$-automorphisme

$$\sigma : (M_1 \otimes M_2) \oplus (M_2 \otimes M_1) \to (M_1 \otimes M_2) \oplus (M_2 \otimes M_1) \qquad ,$$

la matrice du $\mathcal{C}$-isomorphisme

$$\mathrm{id} \oplus \phi : (M_1 \otimes M_2) \oplus (M_1 \otimes M_2) \to (M_1 \otimes M_2) \oplus (M_2 \otimes M_1)$$

et celle de son inverse (matrices données par la décomposition en somme directe de la source et du but) sont respectivement

$$\begin{bmatrix} 0 & \phi^{-1} \\ \phi & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \phi^{-1} \end{bmatrix} \quad .$$

On conclut en constatant que l'on a l'identité

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \phi^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \phi^{-1} \\ \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad .$$

□

Corollaire 5.2.17. *Le foncteur* $\widehat{\Phi} : M \mapsto \widehat{\mathrm{H}}^0(\mathfrak{S}_2; \mathbb{F}_2 \otimes_P (M \otimes M))$, *défini sur* P-$\mathcal{E}$ *ou* P-$\mathcal{U}$ *et à valeurs dans* $\mathcal{E}$ *ou* $\mathcal{U}$*, est additif.*

Démonstration. On a $\widehat{\mathrm{H}}^0(\mathfrak{S}_2; \Gamma) = 0$ si Γ est un $\mathbb{F}_2[\mathfrak{S}_2]$-module libre. □

On revient maintenant à la démonstration de 5.2.15. Soit M un $\mathcal{C}$-objet, on pose :

– $\mathrm{U}_0(M) := \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2}$, $\mathrm{U}_1(M) := (\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (M \otimes M))^{\mathfrak{S}_2}$;

– $\mathrm{V}_0(M) := \ker(\mathrm{U}_0(M) \to \Phi M)$, $\mathrm{V}_1(M) := \ker(\mathrm{U}_1(M) \to \widehat{\Phi} M)$.

Soit M un P-A-module instable réduit ; on choisit un P-$\mathcal{E}$-isomorphisme $\mathcal{O}M \cong \mathcal{O}K \oplus \mathcal{O}L$. La proposition 5.2.16 implique :

On a, pour $i = 0, 1$, des $\mathcal{E}$-isomorphismes

$$\mathrm{U}_i(\mathcal{O}M) \cong \mathrm{U}_i(\mathcal{O}K) \oplus \mathrm{U}_i(\mathcal{O}L) \oplus \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (\mathcal{O}K \otimes \mathcal{O}L)$$

et le $\mathcal{E}$-morphisme $\mathcal{O}\kappa_M : \mathrm{U}_0(\mathcal{O}M) \to \mathrm{U}_1(\mathcal{O}M)$ s'identifie à la somme directe de $\mathcal{O}\kappa_K$, $\mathcal{O}\kappa_L$ et l'identité.

Le $\mathcal{E}$-morphisme $\mathcal{O}\nu_M : \mathrm{U}_0(\mathcal{O}M) \to \Phi\mathcal{O}M$ (resp. $\mathcal{O}\widetilde{\nu}_M : \mathrm{U}_1(\mathcal{O}M) \to \widehat{\Phi}\mathcal{O}M$) est nul sur $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (\mathcal{O}K \otimes \mathcal{O}L)$ et sa restriction à $\mathrm{U}_0(\mathcal{O}K) \oplus \mathrm{U}_0(\mathcal{O}L)$ (resp. $\mathrm{U}_1(\mathcal{O}K) \oplus \mathrm{U}_1(\mathcal{O}L)$) s'identifie à la somme directe de $\mathcal{O}\nu_K$ et $\mathcal{O}\nu_L$ (resp. $\mathcal{O}\widetilde{\nu}_K$ et $\mathcal{O}\widetilde{\nu}_L$).

Ceci montre que le $\mathcal{E}$-morphisme $\mathcal{O}\iota_M : V_0(\mathcal{O}M) \to V_1(\mathcal{O}M)$ s'identifie à somme directe de $\mathcal{O}\iota_K$ et $\mathcal{O}\iota_L$. Il est évident que ι_K est un isomorphisme car

K est par définition un P-A-module instable P-trivial ; la démonstration de 5.2.15 sera donc achevée une fois démontrée la proposition suivante :

PROPOSITION 5.2.18. *Soit* L *un* P-A-*module instable* P-*libre ; le* $\mathcal{U}$-*morphisme naturel*

$$\iota_L : \ker\big(\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (L \otimes L)^{\mathfrak{S}_2} \xrightarrow{\nu_L} \Phi L\big) \to \ker\big(\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (L \otimes L)\big)^{\mathfrak{S}_2} \xrightarrow{\widetilde{\nu}_L} \widehat{\Phi} L\big)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. On introduit deux complexes de chaînes dans la catégorie P-$\mathcal{U}$, $C_\bullet$ et $D_\bullet$, et un homomorphisme $\gamma : C_\bullet \to D_\bullet$, définis comme suit :

– On pose $C_k := L \otimes L$ pour $k = 0, 1, 2$ et $C_k := 0$ sinon. L'opérateur de bord $\mathrm{d}_k : C_{k+1} \to C_k$ est $1 + \sigma$ pour $k = 0, 1$ (et 0 sinon).

– On pose $D_k := L \otimes L$ pour $k = 0, 1, 2, 3$ et $D_k := 0$ sinon. L'opérateur de bord $\mathrm{d}_k : D_{k+1} \to D_k$ est $1 + \sigma$ pour $k = 0, 1, 2$ (et 0 sinon).

– L'homomorphisme $\gamma_k : C_k \to D_k$ est l'identité de $L \otimes L$ pour $k = 0, 1, 2$ (et 0 sinon).

Le P-A-module instable $L \otimes L$, est libre comme P-module, par exemple parce que $\mathrm{P} \otimes \mathrm{P}$, vu comme un P-module *via* la diagonale $\psi : \mathrm{P} \to \mathrm{P} \otimes \mathrm{P}$, est libre. Comme l'anneau P est principal, on peut appliquer le théorème des coefficients universels (dans sa version fonctorielle). On obtient un $\mathcal{U}$-diagramme commutatif

$$(\mathcal{D}) \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} \mathrm{H}_2 C_\bullet & \longrightarrow & \mathrm{H}_2(\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} C_\bullet) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{P}}(\mathbb{F}_2, \mathrm{H}_1 C_\bullet) & \longrightarrow & 0 \\ & & \gamma \big\downarrow & & \gamma \big\downarrow & & \gamma \big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} \mathrm{H}_2 D_\bullet & \longrightarrow & \mathrm{H}_2(\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} D_\bullet) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{P}}(\mathbb{F}_2, \mathrm{H}_1 D_\bullet) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes.

Pour le confort du lecteur, rappelons comment développer *ab initio* la théorie du théorème des coefficients universels dans le cas qui nous occupe.

Soit $\Gamma_\bullet$ un (P-$\mathcal{U}$)-complexe de chaînes tel que Γ_n est P-libre pour tout n. On considère à nouveau la (P-$\mathcal{U}$)-suite exacte $0 \to \widetilde{\mathrm{P}} \to \mathrm{P} \to \mathbb{F}_2 \to 0$ qui apparaît dans la démonstration de 4.4.2, suite exacte qui fournit une résolution de $\mathbb{F}_2$ dans la catégorie P-$\mathcal{U}$ qui est une résolution libre dans la catégorie P-$\mathcal{E}$. Comme les Γ_n sont P-libres cette suite exacte induit une suite exacte courte de (P-$\mathcal{U}$)-complexes

$$0 \to \widetilde{\mathrm{P}} \otimes_{\mathrm{P}} \Gamma_\bullet \to \Gamma_\bullet \to \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} \Gamma_\bullet \to 0 \qquad ;$$

la longue suite exacte d'homologie associée donne pour tout n une (P-$\mathcal{U}$)-suite exacte

$$\widetilde{\mathrm{P}} \otimes_{\mathrm{P}} \mathrm{H}_n\Gamma_\bullet \to \mathrm{H}_n\Gamma_\bullet \to \mathrm{H}_n(\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} \Gamma_\bullet) \xrightarrow{\partial} \widetilde{\mathrm{P}} \otimes_{\mathrm{P}} \mathrm{H}_{n-1}\Gamma_\bullet \to \mathrm{H}_{n-1}\Gamma_\bullet$$

telle que le conoyau de la première flèche et le noyau de la dernière s'identifient respectivement à $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} \mathrm{H}_n\Gamma_\bullet$ et $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{P}}(\mathbb{F}_2, \mathrm{H}_{n-1}\Gamma_\bullet)$ (invoquer 4.4.1). D'où le théorème des coefficients universels ; la fonctorialité est évidente.

On explicite maintenant le diagramme $(\mathcal{D})$. On observe que l'on a tout fait pour avoir $\mathrm{H}_2(\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} C_\bullet) = (\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (L \otimes L))^{\mathfrak{S}_2}$ et $\mathrm{H}_2(\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} D_\bullet) = \widehat{\Phi}L$, puis on fait les constatations suivantes :

– $\mathrm{H}_2 C_\bullet = \mathrm{H}^0(\mathfrak{S}_2; L \otimes L) = (L \otimes L)^{\mathfrak{S}_2}$;

– $\mathrm{H}_1 C_\bullet = \mathrm{H}_1 D_\bullet = \mathrm{H}_2 D_\bullet = \widehat{\mathrm{H}}^0(\mathfrak{S}_2; L \otimes L) \cong \Phi L$ (voir 5.2.9) ;

– $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{P}}(\mathbb{F}_2, \mathrm{H}_1 C_\bullet) = \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{P}}(\mathbb{F}_2, \mathrm{H}_1 D_\bullet) = \Sigma\Phi L$ (se rappeler que le P-A-module instable ΦL est P-trivial et invoquer 4.4.2).

On en déduit facilement la version explicite du diagramme $(\mathcal{D})$:

$$(\mathcal{D}_L^+) \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (L \otimes L)^{\mathfrak{S}_2} & \xrightarrow{\kappa_L} & (\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (L \otimes L))^{\mathfrak{S}_2} & \longrightarrow & \Sigma\Phi L & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle \nu_L} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{\nu}_L} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \Phi L & \xrightarrow{\widehat{\kappa}_L} & \widehat{\Phi}L & \longrightarrow & \Sigma\Phi L & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(le carré commutatif constitué des flèches κ_L, $\widehat{\kappa}_L$, ν_L et $\widetilde{\nu}_L$ est le diagramme $(\mathcal{D}_L)$ ce qui explique la notation $(\mathcal{D}_L^+)$).

L'exactitude des deux suites horizontales implique que κ_L induit un isomorphisme entre les noyaux des deux flèches verticales de gauche ce qui achève la démonstration de 5.2.18 et donc de 5.2.15. □□

Compte tenu de 5.2.15, démontrer la proposition 5.2.11 revient à démontrer la suivante :

Proposition 5.2.19. *Soit M un* P-A-*module instable ; si M est* P-$\mathcal{N}il$-*fermé alors le* A-*module instable*

$$\ker\left((\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (M \otimes M))^{\mathfrak{S}_2} \to \widehat{\Phi}M \right)$$

est $\mathcal{N}il$-fermé.

Démonstration. Comme $(\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathrm{P}} (M \otimes M))^{\mathfrak{S}_2}$ est $\mathcal{N}il$-fermé il faut montrer que $\widehat{\Phi}M$ est réduit (Proposition 1.5). Or on a :

Lemme 5.2.20. *Soit M un* P-A-*module instable ; si M est réduit alors il en est de même pour $\widehat{\Phi}M$.*

Démonstration. On reprend les notations de la démonstration de 5.2.15 ; on note en outre $i : K \to M$ et $p : M \to L$ l'inclusion et la surjection canoniques (morphismes dans la catégorie P-$\mathcal{U}$). Dans la démonstration de 5.2.15 on a noté $\mathcal{O}$ le foncteur oubli P-$\mathcal{U} \to$ P-$\mathcal{E}$ le foncteur oubli ; on note $\mathcal{O}'$ le foncteur oubli $\mathcal{U} \to \mathcal{E}$. Par définition on a $\mathcal{O}'\widehat{\Phi} = \widehat{\Phi}\mathcal{O}$, $\widehat{\Phi}$ désignant à gauche le foncteur $\widehat{\Phi}$: P-$\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ et à droite le foncteur $\widehat{\Phi}$: P-$\mathcal{E} \to \mathcal{E}$.

Lemme 5.2.21. *Soit M un* P-A-*module instable ; si M est réduit alors la suite de* A-*modules instables*

$$0 \longrightarrow \widehat{\Phi}K \xrightarrow{\widehat{\Phi}i} \widehat{\Phi}M \xrightarrow{\widehat{\Phi}p} \widehat{\Phi}L \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. Soit (S) la (P-$\mathcal{U}$)-suite

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} L \longrightarrow 0$$

(qui est exacte !). Il est clair que la $\mathcal{U}$-suite $\widehat{\Phi}(S)$ est exacte si et seulement la $\mathcal{E}$-suite $\mathcal{O}'\widehat{\Phi}(S) = \widehat{\Phi}\mathcal{O}(S)$ est exacte. La $\mathcal{E}$-suite $\widehat{\Phi}\mathcal{O}(S)$ est exacte parce que le foncteur $\widehat{\Phi}$: P-$\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est additif et que la (P-$\mathcal{E}$)-suite $\mathcal{O}(S)$ est une suite exacte scindable (voir par exemple [Par, 4.6, Theorem 1]). $\square$

Comme K est P-trivial, $\widehat{\Phi}K$ s'identifie à ΦK et est donc réduit ; du coup pour montrer que $\widehat{\Phi}M$ est réduit il suffit de montrer que $\widehat{\Phi}L$ est réduit.

Lemme 5.2.22. *Soit M un* P-A-*module instable ; si M est réduit alors il en est de même pour $\widehat{\Phi}L$ (avec $L := M/\tau M$).*

Démonstration. Il découle de 4.5.1 que le A-module instable $\widehat{\Phi}L$ est sous-jacent au P-A-module instable $\widehat{\mathrm{H}}^0(\mathfrak{S}_2; L \otimes_{\mathrm{P}} L)$, $\mathfrak{S}_2$ agissant sur $L \otimes_{\mathrm{P}} L$ par “échange des facteurs” ; ce point de vue nous sera commode ci-après.

La proposition 4.6.6 dit qu'il existe un (P-$\mathcal{U}$)-monomorphisme $e : L \to \mathrm{P} \otimes I$ avec I un $\mathcal{U}$-injectif réduit. En utilisant cette information et la “fonctorialité en L” de la $\mathcal{U}$-suite exacte

$$(\mathcal{S}_L) \qquad 0 \longrightarrow \Phi L \xrightarrow{\widehat{\kappa}_L} \widehat{\Phi}L \xrightarrow{\partial_L} \Sigma\Phi L \longrightarrow 0$$

(la seconde ligne du diagramme $(\mathcal{D}_L^+)$, l'introduction de la notation ∂_L est transparente), on obtient un $\mathcal{U}$-diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Phi L & \xrightarrow{\widehat{\kappa}_L} & \widehat{\Phi}L & \xrightarrow{\partial_L} & \Sigma\Phi L & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi e} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \widehat{\Phi}e} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Sigma\Phi e} & & \\
0 & \longrightarrow & \Phi(\mathrm{P} \otimes I) & \xrightarrow{\widehat{\kappa}_{\mathrm{P}\otimes I}} & \widehat{\Phi}(\mathrm{P} \otimes I) & \xrightarrow{\partial_{\mathrm{P}\otimes I}} & \Sigma\Phi(\mathrm{P} \otimes I) & \longrightarrow & 0
\end{array} \quad .$$

Puisque Φe et $\Sigma\Phi e$ sont injectifs il en est de même pour $\widehat{\Phi}e$. On constate que $\widehat{\Phi}(\mathrm{P}\otimes I)$ est isomorphe à $\mathrm{P}\otimes\Phi I$; puisque $\mathrm{P}\otimes\Phi I$ est réduit il en est de même pour $\widehat{\Phi}L$. □□

COMPLÉMENT

On démystifie ci-dessous le P-A-module instable $\widehat{\Phi}L$ (et la suite exacte $(\mathcal{S}_L)$).

L'application $\Phi\mathrm{P}\to\mathrm{P}, x\mapsto x^2$ est un $\mathcal{K}$-morphisme (on peut remplacer dans cette assertion P par une A-algèbre instable arbitraire) ; ce $\mathcal{K}$-morphisme est injectif, il permet d'identifier $\Phi\mathrm{P}$ avec une sous-A-algèbre instable de P. Un P-A-module instable est donc naturellement un ΦP-A-module instable et l'endofoncteur $\Phi:\mathcal{U}\circlearrowleft$ induit un foncteur P-$\mathcal{U}\to\Phi$P-$\mathcal{U}$ que l'on notera encore Φ.

LEMME 5.2.23. *Le $\mathcal{U}$-morphisme $\widehat{\kappa}_L:\Phi L\to\widehat{\Phi}L$ est un $(\Phi\mathrm{P}\text{-}\mathcal{U})$-morphisme*

Démonstration. Par définition $\widehat{\kappa}_L$ est le monomorphisme $\mathbb{F}_2\otimes_{\mathrm{P}}\mathrm{H}_2\,D_\bullet\to\mathrm{H}_2(\mathbb{F}_2\otimes_{\mathrm{P}}D_\bullet)$; comme l'on a $\mathrm{H}_2\,D_\bullet=\Phi L$ et que le P-A-module instable ΦL est forcément P-trivial on a $\mathbb{F}_2\otimes_{\mathrm{P}}\mathrm{H}_2\,D_\bullet\cong\mathrm{H}_2\,D_\bullet$, si bien que $\widehat{\kappa}_L$ s'identifie aussi au morphisme $\mathrm{H}_2\,D_\bullet\to\mathrm{H}_2(\mathbb{F}_2\otimes_{\mathrm{P}}D_\bullet)$. Rappelons que le complexe $\mathbb{F}_2\otimes_{\mathrm{P}}D_\bullet$ peut être vu comme le (P-$\mathcal{U}$)-complexe

$$L\otimes_{\mathrm{P}}L\xleftarrow{1+\sigma}L\otimes_{\mathrm{P}}L\xleftarrow{1+\sigma}L\otimes_{\mathrm{P}}L\xleftarrow{1+\sigma}L\otimes_{\mathrm{P}}L\leftarrow 0\leftarrow 0\ldots$$

(compte tenu de 4.5.1). Soit x un élément de L, Φx est représenté par le cycle $x\otimes x$ de $\mathrm{Z}_2\,\mathrm{D}_\bullet$ dont l'image dans $\mathrm{Z}_2(\mathbb{F}_2\otimes_P\mathrm{D}_\bullet)$ est le cycle $x\otimes_{\mathrm{P}}x$. Les égalités $\Phi u\Phi x=\Phi(ux)$ et $ux\otimes_{\mathrm{P}}ux=u^2(x\otimes_{\mathrm{P}}x)$ permettent de conclure □

LEMME 5.2.24. *Le $\mathcal{U}$-morphisme $\partial_L:\widehat{\Phi}L\to\Sigma\Phi L$ est un $(\Phi\mathrm{P}\text{-}\mathcal{U})$-morphisme*

Démonstration. Par définition, le $\mathcal{U}$-morphisme $\partial_L:\widehat{\Phi}L\to\Sigma\Phi L$ est induit par le connectant $\partial:\mathrm{H}_2(\mathbb{F}_2\otimes_{\mathrm{P}}D_\bullet)\to\widetilde{\mathrm{P}}\otimes_{\mathrm{P}}\mathrm{H}_1D_\bullet$ associée à la suite exacte courte de (P-$\mathcal{U}$)-complexes $0\to\widetilde{\mathrm{P}}\otimes_{\mathrm{P}}D_\bullet\to D_\bullet\to\mathbb{F}_2\otimes_{\mathrm{P}}D_\bullet\to 0$.

Soit B une base (homogène) de L en tant que P-$\mathbb{F}_2$-espace vectoriel $\mathbb{N}$-gradué ; $B\times B$ est une base du $(\mathrm{P}\otimes\mathrm{P})$-$\mathbb{F}_2$-ev $\mathbb{N}$-gradué $L\otimes L$ et $\{x\otimes_P y;\{x,y)\in B\times B\}$ est une base du P-$\mathbb{F}_2$-ev $\mathbb{N}$-gradué $L\otimes_{\mathrm{P}}L=\mathbb{F}_2\otimes_{\mathrm{P}}D_\bullet$. On fait les constatations suivantes :

– $\{x\otimes_P x;x\in B\}\coprod\{x\otimes_P y:\{x,y\}\in\mathcal{P}_2(B)\}$ ($\mathcal{P}_2(B)$ désignant l'ensemble des parties à deux éléments de B) est une base du P-$\mathbb{F}_2$-ev $\mathbb{N}$-gradué $\mathrm{Z}_2(\mathbb{F}_2\otimes_P\mathrm{D}_\bullet)$;

– $\{x\otimes_P y:\{x,y\}\in\mathcal{P}_2(B)\}$ est une base du P-$\mathbb{F}_2$-ev $\mathbb{N}$-gradué $\mathrm{B}_2(\mathbb{F}_2\otimes_P\mathrm{D}_\bullet)$.

Il en résulte que les classes des cycles $x\otimes_P x$, x parcourant B, constituent une base du P-$\mathbb{F}_2$-ev $\mathbb{N}$-gradué $\mathrm{H}_2(\mathbb{F}_2\otimes_P\mathrm{D}_\bullet)=:\widehat{\Phi}L$.

Soit x un élément de B ; on note $[x\otimes_P x]$ dans $\mathrm{H}_2(\mathbb{F}_2\otimes_P\mathrm{D}_\bullet)$. du cycle $x\otimes_P x$. Soit n un entier naturel ; si n est pair on a $\partial_L(u^n[x\otimes_P x])=0$ pour des raisons de degré, on vérifie ci-après, par un *diagram chasing* (fastidieux !), que l'on a $\partial_L(u^{2m+1}[x\otimes_P x])=\Sigma\Phi(u^m x)$, égalité dont le lemme découle :

– Le cycle $u^{2m+1}(x\otimes_{\mathrm{P}}x)=u^{m+1}x\otimes_{\mathrm{P}}u^m x$ est l'image par le morphisme $L\otimes L=:D_2\to\mathbb{F}_2\otimes_{\mathrm{P}}D_2:=L\otimes_{\mathrm{P}}L$ de l'élément $u^{m+1}x\otimes u^m x$;

– l'image par l'opérateur de bord $D_2 \to D_1 := L \otimes L$ de $u^{m+1}x \otimes u^m x$ est le cycle $u^{m+1}x \otimes u^m x + u^m x \otimes u^{m+1}x = u.(u^m x \otimes u^m x)$ (par définition de la structure de P-A-module instable de $L \otimes L$) ;

– $u.(u^m x \otimes u^m x)$ est l'image par le morphisme $\widetilde{\mathrm{P}} \otimes_{\mathrm{P}} D_1 \to D_1$ du cycle $u \otimes_{\mathrm{P}} (u^m x \otimes u^m x)$;

– la classe du cycle $u \otimes_{\mathrm{P}} (u^m x \otimes u^m x)$ dans $\mathrm{H}_1(\widetilde{\mathrm{P}} \otimes_{\mathrm{P}} D_\bullet) = \widetilde{\mathrm{P}} \otimes_{\mathrm{P}} \mathrm{H}_1 D_\bullet = \widetilde{\mathrm{P}} \otimes_{\mathrm{P}} \Phi L$ est $u \otimes_{\mathrm{P}} \Phi(u^m x)$.

On note $\text{e-}\widehat{\kappa}_L : \mathrm{P} \otimes_{\Phi\mathrm{P}} \Phi L \to \widehat{\Phi}L$ le $(\mathrm{P}\text{-}\mathcal{U})$-morphisme obtenu par extension des scalaires à partir du $(\Phi\mathrm{P}\text{-}\mathcal{U})$-morphisme $\widehat{\kappa}_L$.

Proposition 5.2.25. *Le* $(\mathrm{P}\text{-}\mathcal{U})$*-morphisme* $\text{e-}\widehat{\kappa}_L : \mathrm{P} \otimes_{\Phi\mathrm{P}} \Phi L \to \widehat{\Phi}L$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. On note $\mathrm{d} : \mathrm{P} \to \Sigma\mathrm{P}$ le $\mathcal{U}$-morphisme composé de la diagonale $\psi : \mathrm{P} \to \mathrm{P} \otimes \mathrm{P}$ et du produit tensoriel $\mathrm{id} \otimes \mathrm{j} : \mathrm{P} \otimes \mathrm{P} \to \mathrm{P} \otimes \Sigma\mathbb{F}_2 = \Sigma\mathrm{P}$, j désignant l'unique application non triviale de P dans $\Sigma\mathbb{F}_2$ [9] On constate que d est un $(\Phi\mathrm{P}\text{-}\mathcal{U})$-morphisme [10] et que le noyau et l'image de d sont respectivement $\Phi\mathrm{P}$ et $\Sigma\Phi\mathrm{P}$; on dispose donc d'une $(\Phi\mathrm{P}\text{-}\mathcal{U})$-suite exacte "canonique" :

$$(\mathcal{T}) \qquad 0 \to \Phi\mathrm{P} \to \mathrm{P} \to \Sigma\Phi\mathrm{P} \to 0 \qquad .$$

Comme ΦL est un $\Phi\mathrm{P}$-module libre la $(\Phi\mathrm{P}\text{-}\mathcal{U})$-suite $(\mathcal{T}) \otimes_{\Phi\mathrm{P}} \Phi L$, à savoir

$$0 \to \Phi L \to \mathrm{P} \otimes_{\Phi\mathrm{P}} \Phi L \to \Sigma\Phi L \to 0 \qquad ,$$

est encore exacte. On considère le $(\Phi\mathrm{P}\text{-}\mathcal{U})$-diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Phi L & \longrightarrow & \mathrm{P} \otimes_{\Phi\mathrm{P}} \Phi L & \longrightarrow & \Sigma\Phi L & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{e-}\widehat{\kappa}_L} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\
0 & \longrightarrow & \Phi L & \xrightarrow{\widehat{\kappa}_L} & \widehat{\Phi}L & \xrightarrow{\partial_L} & \Sigma\Phi L & \longrightarrow & 0
\end{array} \quad .$$

Le carré de gauche est commutatif par définition même de $\text{e-}\widehat{\kappa}_L$. Les calculs effectués lors des démonstrations de 5.2.23 et 5.2.24 montrent que le carré de droite l'est aussi. Précisons un peu.

Soit x un élément de B (base homogène du $\mathbb{F}_2$-ev gradué L). On a montré lors de la démonstration de 5.2.23 l'égalité $\widehat{\kappa}_L(\Phi x) = [x \otimes_{\mathrm{P}} x]$, d'où, puisque $\text{e-}\widehat{\kappa}_L$ est P-linéaire, l'égalité $\text{e-}\widehat{\kappa}_L(u^{2m+1} \otimes_{\Phi\mathrm{P}} \Phi x) = u^{2m+1}[x \otimes_{\mathrm{P}} x]$ et, compte tenu de ce que l'on vu lors de la démonstration de 5.2.24, l'égalité $(\partial_L \circ \text{e-}\widehat{\kappa}_L)(u^{2m+1} \otimes_{\Phi\mathrm{P}} \Phi x) = \Sigma\Phi(u^m x)$. On conclut en observant que l'égalité $\mathrm{d}(u^{2m+1}) = \Sigma u^{2m}$ implique que l'image de $u^{2m+1} \otimes_{\Phi\mathrm{P}} \Phi x)$ par le morphisme $\mathrm{P} \otimes_{\Phi\mathrm{P}} \Phi L \to \Sigma\Phi L$ est aussi $\Sigma\Phi(u^m x)$.

9. L'application d est un avatar de la différentielle de Kähler $\mathbb{F}_2[u] \to \Omega_{\mathbb{F}_2[u]/\mathbb{F}_2}$.
10. L'endofoncteur $\Sigma : \mathcal{U} \circlearrowleft$ induit un endofoncteur $\Sigma : \Phi\mathrm{P}\text{-}\mathcal{U} \circlearrowleft$.

La commutativité du diagramme ci-dessus, dont les lignes sont exactes, entraîne que e-$\widehat{\kappa}_L$ est un isomorphisme. $\square$

6 Sur la cohomologie modulo 2 des groupes de Coxeter finis

Théorème 6.1. *L'application de Quillen pour la cohomologie modulo* 2 *d'un groupe de Coxeter fini est un isomorphime.*

L'énoncé ci-desus est conséquence de l'énoncé suivant, d'apparence technique mais en fait plus fort (voir 0.7) :

Théorème 6.2. *La cohomologie modulo* 2 *d'un* 2*-Sylow d'un groupe de Coxeter fini est $\mathcal{N}il$-fermée.*

Démonstration. Le cas des groupes diédraux doit être traité séparément, voir Appendice B. On passe ensuite en revue la liste des groupes de Coxeter finis [Bo, Chap. VI, §4] et on constate que leur 2-Sylow sont produits de 2-Sylow de groupes symétriques ou alternés.

(1) Le groupe $\mathrm{W}(\mathbf{A}_n)$ $(n \geq 1)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n+1}$.

(2) Les 2-Sylow de $\mathrm{W}(\mathbf{B}_n)$ $(n \geq 2)$ et $\mathfrak{S}_{2n}$ sont isomorphes ($\mathrm{W}(\mathbf{B}_n)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_n \wr \{\pm 1\} = \mathfrak{S}_n \wr \mathfrak{S}_2$ qui s'identifie à un sous-groupe d'indice impair de $\mathfrak{S}_{2n}$ (utiliser 2.1.1)).

(3) Les 2-Sylow de $\mathrm{W}(\mathbf{D}_n)$ $(n \geq 3)$ et $\mathfrak{A}_{2n}$ sont isomorphes ($\mathrm{W}(\mathbf{D}_n)$ est isomorphe au noyau de l'homomorphisme composé $\mathfrak{S}_n \wr \mathfrak{S}_2 \hookrightarrow \mathfrak{S}_{2n} \xrightarrow{\epsilon_{2n}} \mathbb{Z}/2$ qui s'identifie à un sous-groupe d'indice impair de $\mathfrak{A}_{2n}$).

(4) Les 2-Sylow de $\mathrm{W}(\mathbf{E}_8)$ et $\mathfrak{A}_{16}$ sont isomorphes ($\mathrm{W}(\mathbf{D}_8)$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{W}(\mathbf{E}_8)$ d'indice 135).

(5) Les 2-Sylow de $\mathrm{W}(\mathbf{E}_7)$ et $\mathfrak{A}_{12} \times \mathfrak{S}_2$ sont isomorphes ($\mathrm{W}(\mathbf{E}_7)$ contient un sous-groupe isomorphe à $\mathrm{W}(\mathbf{D}_6) \times \mathfrak{S}_2$, d'indice 63).

(6) Les 2-Sylow de $\mathrm{W}(\mathbf{E}_6)$ et $\mathfrak{A}_{10}$ sont isomorphes ($\mathrm{W}(\mathrm{E}_6)$ contient un sous-groupe isomorphe à $\mathrm{W}(\mathbf{D}_5)$, d'indice 27).

(7) Les 2-Sylow de $\mathrm{W}(\mathbf{F}_4)$ et $\mathfrak{S}_8$ sont isomorphes ($\mathrm{W}(\mathbf{F}_4)$ contient un sous-groupe d'indice 3 isomorphe $\mathfrak{S}_4 \wr \{\pm 1\} = \mathfrak{S}_4 \wr \mathfrak{S}_2$).

(8) Le 2-Sylow de $\mathrm{W}(\mathbf{G}_2)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$.

(9) Le groupe $\mathrm{W}(\mathbf{H}_3)$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_5 \times \mathfrak{S}_2$.

(9) Les 2-Sylow de $\mathrm{W}(\mathbf{H}_4)$ et $\mathfrak{A}_8$ sont isomorphes (voir Appendice C).

Appendices

A Sur la série de Poincaré de $\mathrm{H}^*\mathrm{A}_{2^m}$

On se propose dans cet appendice de décrire une méthode de calcul par récurrence sur m de la série de Poincaré de $\mathrm{H}^*\mathrm{A}_{2^m}$ en utilisant la formule de la remarque 3.3.

Cette formule se spécialise de la façon suivante :

$$\mathrm{S}(\mathrm{H}^*\mathrm{A}_{2^m};t) \;=\; (1-t)\,\mathrm{S}(\mathrm{H}^*\mathrm{S}_{2^m};t) + (1+t)\,\mathrm{S}(\tau\mathrm{H}^*\mathrm{S}_{2^m};t)$$

(on rappelle que la série de Poincaré d'un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel $\mathbb{N}$-gradué E de dimension finie en chaque degré est notée $\mathrm{S}(E;t)$).

Le calcul de $\mathrm{S}(\mathrm{H}^*\mathrm{A}_{2^m};t)$ se fait par récurrence sur m en utilisant la proposition ci-dessous :

Proposition A.1. *Soit M un* A*-module instable avec* $\dim_{\mathbb{F}_2} M^n < \infty$ *pour tout n ; on a :*

$$\mathrm{S}(\mathfrak{S}_2M;t) \;=\; \frac{1}{2}\,(\,\mathrm{S}(M;t)^2 + \mathrm{S}(M;t^2)\,) + \frac{t}{1-t}\,\mathrm{S}(M;t^2) \qquad .$$

Démonstration. On considère la $\mathcal{U}$-suite exacte donnée par la définition du A-module instable $\mathfrak{S}_2M$:

$$0 \to \mathfrak{S}_2M \to (M\otimes M)^{\mathfrak{S}_2} \oplus \mathrm{R}_1M \to \Phi M \to 0$$

et on utilise :
– le lemme A.2 ci-après, dont la démonstration est laissée au lecteur ;
– le $\mathcal{E}$-isomorphisme $\mathrm{R}_1M \cong \Phi M$ du point (f) de 2.2.15 ;
– l'égalité $\mathrm{S}(\Phi M;t) = \mathrm{S}(M;t^2)$. □

Lemme A.2. *Soient k un corps et E un k-espace vectoriel $\mathbb{N}$-gradué avec $\dim_k M^n < \infty$ pour tout n. Soit $S(t)$ la série de Poincaré de E, alors la série de Poincaré de $(E \otimes E)^{\mathfrak{S}_2}$ est $(S(t)^2 + S(t^2))/2$.*

Le calcul de $\mathrm{S}(\tau \mathrm{H}^*\mathrm{S}_{2^m}; t)$ se fait par récurrence sur m en utilisant celui de $\mathrm{S}(\mathrm{H}^*\mathrm{S}_{2^m}; t)$, le lemme A.2 et la proposition ci-dessous :

Proposition A.3. *Soit M un* P-A-*module instable ; si M est réduit alors on a un isomorphisme (canonique) de* P-A-*modules instables*

$$\mathfrak{S}_2 M / \tau \mathfrak{S}_2 M \;\cong\; (M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2} / (\tau M \otimes \tau M)^{\mathfrak{S}_2} \qquad .$$

Démonstration. On considère la (P-$\mathcal{U}$)-suite exacte donnée par la définition du P-A-module instable $\mathfrak{S}_2 M$:

$$0 \to \mathfrak{S}_2 M \to (M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2} \oplus \theta \mathrm{R}_1 \mathcal{O} M \to \theta \Phi \mathcal{O} M \to 0$$

(la notation $\mathcal{O}$ désigne à nouveau le foncteur oubli P-$\mathcal{U} \to \mathcal{U}$). On applique l'endofoncteur τ à cette suite exacte ; comme τ est exact à gauche et que l'homomorphisme $\theta \mathrm{R}_1 \mathcal{O} M \to \theta \Phi \mathcal{O} M$ est surjectif on obtient encore une (P-$\mathcal{U}$)-suite exacte :

$$0 \to \tau \mathfrak{S}_2 M \to \tau((M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2}) \oplus \theta \mathrm{R}_1 \mathcal{O} M \to \theta \Phi \mathcal{O} M \to 0$$

qui coïncide avec la suite exacte ($\mathcal{S}_2$) qui apparaît dans la démonstration de la proposition 5.2.6 [11]. La contemplation du (P-$\mathcal{U}$)-diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathfrak{S}_2 M & \longrightarrow & (M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2} \oplus \theta \mathrm{R}_1 \mathcal{O} M & \longrightarrow & \theta \Phi \mathcal{O} M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \tau \mathfrak{S}_2 M & \longrightarrow & \tau((M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2}) \oplus \theta \mathrm{R}_1 \mathcal{O} M & \longrightarrow & \theta \Phi \mathcal{O} M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

donne un (P-$\mathcal{U}$)-isomorphisme $\mathfrak{S}_2 M / \tau \mathfrak{S}_2 M \cong (M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2} / \tau((M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2})$. Si M est réduit on a en outre $\tau((M \otimes M)^{\mathfrak{S}_2}) = (\tau M \otimes \tau M)^{\mathfrak{S}_2}$. Pour se convaincre de cette égalité, on procède comme dans la démonstration de 4.6.12 : on pose $K = \tau M$, $L = M/K$ et on observe que L est P-libre ce qui implique que l'on a $M \approx K \oplus L$ dans la catégorie P-$\mathcal{E}$. □

Exemples A.4. Soit m un entier naturel.
– Pour $m \geq 2$, on a $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathrm{H}^1 \mathrm{A}_{2^m} = m$.

11. On observera que l'argument employé ici pour obtenir cette suite exacte évite de faire appel à 4.4.2.

– Pour $m \geq 3$, on a $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathrm{H}^2\mathrm{A}_{2^m} = \frac{m^3-m+18}{6}$.

Exemples A.5. Soit X un espace topologique avec H^*X de dimension (sur $\mathbb{F}_2$) finie en chaque degré ; on considère l'espace topologique

$$\mathrm{A}_4X \;:=\; \mathrm{EA}_4 \times_{\mathrm{A}_4} X^4 \qquad ,$$

A_4 agissant sur X^4 *via* son inclusion dans $\mathfrak{S}_4$. On dispose pour cet espace d'un énoncé analogue à celui de 2.2.11 :
On a un isomorphisme canonique de $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels gradués

$$\mathrm{H}^*\mathrm{A}_4X \;\cong\; \mathrm{H}^*(\mathrm{A}_4; \mathrm{H}^*X \otimes \mathrm{H}^*X \otimes \mathrm{H}^*X \otimes \mathrm{H}^*X) \qquad ,$$

A_4 *agissant sur* $\mathrm{H}^*X \otimes \mathrm{H}^*X \otimes \mathrm{H}^*X \otimes \mathrm{H}^*X$ via *son inclusion dans* $\mathfrak{S}_4$.
On en déduit facilement la série de Poincaré de $\mathrm{H}^*\mathrm{A}_4X$ en fonction de celle de H^*X, disons $S(t)$:

$$\mathrm{S}(\mathrm{H}^*\mathrm{A}_4X; t) \;=\; \frac{1}{(1-t)^2}S(t^4) + \frac{3}{2(1-t)}(S(t^2)^2 - S(t^4)) + \frac{1}{4}(S(t)^4 - 3S(t^2)^2 + 2S(t^4)) \;.$$

On constate que l'on a $\mathrm{S}(\mathrm{H}^*\mathrm{A}_8; t) = \mathrm{S}(\mathrm{H}^*\mathrm{A}_4\mathrm{B}\mathbb{Z}/2; t)$, égalité en accord avec l'isomorphisme de groupes $\mathrm{A}_8 \cong \mathrm{A}_4 \ltimes (\mathbb{Z}/2)^4$ fourni par le cas $m = 3$ de C.4. Par contre la formule ci-dessus donne $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathrm{H}^2(\mathrm{A}_4 \ltimes (\mathrm{S}_4)^4) = 15$ alors que l'on a $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathrm{H}^2\mathrm{A}_{16} = 13$; on ne peut donc avoir $\mathrm{A}_{16} \cong \mathrm{A}_4 \ltimes (\mathrm{S}_4)^4$ … isomorphisme auquel l'énoncé C.3 nous a un temps trompeusement laissé croire.

B Sur l'application de Quillen pour la cohomologie modulo 2 des groupes diédraux

Le calcul de la cohomologie modulo 2 des groupes diédraux est classique. On le trouvera par exemple dans [AM] ; le fait que l'application de Quillen pour ces groupes soit un isomorphisme est implicite dans cette référence. Nous avons choisi pour notre présentation (loin d'être géodésique !) du calcul en question de mettre en avant la représentation de Coxeter des groupes diédraux.

Soit $n \geq 1$ un entier, on pose $\mathrm{D}_{2n} := \mathbb{Z}/2 \ltimes \mathbb{Z}/n$, $\mathbb{Z}/2$ agissant sur $\mathbb{Z}/n$ par multiplication par -1 ; D_{2n} est le *groupe diédral d'ordre* $2n$ [12]. On écrit $n = 2^m i$ avec $m \geq 0$ et $i \equiv 1 \bmod 2$; la suite exacte scindée

$$1 \to \mathbb{Z}/i \to \mathrm{D}_{2n} \to \mathrm{D}_{2^{m+1}} \to 1$$

montre à la fois que le 2-Sylow de D_{2n} est $\mathrm{D}_{2^{m+1}}$ et que la restriction, en cohomologie modulo 2, $\mathrm{H}^*\mathrm{D}_{2n} \to \mathrm{H}^*\mathrm{D}_{2^{m+1}}$ est un isomorphisme.

Le groupe $\mathrm{O}(2)$ est isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{Z}/2 \ltimes \mathrm{SO}(2)$, $\mathbb{Z}/2$ agissant sur le groupe $\mathrm{SO}(2)$ via l'automorphisme involutif $A \mapsto A^{-1}$.

On note s la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des x. Soit $n \geq 1$ un entier ; il existe un unique homomorphisme de groupes $\phi_n : \mathrm{O}(2) \to \mathrm{O}(2)$ vérifiant $\phi_n(\mathrm{s}) = \mathrm{s}$ et $\phi_n(A) = A^n$ pour tout A dans $\mathrm{SO}(2)$. Cet homomorphisme induit une opération sur les fibrés vectoriels euclidiens (réels) de dimension 2 que l'on note encore ϕ_n.

On note r_n la rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\frac{2\pi}{n}$ ($\mathbb{R}^2$ est muni de son orientation "trigonométrique") ; $\mathrm{r}_n\mathrm{s}$ est la réflexion orthogonale par rapport à la droite engendrée par $(\cos\frac{\pi}{n}, \sin\frac{\pi}{n})$. On identifie D_{2n}.au sous-groupe de $\mathrm{O}(2)$ engendré par $\{\mathrm{r}_n\mathrm{s}, \mathrm{s}\}$. L'image réciproque par ϕ_n du sous-groupe de $\mathrm{O}(2)$ engendré par s est D_{2n}.

PROPOSITION B.1. *Soient γ le fibré universel de base* $\mathrm{BO}(2)$ *et* $\mathrm{EO}(2)$ *son fibré des repères orthogonaux (*$\mathrm{EO}(2) = \mathrm{RO}(\gamma)$*). Soit $n \geq 1$ un entier ; le fibré en sphères* $\mathrm{S}(\phi_n\gamma)$ *s'identifie à l'espace quotient* $\mathrm{EO}(2)/\mathrm{D}_{2n}$*, le groupe* D_{2n} *agissant à droite* $\mathrm{EO}(2)$ *via son inclusion dans* $\mathrm{O}(2)$.

Démonstration. On a par définition $\mathrm{S}(\phi_n\gamma) = \mathrm{EO}(2) \times_{\mathrm{O}(2)} \mathrm{S}^1$, $\mathrm{O}(2)$ agissant à gauche sur S^1 *via* l'homomorphisme $\phi_n : \mathrm{O}(2) \to \mathrm{O}(2)$; pour la clarté de l'exposition, nous notons ci-après S^1_n l'espace S^1 muni de cette action. L'action de $\mathrm{O}(2)$ sur S^1_n est transitive et le groupe d'isotropie du point $(1,0)$ est D_{2n} ; on a donc un isomorphisme de $\mathrm{O}(2)$-espaces $\mathrm{S}^1_n \cong \mathrm{O}(2)/\mathrm{D}_{2n}$ si bien que l'on a $\mathrm{S}(\phi_n\gamma) = \mathrm{EO}(2) \times_{\mathrm{O}(2)} \mathrm{O}(2)/\mathrm{D}_{2n} = \mathrm{EO}(2)/\mathrm{D}_{2n}$. □

Puisque l'espace $\mathrm{EO}(2)$ est contractile et que l'action de D_{2n} sur $\mathrm{EO}(2)$ est (topologiquement) libre, la proposition ci-dessus implique :

COROLLAIRE B.2. *On a un isomorphisme canonique de* $\mathrm{H}^*\mathrm{BO}(2)$-A-*algèbres instables*

$$\mathrm{H}^*\mathrm{D}_{2n} \;\cong\; \mathrm{H}^*\mathrm{S}(\phi_n\gamma) \qquad .$$

12. D_6 est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$, D_8 est isomorphe à un 2-Sylow de $\mathfrak{S}_4$ et D_{12} est isomorphe à $\mathrm{W}(\mathbf{G}_2)$.

Nous allons maintenant étudier $\mathrm{H}^*\mathrm{S}(\phi_n\gamma)$ à l'aide de la suite exacte de Gysin pour les fibrés en sphères. Pour cela il nous faut d'abord déterminer la classe d'Euler modulo 2 de $\phi_n\gamma$, c'est-à-dire $\mathrm{w}_2(\phi_n\gamma)$; pour préciser la structure de A-module instable de $\mathrm{H}^*\mathrm{S}(\phi_n\gamma)$ la connaissance de $\mathrm{w}_1(\phi_n\gamma)$ nous sera aussi utile.

Proposition B.3. *Soient* γ *le fibré universel de base* $\mathrm{BO}(2)$ *et* $n \geq 1$ *un entier ; on a* $\mathrm{w}_2(\phi_n\gamma) = n\,\mathrm{w}_2(\gamma)$ *et* $\mathrm{w}_1(\phi_n\gamma) = \mathrm{w}_1(\gamma)$.

Démonstration. Soit $\iota : \mathrm{O}(1)\times\mathrm{O}(1) \to \mathrm{O}(2)$ l'inclusion de groupes canonique ; on va utiliser le fait que l'application

$$\mathrm{B}\iota : \mathrm{B}(\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(1)) \to \mathrm{BO}(2)$$

induit un $\mathcal{K}$-isomorphisme de A-algèbres instables $\mathrm{H}^*\mathrm{BO}(2) \cong (\mathrm{P} \otimes \mathrm{P})^{\mathfrak{S}_2}$.

On dispose d'un diagramme commutatif de groupes et d'homorphismes de groupes

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{O}(2) & \xrightarrow{\phi_n} & \mathrm{O}(2) \\
{\scriptstyle\iota}\uparrow & & {\scriptstyle\iota}\uparrow \\
\mathrm{O}(1)\times\mathrm{O}(1) & \xrightarrow{\omega_n} & \mathrm{O}(1)\times\mathrm{O}(1)
\end{array}$$

dans lequel l'homomorphisme noté ω_n est défini de la façon suivante :

– pour n impair, ω_n est l'identité ;

– pour n pair, $\mathrm{pr}_1 \circ \omega_n$ est l'homomorphisme trivial et $\mathrm{pr}_2 \circ \omega_n$ est l'homomorphisme donné par la loi de groupe $\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(1) \to \mathrm{O}(1)$.

Vérification. Soit (ϵ_1, ϵ_2) un élément de $\{\pm 1\} \times \{\pm 1\} = \mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(1)$; on a :

$$\begin{bmatrix}\epsilon_1 & 0\\ 0 & \epsilon_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \epsilon_1\epsilon_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon_1 & 0\\ 0 & \epsilon_1\end{bmatrix}$$

et donc :

$$\phi_n(\begin{bmatrix}\epsilon_1 & 0\\ 0 & \epsilon_2\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \epsilon_1\epsilon_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon_1^n & 0\\ 0 & \epsilon_1^n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\epsilon_1^n & 0\\ 0 & \epsilon_1^{n+1}\epsilon_2\end{bmatrix} \qquad .$$

□

Remarque B.4. L'égalité $\mathrm{w}_1(\phi_n\gamma) = \mathrm{w}_1(\gamma)$ résulte aussi directement de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{O}(2) & \xrightarrow{\phi_n} & \mathrm{O}(2) \\
{\scriptstyle\text{dét}}\downarrow & & {\scriptstyle\text{dét}}\downarrow \\
\mathrm{O}(1) & \xrightarrow{=} & \mathrm{O}(1)
\end{array}$$

qui montre que les fibrés dét$\phi_n\gamma$ et détγ coïncident.

Corollaire B.5. *Soit $n \geq 2$ un entier pair ; on a une suite exacte canonique de* $\mathrm{H}^*\mathrm{BO}(2)$-A-*modules instables*

$$0 \to \mathrm{H}^*\mathrm{BO}(2) \to \mathrm{H}^*\mathrm{D}_{2n} \to \mathrm{w}_1\mathrm{H}^*\mathrm{BO}(2) \to 0$$

(w_1 *étant une abréviation pour* $\mathrm{w}_1(\gamma)$*).*

Démonstration. Pour le confort du lecteur, rappelons la théorie, dans notre contexte, de la suite exacte de Gysin pour les fibrés en sphères :

Soit ξ un fibré vectoriel euclidien de dimension d ; on note $\mathrm{B}(\xi)$ sa base, $\mathrm{D}(\xi)$ son fibré en boules, $\mathrm{S}(\xi)$ son fibré en sphères, p les projections $\mathrm{D}(\xi) \to \mathrm{B}(\xi)$ et $\mathrm{S}(\xi) \to \mathrm{B}(\xi)$, $\mathrm{U}_\xi \in \mathrm{H}^d(\mathrm{D}(\xi), \mathrm{S}(\xi))$ sa classe de Thom et $\mathrm{e}(\xi) \in \mathrm{H}^*\mathrm{B}(\xi)$ sa classe d'Euler. On considère la longue suite exacte de la paire $(\mathrm{D}(\xi), \mathrm{S}(\xi))$ en cohomologie (modulo 2) :

$$\ldots \to \mathrm{H}^*(\mathrm{D}(\xi), \mathrm{S}(\xi)) \to \mathrm{H}^*\mathrm{D}(\xi) \to \mathrm{H}^*\mathrm{S}(\xi) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^{*+1}(\mathrm{D}(\xi), \mathrm{S}(\xi)) \to \ldots \quad .$$

On notera incidemment que ∂ peut-être vu comme la désuspension de l'homomorphisme $\Sigma\mathrm{H}^*\mathrm{S}(\xi) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{D}(\xi), \mathrm{S}(\xi))$ induit par l'application naturelle $\mathrm{D}(\xi)/\mathrm{S}(\xi) \to \Sigma\mathrm{S}(\xi)$ ($\mathrm{D}(\xi)$ s'identifie au cylindre de la projection $\mathrm{p} : \mathrm{S}(\xi) \to \mathrm{B}(\xi)$).

Compte tenu des points suivants :

– la projection $\mathrm{p} : \mathrm{D}(\xi) \to \mathrm{B}(\xi)$ est une équivalence d'homotopie ;

– comme $\mathrm{H}^*\mathrm{D}(\xi)$-module à droite $\mathrm{H}^*(\mathrm{D}(\xi), \mathrm{S}(\xi))$ est libre de dimension 1 de base $\{\mathrm{U}_\xi\}$, ce que équivaut à dire que l'homomorphisme $\mathrm{H}^{*-d}\mathrm{B}(\xi) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{D}(\xi), \mathrm{S}(\xi))$, $x \mapsto \mathrm{U}_\xi \smile \mathrm{p}^*x$ est un isomorphisme (isomorphisme de Thom) ;

– $\mathrm{p}^*\mathrm{e}(\xi)$ est l'image de U_ξ par l'homomorphisme $\mathrm{H}^*(\mathrm{D}(\xi), \mathrm{S}(\xi)) \to \mathrm{H}^*\mathrm{D}(\xi)$;

la suite exacte ci-dessus peut être réécrite de la façon suivante :

$$\ldots \to \mathrm{H}^{*-d}\mathrm{B}(\xi) \xrightarrow{\mathrm{e}(\xi)\smile -} \mathrm{H}^*\mathrm{B}(\xi) \xrightarrow{\mathrm{p}^*} \mathrm{H}^*\mathrm{S}(\xi) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^{*-d+1}\mathrm{B}(\xi) \to \ldots \quad .$$

Venons maintenant au cas $\xi = \phi_n\gamma$. Comme n est pair la proposition B.3 dit en particulier que la classe $\mathrm{e}(\phi_n\gamma) = \mathrm{w}_2(\phi\gamma)$ est nulle ; la longue suite exacte de Gysin donne une suite exacte courte :

$$0 \to \mathrm{H}^*\mathrm{BO}(2) \to \mathrm{H}^*\mathrm{S}(\phi_n\gamma) \to \mathrm{H}^{*-1}\mathrm{BO}(2) \to 0 \qquad .$$

Il nous reste à préciser la structure de la flèche $\mathrm{H}^*\mathrm{S}(\phi_n\gamma) \to \mathrm{H}^{*-1}\mathrm{BO}(2)$. Comme nous l'avons rappelé plus haut, celle-ci est la désuspension de la composée de l'homorphisme naturel $\Sigma\mathrm{H}^*\mathrm{S}(\phi_n\gamma) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{D}(\phi_n\gamma), \mathrm{S}(\phi_n\gamma))$ et de l'inverse de l'isomorphisme de Thom

$$\Theta : \mathrm{H}^{*-2}\mathrm{BO}(2) = \mathrm{H}^{*-2}\mathrm{B}(\phi_n\gamma) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{D}(\phi_n\gamma), \mathrm{S}(\phi_n\gamma)) \qquad .$$

La suite exacte courte ci-dessus est donc un avatar de la suivante :

$$0 \to \mathrm{H}^*\mathrm{BO}(2) \to \mathrm{H}^*\mathrm{S}(\phi_n\gamma) \xrightarrow{\partial} \Sigma^{-1}\mathrm{H}^*(\mathrm{D}(\phi_n\gamma), \mathrm{S}(\phi_n\gamma)) \to 0 \qquad .$$

Comme le A-module $\mathrm{H}^*\mathrm{S}(\phi_n\gamma)$ est instable et que ∂ est surjectif, le A-module $\Sigma^{-1}\mathrm{H}^*(\mathrm{D}(\phi_n\gamma), \mathrm{S}(\phi_n\gamma))$ est lui-aussi instable. Vérifions directement que $\mathrm{H}^*(\mathrm{D}(\phi_n\gamma), \mathrm{S}(\phi_n\gamma))$ est bien une suspension (d'un A-module instable) c'est-à-dire que l'application Sq_0 est triviale sur $\mathrm{H}^*(\mathrm{D}(\phi_n\gamma), \mathrm{S}(\phi_n\gamma))$:
Soit x un élément de la cohomologie modulo 2 de BO(2), on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Sq}_0\,\Theta x = \mathrm{Sq}_0\,(\mathrm{U}_{\phi_n\gamma} \smile \mathrm{p}^*x) &= \mathrm{Sq}_0\,\mathrm{U}_{\phi_n\gamma} \smile \mathrm{Sq}_0\,\mathrm{p}^*x \\ &= \mathrm{Sq}^2\,\mathrm{U}_{\phi_n\gamma} \smile \mathrm{Sq}_0\,\mathrm{p}^*x = (\mathrm{U}_{\phi_n\gamma} \smile \mathrm{p}^*\mathrm{w}_2(\phi_n\gamma)) \smile \mathrm{Sq}_0\,\mathrm{p}^*x\end{aligned}$$

(se rappeler que les classes de Stiefel-Whitney d'un fibré réel ξ peuvent être définies par la formule de Thom $\mathrm{w}_i(\xi) = \Theta^{-1}(\mathrm{Sq}^i\mathrm{U}_\xi))$; d'où $\mathrm{Sq}_0\,\Theta x = 0$ puisque la classe $\mathrm{w}_2(\phi_n\gamma)$ est nulle.
Etudions plus généralement les opérations Sq^i sur $\mathrm{H}^*(\mathrm{D}(\phi_n\gamma), \mathrm{S}(\phi_n\gamma))$, on a

$$\begin{aligned}&\mathrm{Sq}^i\,(\mathrm{U}_{\phi_n\gamma} \smile \mathrm{p}^*x) = \\ &\qquad \mathrm{U}_{\phi_n\gamma} \smile \mathrm{p}^*\mathrm{Sq}^i x \;+\; \mathrm{Sq}^1\mathrm{U}_{\phi_n\gamma} \smile \mathrm{p}^*\mathrm{Sq}^{i-1}x \;+\; \mathrm{Sq}^2\mathrm{U}_{\phi_n\gamma} \smile \mathrm{p}^*\mathrm{Sq}^{i-2}x\end{aligned}$$

soit encore, compte tenu de la formule de Thom et de la proposition B.3

$$(\mathcal{SQ}) \qquad\qquad \mathrm{Sq}^i\,\Theta x \;=\; \Theta\,(\mathrm{Sq}^i x + \mathrm{w}_1\,\mathrm{Sq}^{i-1}x)$$

(w_1 est une abréviation pour $\mathrm{w}_1(\gamma)$ et les produits dans $\mathrm{H}^*\mathrm{BO}(2)$ sont notés sans le symbole $\smile$).
Soit $\mathrm{w}_1\mathrm{H}^*\mathrm{BO}(2)$ l'idéal de $\mathrm{H}^*\mathrm{BO}(2)$ engendré par w_1 ; cet idéal est stable sous l'action de A, c'est un sous-$\mathrm{H}^*\mathrm{BO}(2)$-A-module instable de $\mathrm{H}^*\mathrm{BO}(2)$.
Soit enfin $\nu : \Sigma^{-1}\mathrm{H}^*(\mathrm{D}(\phi_n\gamma), \mathrm{S}(\phi_n\gamma)) \to \mathrm{w}_1\mathrm{H}^*\mathrm{BO}(2)$ l'application de degré zéro définie par $\nu(\Sigma^{-1}\Theta x) = \mathrm{w}_1 x$. Par définition ν est un isomorphisme de $\mathrm{H}^*\mathrm{BO}(2)$-modules $\mathbb{N}$-gradués, l'égalité $(\mathcal{SQ})$ montre que c'est un isomorphisme de $\mathrm{H}^*\mathrm{BO}(2)$-A-modules instables. □

Proposition B.6. *Pour tout entier $n \geq 1$; le* A-*module instable* $\mathrm{H}^*\mathrm{D}_{2n}$ *est* $\mathcal{N}$*il-fermé.*

Démonstration. Le cas $n \equiv 1 \bmod 2$ (resp. $n \equiv 2 \bmod 4$) est trivial : l'homomorphisme canonique $\mathrm{D}_{2n} \to \mathrm{D}_2 \cong \mathbb{Z}/2$ (resp. $\mathrm{D}_{2n} \to \mathrm{D}_4 \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$)

induit un isomorphisme en cohomologie modulo 2. On traite ci-dessous le cas n pair (qui contient le cas $n \equiv 2 \bmod 4$).

Les A-modules instables $\mathrm{H}^*\mathrm{BO}(2)$ et $\mathrm{w}_1\mathrm{H}^*\mathrm{BO}(2)$ qui apparaissent de part et d'autre de $\mathrm{H}^*\mathrm{D}_{2n}$ dans la suite exacte de B.5 sont $\mathcal{N}il$-fermés :

– $\mathrm{H}^*\mathrm{BO}(2) \cong (\mathrm{P} \otimes \mathrm{P})^{\mathfrak{S}_2}$ est $\mathcal{N}il$-fermé d'après 1.7 ;

– $\mathrm{w}_1\mathrm{H}^*\mathrm{BO}(2)$, qui est le noyau du $\mathcal{U}$-morphisme $(\mathrm{P} \otimes \mathrm{P})^{\mathfrak{S}_2} \to \mathrm{P}$ induit par la multiplication $\varphi : \mathrm{P} \otimes \mathrm{P} \to \mathrm{P}$, est $\mathcal{N}il$-fermé d'après 1.6.

Il en résulte que $\mathrm{H}^*\mathrm{D}_{2n}$ est $\mathcal{N}il$-fermé(voir 1.8). □

Détermination de $\mathrm{L}(\mathrm{D}_{2n})$ pour $n \geq 1$

Pour $n \equiv 1 \bmod 2$, on a $\mathrm{L}(\mathrm{D}_{2n}) = \mathrm{L}(\mathrm{D}_2) = \mathrm{L}(\mathbb{Z}/2) = \mathrm{H}^*\mathbb{Z}/2$.

Pou $n \equiv 2 \bmod 4$, on a $\mathrm{L}(\mathrm{D}_{2n}) = \mathrm{L}(\mathrm{D}_4) = \mathrm{L}(\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2) = \mathrm{H}^*(\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2)$.

Le cas $n \equiv 0 \bmod 4$ est plus intéressant. Soit E_1 (resp. E_2) le sous-groupe de D_{2n} engendré par $-\mathrm{s}$ et s (resp. $-\mathrm{r}_n\mathrm{s}$ et $\mathrm{r}_n\mathrm{s}$). On fait les constatations suivantes (pour alléger la notation on pose $\mathcal{Q} := \mathcal{Q}_{\mathrm{D}_{2n}}$) :

– pour $i = 1, 2$, E_i est un 2-groupe abélien élémentaire avec $\dim_{\mathbb{Z}/2} \mathrm{E}_i = 2$;

– E_1 et E_2 ne sont pas conjugués (en d'autres termes, ne sont pas $\mathcal{Q}$-isomorphes) ;

– tout 2-sous-groupe abélien élémentaire E de D_{2n} vérifie $\dim_{\mathbb{Z}/2} E \leq 2$ et si l'on a $\dim_{\mathbb{Z}/2} E = 2$ alors E est conjugué soit de E_1 soit de E_2 (en d'autres termes, est $\mathcal{Q}$-isomorphe soit à E_1 soit à E_2) ;

– $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$ est égal à $\{\pm \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\}$ (ce sous-groupe est le centre de D_{2n}) ;

– le seul élément non-trivial de $\mathrm{Aut}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{E}_1)$ (resp. $\mathrm{Aut}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{E}_2)$), est induit par la conjugaison par $(\mathrm{r}_n)^{\frac{n}{4}}$ (la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$), il échange $-\mathrm{s}$ et s (resp. $-\mathrm{r}_n\mathrm{s}$ et $\mathrm{r}_n\mathrm{s}$) ;

– $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$ est la diagonale de $\mathrm{E}_i \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ pour $i = 1, 2$;

– on a $\lim_{\mathcal{Q}^{\mathrm{op}}} \mathrm{H}^*E = \lim_{\mathcal{R}^{\mathrm{op}}} \mathrm{H}^*E$, $\mathcal{R}$ désignant la sous-catégorie pleine de $\mathcal{Q}$ dont les objets sont E_1, E_2 et $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$ (pour la notation $\lim_{(-)^{\mathrm{op}}} \mathrm{H}^*E$, voir 0.1).

On en déduit que $\mathrm{L}(\mathrm{D}_{2n})$ est la limite dans la catégorie $\mathcal{K}$ du diagramme

$$(\mathrm{P} \otimes \mathrm{P})^{\mathfrak{S}_2} \longrightarrow \mathrm{P} \longleftarrow (\mathrm{P} \otimes \mathrm{P})^{\mathfrak{S}_2}$$

les deux flèches étant induites par la multiplication de P soit encore du diagramme

$$(\mathrm{P} \otimes \mathrm{P})^{\mathfrak{S}_2} \longrightarrow \Phi\mathrm{P} \longleftarrow (\mathrm{P} \otimes \mathrm{P})^{\mathfrak{S}_2} \qquad .$$

Remarque B.7. Ce qui précède montre que la $\mathcal{U}$-suite exacte de B.5

$$0 \to \mathrm{H}^*\mathrm{BO}(2) \to \mathrm{H}^*\mathrm{D}_{2n} \to \mathrm{w}_1\mathrm{H}^*\mathrm{BO}(2) \to 0$$

est scindée pour $n \equiv 0 \bmod 4$ (la restriction $\mathrm{H}^*\mathrm{D}_{2n} \to \mathrm{H}^*\mathrm{E}_1$ induit un isomorphisme de $\mathrm{H}^*\mathrm{BO}(2)$ sur $(\mathrm{P}\otimes\mathrm{P})^{\mathfrak{S}_2}$). Par contre pour $n \equiv 2 \bmod 4$ l'extension associée est non-triviale car $(\mathrm{P}\otimes\mathrm{P})^{\mathfrak{S}_2}$ n'est pas un $\mathcal{U}$-facteur direct de $\mathrm{P}\otimes\mathrm{P}$.

C Sur les 2-Sylow du groupe $\mathrm{W}(\mathbf{H}_4)$

On commence par la description faite dans [Hu] du groupe de Coxeter $\mathrm{W}(\mathbf{H}_4)$ comme sous-groupe de $\mathrm{SO}(4)$.

Au préalable quelques rappels (bien classiques !) concernant les groupes de Lie $\mathrm{SO}(4)$ et $\mathrm{SO}(3)$:

On note $\mathbb{H}$ le corps des quaternions et $\mathrm{S}^3 \subset \mathbb{H}^\times$ le sous-groupe constitué des quaternions de norme 1.

Soient q_1 et q_2 deux éléments de S^3. On observe que l'application

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{H} \to \mathbb{H} = \mathbb{R}^4 \qquad , \qquad x \mapsto q_1 x \bar{q}_2$$

est un élément de $\mathrm{SO}(4)$; on définit ainsi un homomorphisme de groupes de Lie

$$\pi : \mathrm{S}^3 \times \mathrm{S}^3 \to \mathrm{SO}(4)$$

dont le noyau est $\mu_2 := \{\pm 1\}$ diagonalement plongé dans $\mathrm{S}^3 \times \mathrm{S}^3$. L'homomorphisme π est "le" revêtement universel de $\mathrm{SO}(4)$; il induit un isomorphisme

$$\mathrm{S}^3 \times_{\mu_2} \mathrm{S}^3 \;\cong\; \mathrm{SO}(4) \qquad ;$$

la restriction de π à la diagonale induit un homorphisme de groupes de Lie $\mathrm{S}^3 \to \mathrm{SO}(3)$ (on identifie l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ avec le sous-espace de $\mathbb{H}$ constitué des x avec $x + \bar{x} = 0$) qui est "le" revêtement universel de $\mathrm{SO}(3)$.

On passe ensuite au groupe $\mathrm{O}(4)$. On note c l'involution

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{H} \to \mathbb{H} = \mathbb{R}^4 \qquad , \qquad x \mapsto \bar{x} \qquad ;$$

on constate que c est un élément de $\mathrm{O}(4)$ de déterminant -1. On considère la suite exacte de groupes

$$0 \longrightarrow \mathrm{S}^3 \times_{\mu_2} \mathrm{S}^3 \cong \mathrm{SO}(4) \longrightarrow \mathrm{O}(4) \xrightarrow{\text{dét}} \mu_2 \longrightarrow 0 \qquad ;$$

l'involution c fournit une section de dét et donc un isomorphisme

$$\mathrm{O}(4) \;\cong\; \mu_2 \ltimes \mathrm{SO}(4)$$

l'action de μ_2 sur SO(4) étant donnée par la conjugaison par c. On constate que cette action se traduit *via* l'isomorphisme $\mathrm{SO}(4) \cong \mathrm{S}^3 \times_{\mu_2} \mathrm{S}^3$ par l'échange des deux facteurs S^3. On voit donc au bout du compte que l'on dispose d'un isomorphisme canonique

$$\mathrm{O}(4) \ \cong \ (\mathfrak{S}_2 \ltimes (\mathrm{S}^3 \times \mathrm{S}^3))/\langle(-1,-1)\rangle \qquad .$$

Soit maintenant $\mathrm{ic} : \mathfrak{A}_5 \to \mathrm{SO}(3)$ un monomorphisme de groupes dont l'image est le groupe des isométries directes d'un icosaèdre régulier centré à l'origine ; il sera commode par la suite de supposer que l'image par ic du groupe de Klein A_4 (qui est le 2-Sylow de $\mathfrak{A}_4$ et donc un 2-Sylow de $\mathfrak{A}_5$, voir 5.1.1) est le sous-groupe de SO(3) constitué des matrices diagonales. Soit enfin $\widetilde{\mathfrak{A}}_5$ l'image inverse de $\mathfrak{A}_5$ par le revêtement $\mathrm{S}^3 \to \mathrm{SO}(3)$, Le résultat de [Hu] est l'isomorphisme de groupes suivant

$$\mathrm{W}(\mathbf{H}_4) \ \cong \ (\mathfrak{S}_2 \ltimes (\widetilde{\mathfrak{A}}_5 \times \widetilde{\mathfrak{A}}_5))/\langle(-1,-1)\rangle$$

qui va nous permettre d'identifier "le" 2-Sylow de $\mathrm{W}(\mathbf{H}_4)$.

L'hypothèse faite sur ic assure que le groupe $\mathrm{Q}_8 := \{\pm 1, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$ est un 2-Sylow de $\widetilde{\mathfrak{A}}_5$. Il en résulte que $(\mathfrak{S}_2 \ltimes (\mathrm{Q}_8 \times \mathrm{Q}_8))/\langle(-1,-1)\rangle$ est un 2-Sylow de $\mathrm{W}(\mathbf{H}_4)$ (de cardinal 2^6 et d'indice 15^2).

Proposition C.1. *Le groupe* $(\mathfrak{S}_2 \ltimes (\mathrm{Q}_8 \times \mathrm{Q}_8))/\langle(-1,-1)\rangle$ *est isomorphe au produit semi-direct* $\mathrm{A}_4 \ltimes \{\pm 1\}^4$*, le groupe de Klein* A_4 *agissant sur* $\{\pm 1\}^4$ via *son inclusion dans* $\mathfrak{S}_4$*.*

Démonstration. On considère le monomorphisme canonique

$$\gamma : (\mathfrak{S}_2 \ltimes (\mathrm{Q}_8 \times \mathrm{Q}_8))/\langle(-1,-1)\rangle \to (\mathfrak{S}_2 \ltimes (\mathrm{S}^3 \times \mathrm{S}^3))/\langle(-1,-1)\rangle = \mathrm{O}(4) \ .$$

Le groupe de Lie O(4) peut être vu comme le groupe $\mathrm{O}_4(\mathbb{R})$ des points réels du groupe algébrique O_4 ; on observe que l'image de γ est contenue dans $\mathrm{O}_4(\mathbb{Z})$. Le groupe $\mathrm{O}_4(\mathbb{Z})$ est canoniquement isomorphe au produit semi-direct $\mathfrak{S}_4 \ltimes \{\pm 1\}^4$, $\mathfrak{S}_4$ agissant sur $\{\pm 1\}^4$ par permutation des facteurs ; γ induit donc un monomorphisme $\gamma^{\mathrm{bis}} : (\mathfrak{S}_2 \ltimes (\mathrm{Q}_8 \times \mathrm{Q}_8))/\langle(-1,-1)\rangle \to \mathfrak{S}_4 \ltimes \{\pm 1\}^4$. On constate par inspection que l'image de l'homomorphisme composé

$$(\mathfrak{S}_2 \ltimes (\mathrm{Q}_8 \times \mathrm{Q}_8))/\langle(-1,-1)\rangle \xrightarrow{\gamma^{\mathrm{bis}}} \mathfrak{S}_4 \ltimes \{\pm 1\}^4 \longrightarrow \mathfrak{S}_4$$

est contenue dans A_4 ; γ induit donc au bout du compte un monomorphisme $\gamma^{\mathrm{ter}} : (\mathfrak{S}_2 \ltimes (\mathrm{Q}_8 \times \mathrm{Q}_8))/\langle(-1,-1)\rangle \to \mathrm{A}_4 \ltimes \{\pm 1\}^4$. Comme la source et le but de γ^{ter} ont même cardinal, à savoir 2^6, γ^{ter} est un isomorphisme. □

Corollaire C.2. *Les 2-sous-groupes de Sylow du groupe de Coxeter* $\mathrm{W}(\mathbf{H}_4)$ *et du groupe alterné* $\mathfrak{A}_8$ *sont isomorphes.*

Démonstration. Compte tenu de la proposition précédente il s'agit de montrer qu'un 2-Sylow de $\mathfrak{A}_8$ est aussi isomorphe au produit semi-direct $\mathrm{A}_4 \ltimes \{\pm 1\}^4$. L'existence d'un tel isomorphisme est conséquence du cas $m = 3$ de l'énoncé ci-dessous (et de son corollaire) :

Proposition C.3. *Soit* $m \geq 2$ *un entier ; il existe un isomorphisme de groupes*

$$\alpha_m : \mathrm{S}_{2^m} \to \mathrm{S}_{2^{m-1}} \ltimes (\mathbb{Z}/2)^{2^{m-1}}$$

($\mathrm{S}_{2^{m-1}}$ *agissant sur* $(\mathbb{Z}/2)^{2^{m-1}}$ via *son inclusion dans* $\mathfrak{S}_{2^{m-1}}$*), tel que l'homomorphisme composé*

$$\mathrm{S}_{2^m} \xrightarrow{\alpha_m} \mathrm{S}_{2^{m-1}} \ltimes (\mathbb{Z}/2)^{2^{m-1}} \xrightarrow{\text{surjection canonique}} \mathrm{S}_{2^{m-1}} \xrightarrow{\epsilon_{2^{m-1}}} \mathbb{Z}/2$$

est ϵ_{2^m}*.*

Corollaire C.4. *Soit* $m \geq 2$ *un entier ; l'isomorphisme de groupes* α_m *induit un isomorphisme de groupes*

$$\mathrm{A}_{2^m} \;\cong\; \mathrm{A}_{2^{m-1}} \ltimes (\mathbb{Z}/2)^{2^{m-1}} \qquad ,$$

$\mathrm{A}_{2^{m-1}}$ *agissant sur* $(\mathbb{Z}/2)^{2^{m-1}}$ via *son inclusion dans* $\mathfrak{S}_{2^{m-1}}$*.*

Démonstration de la proposition C.3. En fait le cas $m = 2$ entraîne le cas général.

On revient sur 2.1. On a par définition $\mathrm{S}_{2^m} \cong \mathrm{S}_{2^{m-k}} \ltimes (\mathrm{S}_{2^k})^{2^{m-k}}$ ($\mathrm{S}_{2^{m-k}}$ agissant sur $(\mathrm{S}_{2^k})^{2^{m-k}}$ *via* son inclusion dans $\mathfrak{S}_{2^{m-k}}$) pour tout m et tout entier k avec $0 \leq k \leq m$. On constate que pour $k \geq 1$ l'homomorphisme $\epsilon_{2^m} : \mathrm{S}_{2^m} \to \mathbb{Z}/2$, vu comme un homomorphisme $\mathrm{S}_{2^{m-k}} \ltimes (\mathrm{S}_{2^k})^{2^{m-k}} \to \mathbb{Z}/2$, est l'homomorphisme dont la restriction à $\mathrm{S}_{2^{m-k}}$ est triviale et dont la restriction à $(\mathrm{S}_{2^k})^{2^{m-k}}$ est composé de l'homomorphisme $(\mathrm{S}_{2^k})^{2^{m-k}} \to (\mathbb{Z}/2)^{2^{m-k}}$ induit par ϵ_{2^k} et de l'addition $(\mathbb{Z}/2)^{2^{m-k}} \to \mathbb{Z}/2$. Les cas $k = 2$ et $k = 1$ de ce qui précède et "l'associativité" du produit semi-direct montrent que le cas $m = 2$ de la proposition C.3 entraînent la cas général.

Reste à traiter le cas $m = 2$. On considère la suite exacte de groupes

$$1 \longrightarrow \mathrm{A}_4 \longrightarrow \mathrm{S}_4 \xrightarrow{\epsilon_4} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 1 \qquad .$$

La donné d'un élément de S_4 d'ordre 2 et de signature non-triviale, par exemple la transposition $(2, 1, 3, 4)$, fournit un isomorphisme de groupes de

S_4 sur un produit semi-direct $\mathbb{Z}/2 \ltimes A_4$. L'action de $\mathbb{Z}/2$ sur A_4 est non-triviale sinon S_4 serait isomorphe à $(\mathbb{Z}/2)^3$. Comme les involutions non-triviales de $\mathrm{Aut}(A_4)$ sont conjuguées (on a $\mathrm{Aut}(A_4) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2) \simeq \mathfrak{S}_3$) il existe une base du $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel A_4 qui est stable sous l'action de $\mathbb{Z}/2$. On dispose donc d'un isomorphisme $\alpha : S_4 \to \mathbb{Z}/2 \ltimes (\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2)$, $\mathbb{Z}/2$ agissant sur $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ par échange des facteurs, tel que l'homomorphisme composé

$$S_4 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}/2 \ltimes (\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\text{surjection canonique}} \mathbb{Z}/2$$

est ϵ_4. L'homomorphisme α_2 est l'avatar évident de α. $\square$

Remarque C.5. Une façon plus rapide (mais plus indirecte) de se convaincre de l'existence d'un isomorphisme $A_8 \simeq A_4 \ltimes (\mathbb{Z}/2)^4$ est d'utiliser l'isomorphisme exceptionnel $\mathfrak{A}_8 \cong \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}/2)$:

On note $M_2(\mathbb{Z}/2)$ le $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{Z}/2$. On introduit les éléments suivants de $M_2(\mathbb{Z}/2)$:

$$\mathrm{S} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{I} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{O} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(on observera que l'on a $\mathrm{S}^2 = \mathrm{I}$), et le sous-ensemble suivant de $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}/2)$:

$$\mathbb{T} \ := \ \left\{ \begin{bmatrix} \mathrm{S}^{\nu_1} & \mathrm{M} \\ \mathrm{O} & \mathrm{S}^{\nu_2} \end{bmatrix} \ ; \ (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \ , \ M \in M_2(\mathbb{Z}/2) \right\} \quad .$$

On constate que $\mathbb{T}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}/2)$, que ce sous-groupe est un 2-Sylow et que le sous-ensemble de $\mathbb{T}$ constitué des éléments avec $(\nu_1, \nu_2) = (0, 0)$ est un sous-groupe distingué de $\mathbb{T}$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/2)^4$. On constate également que l'on a les formules suivantes :

$$\begin{bmatrix} \mathrm{S} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I} & M \\ \mathrm{O} & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{S} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{I} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{S}M \\ \mathrm{O} & \mathrm{I} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I} & M \\ \mathrm{O} & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{S} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & M\mathrm{S} \\ \mathrm{O} & \mathrm{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{S} \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 & x_4 \\ x_1 & x_3 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} \mathrm{S} = \begin{bmatrix} x_3 & x_1 \\ x_4 & x_2 \end{bmatrix} \quad .$$

La litanie de formules ci-dessus montre bien que $\mathbb{T}$ est isomorphe au produit semi-direct $A_4 \ltimes (\mathbb{Z}/2)^4$, le groupe de Klein A_4 agissant sur $(\mathbb{Z}/2)^4$ *via* son inclusion dans $\mathfrak{S}_4$.

Références

[Ad] J.-F. Adams, *Stable homotopy and generalised homology*, Chicago Lectures in Mathematics, 1974.

[AM] A. Adem and J. Milgram, *Cohomology of finite groups*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **309**, Springer-Verlag, 1994.

[Bo] N.BOURBAKI, *Éléments de mathématique, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6.*

[Boh] N.BOURBAKI, *Éléments de mathématique, Algèbre, Chapitre 10, algèbre homologique.*

[Ca] G. CARLSSON, G. B. Segal's Burnside ring conjecture for $(\mathbb{Z}/2)^k$, *Topology* **22**(1983), 83–103.

[Ga] P. GABRIEL, Des catégories abéliennes, *Bull. So. Math. France*, **90** (1962), 323-448.

[GS] C. GIUSTI and D. SINHA, Mod-two cohomology rings of alternating groups, *J. Reine Angew. Math.*, **772** (2021), 1–51.

[GLZ] J. H. GUNAWARDENA, J. LANNES et S. ZARATI, Cohomologie des groupes symétriques et application de Quillen, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, **139** (1989), 61-68.

[HLS1] H.-W. HENN, J. LANNES et L. SCHWARTZ, Analytic functors, unstable algebras and cohomology of classifying spaces, *Contemp. Math.*, **96** (1989), 197-220.

[HLS2] H.-W. HENN, J. LANNES et L. SCHWARTZ, The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects. *Amer. J. Math.*, **115** (1993),1053–1106.

[HLS3] H.-W. HENN, J. LANNES et L. SCHWARTZ, Localizations of unstable A-modules and equivariant mod p cohomology. *Math. Ann.*, **301** (1995), 23–68.

[Hu] B. HUPPERT, Zur Konstruktion der reellen Spiegelungsgruppe H_4, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **26** (1975), 331–336.

[La1] J. LANNES, Sur la cohomologie modulo p des p-groupes abéliens élémentaires, Homotopy theory (Durham, 1985), 97-116, *London Math. Soc., Lecture Note Ser.*, **117**.

[La2] J. LANNES, Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **75** (1992), 135–244.

[LS] J. LANNES et L. SCHWARTZ, Sur la structure des A-modules instables injectifs, *Topology*, **28** (1989), 153-169.

[LZ1] J.LANNES et S. ZARATI, Sur les $\mathcal{U}$-injectifs, *Ann. Scient. École Norm. Sup.*, **19** (1986), 1-31.

[LZ2] J.LANNES et S. ZARATI, Sur les foncteurs dérivés de la déstabilisation, *Math. Z.*, **194** (1987), 1-31.

[LZ3] J. Lannes et S. Zarati, Théorie de Smith algébrique et classification des H^*V-$\mathcal{U}$-injectifs, *Bull. Soc. Math. France*, **123** (1995), 189–223.

[Mi] H. Miller, The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces, *Ann. of Math.*, **120** (1984), 39–87.

[Mg] J. Milgram, *Unstable homotopy from the stable point of view*, Springer L.N.M., **368**, 1974.

[Par] B. Pareigis, *Categories and functors*, Pure and Applied Mathematics **39**, 1970.

[Qui] D. Quillen, The spectrum of an equivariant cohomology ring. I, II., *Ann. of Math.*, **94** (1971), 549–572, ibid. 573–602.

[Seg] G., Segal Classifying spaces and spectral sequences, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **34** (1968), 105–112.

[St] N. E., Steenrod, Cohomology operations derived from the symmetric group, *Com. Math. Helv.*, **31** (1957), 195-218.

[Vo] P. Vogel, Cobordisme d'immersions, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **7** (1974), 317-357.

[Za] S. Zarati, Défaut de stabilité d'opérations cohomologiques, *Publications Mathématiques d'Orsay* (1978).