La suspension homologique pour les CW-complexes finis quotients d'actions libres de $(\mathbb{Z}/2)^n$

Nguyen Dang Ho Hai Lionel Schwartz

February 1, 2024

Abstract

1 Introduction et résultats

Cette note est un complément [BLSZ23], [Ngu22] et est à comparer à [NS11].

Soit G un groupe agissant sur un CW-complexe X. On notera de façon générique $\mathcal{S}ing$ le lieu singulier de cette action, c'est à dire le sous-ensemble des points dont le sous-groupe d'isotropie n'est pas réduit à l'élément neutre, le contexte doit rendre clair l'action considérée, si nécessaire on notera $\mathcal{S}ing_G(X)$. L'action de G sur $X_{reg} = X \setminus \mathcal{S}ing$, la partie régulière, est libre.

Soit V_n un groupe abélien élémentaire de rang n, on abrègera en V dans la plupart des situations, W, U désigneront des sous-groupes de V, X^W désignera le V/W-sous-espace de X des points fixes sous W.

On peut obtenir un modèle pour le classifiant BV de la manière suivante. On choisit une représentation $\mathcal{R}$ de V, on note l'espace de représentation aussi $\mathcal{R}$. On suppose que $\mathcal{R}^V = 0$ et que le lieu singulier $Sing$, qui est une réunion de sous-espaces de $\mathcal{R}$, est non réduit à 0 (ce qui est vrai dès que $n \geq 2$) et n'est pas $\mathcal{R}$ tout entier. La représentation régulière réduite satisfait à ces conditions.

Le groupe V agit librement sur le lieu régulier de l'action : $\mathcal{R}_{reg} = \mathcal{R} \setminus Sing$ et sur $(\mathcal{R}^{\oplus k})_{reg}$, ces ensembles sont non-vides à cause de la seconde hypothèse sur $\mathcal{R}$. Pour tout k on a une inclusion $(\mathcal{R}^{\oplus k})_{reg} \hookrightarrow (\mathcal{R}^{\oplus k+1})_{reg}$. La dimension du lieu singulier de $\mathcal{R}^{\oplus k}$ croissant linéairement avec k et étant non nulle, la dualité d'Alexander implique que la connexité de $(\mathcal{R}^{\oplus k})_{reg}$ tend vers l'infini avec k. La colimite est donc un modèle pour EV. La colimite des quotients successifs $M_k = (\mathcal{R}^{\oplus k})_{reg}/V$ est un modèle pour BV.

On note $c\mathcal{R}$ le compactifié à l'infini de $\mathcal{R}$, l'action de V s'y étend uniquement. Par projection stéréographique on a :

$$c\mathcal{R} \cong S(\mathcal{R} \oplus \mathbb{R}) \cong \Sigma_{nr}(S(\mathcal{R}))$$

où $S(E)$ désigne la sphère unité, on suppose que E est munit d'une structure euclidienne invariante, plus généralement la notation vaut pour le fibré en sphères d'un fibré vectoriel E munit d'une métrique, enfin Σ_{nr} désigne la suspension non réduite.

La variété M_k est ouverte et est difféomorphe à l'intérieur d'une variété à bord ([BLSZ23]) et le compactifié à l'infini, cM_k, de M_k est homéomorphe au quotient de cette variété par son bord et au quotient $(c\mathcal{R}^{\oplus k}/Sing)/V$ (voir [BLSZ23] section 7).

Ces homéomorphismes respectent la structure de V_n-espaces. Pour tout k on a une inclusion $cM_k \hookrightarrow cM_{k+1}$. Voici un premier résultat :

Theorem 1.1. *La colimite des espaces cM_k est homotopiquement équivalente $\Sigma^n(BV+)$.*

Dans cette note H^*X, H^*_VX (resp. $\tilde{H}^*X$, $\tilde{H}^*_VX$) désignent la cohomologie et la cohomologie équivariante (resp. réduite ...) modulo 2. L'isomorphisme de Thom implique que la cohomologie V-équivariante réduite des espaces cM_k est un un H^*V-module libre de rang 1 (voir [BLSZ23] section 7).

La question initiale, qui a motivé cette note, soulevée dans [BLSZ23], était la suivante :

Question 1.2. *Soit un V_n-CW-complexe fini X dont la cohomologie équivariante H^*_VX est un H^*V-module libre. L'espace $(X/\mathcal{S}ing)/V_n$ est il, à homotopie près, une n-suspension, ou rétracte d'une n-suspension?*

Alternativement on pose aussi la question suivante : la filtration ci-dessus de $\Sigma^n(BV+)$, en un sens à préciser, désuspend t'elle n-fois?

Une indication dans cette direction est que la cohomologie réduite $\tilde{H}^*(cM_k)$ est la n-suspension d'un module instable ([BLSZ23]). La question est probablement beaucoup trop optimiste. Par contre on a le résultat plus faible suivant :

Theorem 1.3. *Sous l'hypothèse ci dessus l'application induite en homologie par l'évaluation (la suspension homologique)*

$$\Sigma^{n-1}\Omega^{n-1}(X/\mathcal{S}ing)/V_n \to (X/\mathcal{S}ing)/V_n$$

est surjective.

De ce fait on sait calculer l'homologie (et la cohomologie) de $\Omega^{n-1}(X/\mathcal{S}ing)/V_n$ comme foncteur de $H_*(X/\mathcal{S}ing)/V_n$.

Dans le cas où le H^*V-module libre H^*_VX est libre de rang 1, on sait, [BLSZ23] section 7, que X est à homotopie près le compactifié d'une représentation de V_n. La conjecture suivante est alors plus raisonnable :

Conjecture 1.4. *Soit un V_n-CW-complexe fini X dont la cohomologie équivariante H^*_VX est un H^*V-module libre de rang 1. L'espace $(X/\mathcal{S}ing)/V_n$ est, à homotopie près, la suspension n-ème d'un espace ou rétracte par déformation d'une telle suspension.*

Dans ce cas 1.3 peut être amélioré.

Theorem 1.5. *Soit $\mathcal{R}$ satisfaisant aux conditions ci-dessus. On a une équivalence d'homotopie*

$$\Sigma(c\mathcal{R}/\mathcal{S}ing)/V_n \simeq \vee_1^{d(\mathcal{R})} S^{n+1} \bigvee \Sigma C$$

avec C n-connexe, $d(\mathcal{R})$ un entier et la suspension homologique induite par l'évaluation

$$\Sigma^n\Omega^n C \to C$$

est surjective.

On peut encore préciser dans le cas de la représentation régulière réduite $\widetilde{\mathcal{R}eg}$.

Proposition 1.6. *Pour tout $d \geq 1$*

$$\Sigma(c\widetilde{\mathcal{R}eg}^{\oplus d}/\mathcal{S}ing)/V_n \simeq (\Sigma^3 T) \vee \Sigma X_d$$

où T est $\mathrm{GL}(V_n)$-homotopiquement équivalent à l'immeuble de Tits, X_d n-connexe et la suspension homologique induite par l'évaluation

$$\Sigma^n \Omega^n X_d \to X_d$$

est surjective.

Cela résoud une question soulevée dans [Ngu22] :

Theorem 1.7. *Soit $e_n \in \mathbb{F}_2[\mathrm{GL}(V_n)]$ l'idempotent de Steinberg et $T(k)$ le k-ème spectre de Brown-Gitler ([GLM92]). On a une équivalence d'homotopie de spectres :*

$$\Sigma^{-n} e_n.(c\widetilde{\mathcal{R}eg}^{\oplus 2}/Sing)/V_n \simeq \bigvee_{i=0}^{n} T(2^i - 1)$$

La démonstration de 1.3 est une application directe de résultats de [BLSZ23] et [HK80]. Enfin il pourra être intérassant de comparer à [NS11] qui est très proche de cette note au moins pour ce qui concerne la section 5 et qui en est, pour part, une motivation.

Les auteurs remercient le VIASM, l'IRL FMVF du CNRS, l'ICISE et l'Universit de Quy Nhon qui ont permis par leur soutien qu'ils se rencontrent et mènent ce travail # a son terme.

2 La suspension homologique

Cette section démontre le théorème 1.3:

Theorem 2.1. *Soit X un V_n-espace fini dont la cohomologie équivariante $H^*_{V_n}(X)$ est un H^*V_n-module libre alors la suspension homologique*

$$H_*(\Sigma^{n-1}\Omega^{n-1}((X/\mathcal{S}ing/V_n)) \to H_*(X/\mathcal{S}ing)/V_n$$

est surjective.

La démonstration de ce théorème est une conséquence directe de la proposition 1.6 de Hunter-Kuhn [HK80] et de [BLSZ23].

L'idée de démonstration du théorème 1.3 est très simple, cela en est embarassant : les complexes de [BLSZ23] fournissent les applications nécessaires à l'application du résultat de Hunter-Kuhn. On énonce cette proposition remarquable, en la rebaptisant théorème, les espaces et spectres sont supposés de type fini pour l'homologie et 2-complets :

Theorem 2.2. *Soient X un espace n-connexe, Z un espace. Supposons qu'il existe une application $X \to \Sigma^n Z$ injective en homologie. Alors l'application d'évaluation $\Sigma^n\Omega^n X \to X$ est surjective en homologie.*

Soient X un spectre 0-connexe, Z un espace. Supposons qu'il existe une application $X \to \Sigma^\infty Z$ injective en homologie. Alors l'application d'évaluation $\Sigma^\infty\Omega^\infty X \to X$ est surjective en homologie.

Hunter et Kuhn en donnent deux démonstrations, l'une basée sur la suite spectrale d'Eilenberg-Moore, l'autre sur une de Greg Arone.

Rappelons le complexe topologique (ou complexe de Atiyah-Bredon) de [BLSZ23]. Celui ci étant exprimé à l'aide de la cohomologie à supports compacts on rappelle le résultat classique suivant qui permet de faire le lien (voir [BLSZ23] scholie 4.3) :

Proposition 2.3. *Soit M une variété à bord ∂M, M compacte (et donc ∂M). Alors on a un isomorphisme naturel :*

$$H_c^*(M \setminus \partial M) \cong H^*(M, \partial M) \cong \tilde{H}^*(M/\partial M).$$

Soit p un entier avec $-1 \leq p \leq n := \dim V$; on définit une filtration croissante de X par

$$F_p X := \bigcup_{\operatorname{codim} W \leq p} X^W,$$

$$\emptyset = F_{-1}X \subset F_0 X = X^V \subset \ldots \subset \ldots \subset F_{n-1}X = \mathcal{S}ing \subset F_n X = X.$$

Le complexe de cochaînes $\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top}} X$:

$$\mathrm{C}^0_{\mathrm{top}} X \to \mathrm{C}^1_{\mathrm{top}} X \to \ldots \to \mathrm{C}^p_{\mathrm{top}} X \to \ldots \to \mathrm{C}^n_{\mathrm{top}} X \to 0 \to \ldots$$

est défini par :

$$\mathrm{C}^p_{\mathrm{top}} X \ := \ \Sigma^{-p} H_V^*(F_p X, F_{p-1} X) \ .$$

Le cobord est le connectant de la triade $(F_{p+1}X, F_p X, F_{p-1}X)$. Ce complexe est muni d'une coaugmentation naturelle $H_V^*(X) =: \mathrm{C}^{-1}_{\mathrm{top}} X \to \mathrm{C}^0_{\mathrm{top}} X$. Le complexe coaugmenté est noté $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}} X$. Le théorème 0.1 de [BLSZ23] est le suivant :

Theorem 2.4. *Soit un V-CW-complexe fini. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Le H^*V-module $H_V^* X$ est libre.

(ii) Le complexe coaugmenté $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_{\mathrm{top}} X$ est acyclique.

Il suit alors du théorème 0.2 et de la proposition 0.3 de [BLSZ23] que :

Theorem 2.5. *Sous l'une des hypoythèses précédentes les modules sur l'algèbre de Steenrod $\mathrm{C}^p_{\mathrm{top}} X := \Sigma^{-p} H_V^*(F_p X, F_{p-1} X)$ sont instables.*

Pour des références sur les modules instables on renvoie à [Sch94].

Le connectant du complexe topologique est induit par une application :

$$EV \times_V F_p X / EV \times_V F_{p-1} X \to \Sigma(EV \times_V F_{p-1} X / EV \times_V F_{p-2} X)$$

où les V-espaces $F_k X / F_{k-1} X$ ont des point-bases V-stables évidents. Il est relié au connectant :

$$F_p X / F_{p-1} X \to \Sigma(F_{p-1} X / F_{p-2} X)$$

par le diagramme commutatif suivant, où les colonnes des cofibrations à homotopie près :

$$\begin{tikzcd}
EV \times_V + \arrow[r] \arrow[d] & EV \times_V + \arrow[d] \\
EV \times_V F_pX/F_{p-1}X \arrow[r] \arrow[d] & EV \times_V \Sigma(F_{p-1}X/F_{p-2}X) \arrow[d] \\
EV \times_V F_pX/EV \times_V F_{p-1}X \arrow[r] & \Sigma(EV \times_V F_{p-1}X/EV \times_V F_{p-2}X).
\end{tikzcd}$$

De plus on a un homéomorphisme :

$$F_kX/F_{k-1}X \simeq \bigvee_{\mathrm{codim} W = k} X^W/Sing$$

Dans le complexe topologique la flèche terminale (à droite) du complexe est donc induite par une application :

$$EV \times_V X/\mathcal{S}ing \to \bigvee_{\mathrm{codim} W = n-1} EV \times_V \Sigma(X^W/Sing)$$

en écrasant en un point de chaque côté le facteur BV correspondant au point base. Donc à homotopie près on a une application:

$$(X/\mathcal{S}ing)/V \to \bigvee_{\mathrm{codim} W = n-1} \Sigma(B\mathbb{Z}/2 \times X^W/\mathcal{S}ing)/(V/W) \tag{1}$$

qui est surjective en cohomologie sous l'hypothèse que le H^*V-module $\mathrm{H}^*_V X$ est libre.

Les propositions 1.1 et 4.11 de [BLSZ23] montrent que si $H^*_V X$ est libre comme H^*V-module, alors $H^*_{V/W} X^W$ est libre comme H^*V/W-module. Donc on peut composer sur chaque facteur du bouquet ci dessus (à droite) par l'application obtenue en substituant, sur le facteur indexé par W, V/W à V et X^W à X on obtient une application :

$$(X/\mathcal{S}ing)/V \to \bigvee_{W_1 \subset W_2, \mathrm{codim} W_2 = n-2,\ \ codim W_1 = n-1} \Sigma^2(B(\mathbb{Z}/2)^2 \times X^{W_2}/\mathcal{S}ing)/(V/W_2) \tag{2}$$

qui est encore surjective en cohomologie. En itérant on obtient :

Lemma 2.6. *Si la cohomologie équivariante de X est H^*V-libre il existe une application*

$$(X/\mathcal{S}ing)/V \to \bigvee_D \Sigma^n(BV \times X^V+)$$

vers le bouquet indexé par les drapeaux $D = \{(0 \subsetneq W_1 \subsetneq W_2 \subsetneq \ldots \subsetneq W_n = V)\}$ qui est surjective en cohomologie, donc injective en homologie.

Ainsi qu'on l'a dit plus haut à chaque étape les conditions de liberté requises sont satisfaites de par la proposition (4.11) de [BLSZ23].

Notons enfin que l'espace singulier étant dans le dernier pas de l'itération est vide, ce qui explique l'apparition du point adjoint $+$.

On est dans les conditions d'application de la proposition 1.6 de [HK80], sauf que $(X/\mathcal{S}ing)/V$ est seulement $(n-1)$-connexe. Ceci donne donc 1.3.

Par contre l'application ainsi construite permettra d'appliquer directement le théorème 1.1 de [HK80]. Ceci sera précisé en section 5.

3 Filtrations stables de BV_n

Dans cette section on étudie le cas particulier où le complexe fini sur lequel agit V_n est le compactifié $c\mathcal{R}$ d'une représentation $\mathcal{R}$. On démontre d'abord le théorème 1.5 :

Theorem 3.1. *Soit $\mathcal{R}$ une représentation de V_n telle que $\mathcal{R}^{V_n} = 0$. On a une équivalence d'homotopie*

$$\Sigma(c\mathcal{R}/\mathcal{S}ing)/V_n \simeq \vee_1^{d(\mathcal{R})} S^{n+1} \bigvee \Sigma C$$

avec C n-connexe, $d(\mathcal{R})$ un entier et la suspension homologique

$$H^*(\Sigma^n \Omega^n C) \to H^*(C)$$

est surjective.

On n'a pas supposé dans l'énoncé que $Sing$ est non réduit à 0 et non égal à $\mathcal{R}$ tout entier. Dans ces deux cas l'énoncé est juste, mais trivial.

Dans la suite de cette section V_n sera abrégé en V.

On note $c\mathcal{R}^k$ le compactifié de la représentation $\mathcal{R}^{\oplus k}$. On a un système inductif

$$c\mathcal{R}/Sing \hookrightarrow c\mathcal{R}^2/Sing \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow c\mathcal{R}^k/Sing \hookrightarrow \ldots$$

dont le télescope sera noté $c\mathcal{R}^\infty/Sing$. On a également le sytème obtenu par quotient :

$$(c\mathcal{R}/Sing)/V \hookrightarrow (c\mathcal{R}^2/Sing)/V \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow (c\mathcal{R}^k/Sing)/V \hookrightarrow \ldots$$

et le téléscope $(c\mathcal{R}^\infty/Sing)/V$.

Lemma 3.2. *Si $\mathcal{R}^V = 0$, pour tout k l'application induite en cohomologie par $(c\mathcal{R}^k/Sing)/V \hookrightarrow (c\mathcal{R}^{k+1}/Sing)/V$ est surjective, c'est un isomorphisme en degré n.*

Ce lemme est déjà démontré dans [BLSZ23] Proposition 7.39 dans le cas de la représentation régulière réduite. Dans le cas général on la démontre par récurrence sur la dimension de V.

On rappelle d'abord l'isomorphisme ([BLSZ23]) :

$$\mathrm{C}^n_{\mathrm{top}}(c\mathcal{R}^k) \cong \Sigma^{-n}\tilde{H}^*((c\mathcal{R}^k/Sing)/V)$$

Puis on observe que si $\mathcal{R}^V = 0$, alors $(\mathcal{R}^W)^{V/W} = 0$. De plus, pour tout n, l'ensemble des points fixes de l'action de V sur $c\mathcal{R}^n$ est réduit à 0 et au point à l'infini.

L'inclusion $\mathcal{R}^{\oplus k} \hookrightarrow \mathcal{R}^{\oplus k+1}$ induit un morphisme de complexes :

$$\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top}}(c\mathcal{R}^{k+1}/Sing) \to \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top}}(c\mathcal{R}^k/Sing)$$

Un argument de récurrence sur $\dim(V)$ donne alors le résultat.

En dimension 1 on voit à la main que l'application est injective au niveau du terme $\mathrm{C}^0_{\mathrm{top}}$, au niveau du terme $\mathrm{C}^1_{\mathrm{top}}$ l'application est surjecive et est l'identité en degré 0.

Le résultat suit de l'hypothèse de récurrence en tenant compte des désuspensions et évidemment de la comparaison des complexes topologiques pour k et $k+1$.

Proposition 3.3. *Soit $\mathcal{R}$ une représentation telle que $\mathcal{R}^V = 0$. Le télescope $c(\mathcal{R}^\infty/Sing)/V$ est homotopiquement équivalent à un bouquet de n-suspensions de $BV+$.*

On considère les complexes $\mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{top}}(c\mathcal{R}^k/Sing)$ et on passe à la limite sur k. Le complexe obtenu demeure exact, les conditions de Mittag-Lefler étant satisfaites. On peut supposer par hypothèse de récurrence que tous les termes, sauf le dernier, sont des sommes directes de copies de H^*V. Il en est donc de même du dernier [LS89]. Il suit que comme module instable, $H^*((c\mathcal{R}^\infty/Sing)/V)$ est somme directe de copies de $\Sigma^n H^*V$. L'identification homotopique résulte alors des arguments de la section 2 sur le connectant du complexe.

Ce résultat donne une application

$$(c\mathcal{R}^\infty/Sing)/V \to \vee_1^{d(\mathcal{R})} S^n$$

qui induit un isomorphisme en cohomologie en dimension n pour un certain entier $d(\mathcal{R})$ et donc, pour $k \geq 1$ quelconque une application :

$$(c\mathcal{R}^k/Sing)/V \to \bigvee_1^{d(\mathcal{R})} S^n$$

qui a la même propriété. Cette application permet de scinder le n-squelette après suspension, en notant X_k le quotient de l'espace par le n-squelette on a :

Corollary 3.4. *Sous l'hypothèse ci dessus sur $\mathcal{R}$:*

$$\Sigma(c\mathcal{R}^k/Sing)/V \simeq \vee_1^{d(\mathcal{R})} S^{n+1} \bigvee \Sigma X_k$$

avec X_k n-connexe.

4 L'immeuble de Tits

Cette section précise 4.3 dans le cas de la représentation régulière réduite $\widetilde{\mathcal{R}eg}$ et démontre la proposition 1.6.

Proposition 4.1. *Dans le cas où $\mathcal{R}$ est la représentation régulière réduite $\widetilde{\mathcal{R}eg}$ on a :*

$$\Sigma(c\widetilde{\mathcal{R}eg}^k/Sing)/V \simeq \Sigma^3 T \vee \Sigma X_k$$

où T est $\mathrm{GL}(V_n)$-homotopiquement à l'immeuble de Tits et X_d n-connexe.

On montre d'abord un lemme.

Soit le sous-ensemble des vecteurs non nuls de V_n, on indexe les sommets du simplexe Δ^{2^n-1} par ces vecteurs. Soit Γ_n le sous-complexe constitué par les faces indexées par les sytèmes de vecteurs qui n'engendrent pas V_n, Γ_n est un $\mathrm{GL}(V_n)$-espace.

Lemma 4.2. *Le $\mathrm{GL}(V_n)$-espace Γ_n est $\mathrm{GL}(V_n)$-homotopiquement équivalent à l'immeuble de Tits de V_n.*

Ce lemme est classique, on le trouve dans des notes de Jean Lannes par exemple. En l'absence de référence certaine on en donne une démonstration.

Soit $\mathcal{S}_n$ la catégorie dont les objets sont les sous-ensembles de vecteurs non nul de V_n qui n'engendrent pas V_n, les morphismes l'inclusion. La réalisation géométrique du nerf, $N(\mathcal{S}_n)$, de $\mathcal{S}_n$ est la subdivision barycentrique de Γ_n.

Soit $\mathcal{W}_n$ la catégorie des sous-espaces W non-triviaux de V_n ($0 \neq W \neq V_n$).

Soit le foncteur $\mathcal{G}en : \mathcal{S}_n \to \Gamma_n$ qui envoie un sytème de vecteurs vers le sous-espace qu'il engendre. Il vérifie les conditions d'application du Théorème A de Quillen [Qui72]. En effet chaque sous-catégorie $W \setminus \mathcal{G}en$ a pour objet terminal, l'ensemble des vecteurs non nul de W. Le résultat suit.

Rappelons le joint de $X_1, \ldots, X_t$

$$\mathbb{J}(\underline{X}) = \bigstar_{1 \leq i \leq t} X_i$$

qui est le quotient de :

$$X_1 \times \ldots \times X_t \times \Delta^{t-1}$$

où Δ^{t-1} est le $(t-1)$-simplexe standard, par la relation d'équivalence engendrée par les relations suivantes, pour tout i (où ci dessous le 0 est en position i) pour tous les x_j, x_i, x_i', a_j,... :

$$(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_t; a_1, \ldots, 0, \ldots a_t) \sim (x_1, \ldots, x_i', \ldots x_t; a_1, \ldots, 0, \ldots a_t)$$

Si chacun des X_i est un point le joint n'est autre que Δ^{t-1}. Si de plus chacun des X_i est un G-espace, G un groupe, l'application induite par les projections sur un point :

$$\mathbb{J} = \bigstar_{1 \leq i \leq t} X_i \to \Delta^{t-1}$$

est équivariante et passe au quotient et, l'action sur Δ^{t-1} étant triviale, donne

$$\mathbb{J}/G \to \Delta^{t-1}$$

Si de plus on choisit pour chaque X_i un point base on récupère une application qui n'est pas équivariante :

$$\Delta^{t-1} \to \mathbb{J}$$

mais par composition :

$$\Delta^{t-1} \to \mathbb{J} \to \mathbb{J}/G$$

La composée

$$\Delta^{t-1} \to \mathbb{J} \to \mathbb{J}/G \to \Delta^{t-1} \tag{3}$$

est l'identité.

Explicitons dans le cas de $c\mathcal{R}eg^k$, on abrègera $c\mathcal{R}eg^k$ en $c\mathcal{R}$ dans ce qui suit (sauf dans le lemme). Les $2^n - 1$ représentations non triviales (de dimension 1) de V_n sont notées ρ_i, $1 \leq i \leq 2^n - 1$, $\mathcal{R}$ s'écrit

$$\mathcal{R} \cong \oplus_i \rho_i^k.$$

On notera E_i pour $\rho_i^{\oplus k}$. On a un isomorphisme de V_n-espaces

$$S(\mathcal{R}) \cong \bigstar_{1 \leq i \leq 2^n - 1} S(E_i)$$

où $S(E_i)$ désigne la sphère unité de E_i.

Dans ce cas si on considère les applications considérées ci-dessus (en (3)) on constate que Γ_n prend valeurs dans $\mathcal{S}ing$ qui lui s'envoie sur Γ_n. L'action de V_n sur Γ_n étant triviale on obtient le :

Lemma 4.3. *On a un diagramme commutatif à homotopie près, dont les colonnes sont de cofibrations :*

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}ing/V_n \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_n \arrow[d] \\
\Delta^{2^n-2} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{c\mathcal{R}eg}^k/V_n \arrow[r] \arrow[d] & \Delta^{2^n-2} \arrow[d] \\
\Sigma(\Gamma_n) \arrow[r] & (\widetilde{c\mathcal{R}eg}^k/\mathcal{S}ing)/V_n \arrow[r] & \Sigma(\Gamma_n)
\end{tikzcd}$$

Les carrés supérieurs commutent exactement. Ceux du bas aussi en remplaçant les quotients de la ligne inférieure par des cônes. Les composées horizontales supérieures et inférieures sont l'identité et $\mathrm{GL}(V_n)$ *équivariante.*

La proposition 4.1 suit. Ceci donne une autre indication vers la conjecture 1.4. On peut en ajouter une autre. Il est clair que $(c\mathcal{R}/\mathcal{S}ing)/V_n$ est une suspension, il paraît raisonnable de montrer géométriquement que dans la cohomologie de $\Sigma^{-1}(c\mathcal{R}/\mathcal{S}ing)/V_n$ tous les cup-produits non triviaux sont nuls.

5 Les spectres de Brown-Gitler

Ce qui précède permet de démontrer la conjecture énoncée dans [Ngu22]. Il faut faire attention à la terminologie "spectres de Brown-Gitler" qui selon les sources désigne le spectre ou son dual de Spanier-Whitehead. On suit ici la convention de [GLM92] et de [HK80] -voir en particulier le commentaire au dessus de 0.4 dans [GLM92]- la proposition 2.3 permet de faire le lien. Avec [GLM92] et [HK80] on appelle spectre Brown-Gitler un spectre $T(k)$ 2-complet dont la cohomologie est isomorphe au module instable $J(k)$ et qui vérifie l'une des hypothèses du théorème 1.1 de [HK80] dont on extrait ce qu'il nous faut ci dessous. On rappelle d'abord qu'un spectre X à la propriété de Brown-Gitler si pour tous les spectres Z, rétracte du spectre en suspension d'un espace, l'application naturelle

$$[X, Z] \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(H^*Z, H^*X)$$

est surjective. Ici $\mathscr{A}$ est l'algèbre de Steenrod modulo (2).

Theorem 5.1. *Soit X un spectre dont la cohomologie est injective dans la catgorie $\mathscr{U}$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Il existe un spectre Y dont la cohomologie est un module instable injectif réduit et une application $f : X \to Y$ surjective en cohomologie.

(ii) X satisfait la propriété de Brown-Gitler.

Le spectre que l'on va décrire arrive d'emblée avec une application satisfaisant aux propriétés de la première condition ainsi qu'il est dit en fin de la section 3.

Il faut montrer que sa cohomologie est celle attendue. Cela est fait dans [Ngu22], revenons dessus. Comme plus haut on crit V pour $V_n = (\mathbb{Z}/2)^n$ dans ce qui suit. Le groupe linéaire $\mathrm{GL}(V)$ agit sur le quotient $(\widetilde{c\mathcal{R}eg}^2/Sing)/V$. On peut, et après suspension, appliquer l'idempotent de Steinberg et décomposer l'espace en bouquet de deux espaces. En fait dans ce cas il n'est pas nécessaire de suspendre car $(c\widetilde{\mathcal{R}eg}^2/Sing)/V$ est déjà une suspension compatible à l'action de $\mathrm{GL}(V)$.

Theorem 5.2. *Soit e_n l'idempotent de Steinberg de $\mathbb{F}_2[\mathrm{GL}(V)]$. Le spectre*

$$\Sigma^{-n}e_n.(c\widetilde{\mathcal{R}eg}^2/Sing)/V$$

est homotopiquement équivalent au bouquet $\bigvee_{i=0}^n T(2^i-1)$.

Le lemme 2.6 dit exactement que l'on peut appliquer le théorème 5.1 en utilisant les résultats de [Ngu22].

On rappelle en quelques lignes pourquoi le spectre en question a la bonne cohomologie. Étant donné un $\mathscr{A}$-module M, on rappelle que le dual de Spanier-Whitehead $\mathbb{D}M$ est défini par

$$\begin{cases}(\mathbb{D}M)^{-n} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(M^n, \mathbb{Z}/2), & n \in \mathbb{Z},\\ \theta(f) = f \circ (\chi(\theta)), & f \in \mathrm{D}M, \theta \in \mathscr{A},\end{cases}$$

χ étant l'antipode de $\mathscr{A}$. On a des isomorphismes

$$\begin{aligned}\tilde{H}^*((c\widetilde{\mathcal{R}eg}^2/Sing)/V) &\cong H^*_c((\widetilde{\mathcal{R}eg}^2 \setminus Sing)/V)\\ &\cong \Sigma^{2(2^n-1)}\mathbb{D}H^*((\widetilde{\mathcal{R}eg}^2 \setminus Sing)/V).\end{aligned}$$

Le premier isomorphisme est bien $\mathscr{A}$-linéaire et on va expliquer la $\mathscr{A}$-linéarité du second qui est donné par la dualité de Poincaré.

Pour déterminer $H^*((\widetilde{\mathcal{R}eg}^2 \setminus Sing)/V)$, on note V^* le dual linéaire de V et on identifie la représentation régulière réduite $\widetilde{\mathcal{R}eg}$ à l'espace vectoriel $\mathbb{R}[V^* \setminus 0]$ muni de l'action de V donnée par

$$v[\alpha] = (-1)^{\alpha(v)}[\alpha], \quad v \in V, \alpha \in V^*.$$

Avec cette identification, on vérifie que l'espace $(\widetilde{\mathcal{R}eg}^2 \setminus Sing)/V$ est de la forme $\mathcal{Z}_K(\mathbb{R}, \mathbb{R}^*)/V$ où K est le complexe simplicial $\Delta(V^*, 2)$ défini dans [Ngu22], Definition 5, et $\mathcal{Z}_K$ le produit polyhédral [?]. La cohomologie modulo 2 de $\mathcal{Z}_K(\mathbb{R}, \mathbb{R}^*)/V$ dans le cas où K est Cohen-Macaulay a été calculée dans [?]. Dans notre cas, celle-ci est isomorphe à l'anneau quotient fini $\mathbf{R}(V^*, 2)$ de H^*V étudié dans [Ngu22]. On y a déjà montré que le facteur de $\mathbf{R}(V^*, 2)$ associé à la représentation de Steinberg est isomorphe à la somme directe

$$\bigoplus_{i=0}^{n} \Sigma^{2(2^n-1)-n-(2^i-1)} B(2^i-1)$$

où les modules de Brown-Gitler $B(k)$ et $J(k)$ sont liés par $\Sigma^k\mathbb{D}B(k) \cong J(k)$.

Pour finir, on explique la $\mathscr{A}$-linéarité de la dualité de Poincaré

$$H^*_c((\widetilde{\mathcal{R}eg}^2 \setminus Sing)/V) \cong \Sigma^{2(2^n-1)}\mathbb{D}H^*((\widetilde{\mathcal{R}eg}^2 \setminus Sing)/V).$$

Pour cela, soit X une variété sans bord de dimension d (pas nécessairement compact, voir par exemple [Hat02], Chapter 3). La dualité de Poincaré est donnée par

$$\mathrm{D} : H^{d-i}_c X \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(H^i X, \mathbb{F}_2), \qquad \mathrm{D}(x)(y) = x \cup y \in H^d_c(X) \cong \mathbb{F}_2.$$

Pout tout $x \in H_c^{d-i}(X)$, on a $\mathrm{Sq}^i(x) = x \cup v_i(\tau_X)$ où $v_i(\tau_X)$ est la i-ème classe de Wu du fibré tangent, τ_X, de X ([MS74]). On observe que la dualité de Poincaré D est $\mathscr{A}$-linéaire si $v_i(\tau_X) = 0$ pour tout $i > 0$. En effet, pour tout $u \in H_c^{d-t-m}(X)$ et tout $v \in H^t(X)$, on a

$$\mathrm{Sq}^m(u) \cup v + \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Sq}^i(u \cup (\chi \mathrm{Sq}^{m-i} v)) + u \cup \chi \mathrm{Sq}^m(v) = 0$$

Donc si les classes de Wu de τ_X sont triviales le terme au milieu s'annule ce qui implique que

$$\mathrm{Sq}^m(u) \cup v = u \cup \chi \mathrm{Sq}^m(v).$$

Il suit que D envoie $\mathrm{Sq}^m(u)$ sur la fonction

$$v \mapsto \mathrm{Sq}^m(u) \cup v = u \cup \chi \mathrm{Sq}^m(v),$$

et $\mathrm{Sq}^m(\mathrm{D}(u))$ est la fonction composée $v \mapsto \chi \mathrm{Sq}^m(v) \mapsto u \cup \chi \mathrm{Sq}^m(v)$. Ceci montre que D commute avec Sq^m.

On revient à notre cas où $X = (\widetilde{\mathcal{R}eg}^2 \backslash Sing)/V$ est une variété de dimension $d = 2(2^n - 1)$. Par instabilité, si $i > \frac{d}{2} = 2^n - 1$ et $x \in H_c^{d-i}(X)$, alors $\mathrm{Sq}^i(x) = x \cup v_i(\tau_X) = 0$, ce qui implique que $v_i(\tau_X) = 0$ car la forme bilinéaire $H_c^{d-i}X \times H^i X \to H_c^d X \cong \mathbb{F}_2$ est non-dégénérée.

Le fibré tangent τ_X est le "pullback" du fibré $\mathrm{E}V \times_V \widetilde{\mathcal{R}eg}^2 \xrightarrow{\rho_2} \mathrm{B}V$ induit par une application $f : X \to \mathrm{B}V$. La classe totale de Stiefel-Whitney de ρ_2 est donnée par

$$w(\rho_2) = \prod_{0 \neq \alpha \in V^*} (1+\alpha)^2 = (1 + Q_{n,0} + \cdots + Q_{n,n-1})^2,$$

où $|Q_{n,i}| = 2^n - 2^i$ et $\mathbb{F}_2[Q_{n,0}, \ldots, Q_{n,n-1}] \cong H^* V^{\mathrm{GL}_n}$ est l'algèbre d'invariants de Dickson. Donc $w_i(\rho_2)$ est trivial si $0 < i \leq 2^n - 1$. Par naturalité, $w_i(\tau_X) = 0$ si $0 < i \leq 2^n - 1$. Utilisant la formule $v(\tau_X) = \chi \mathrm{Sq}(w(\tau_X))$, on voit que $v_i(\tau_X) = 0$ si $0 < i \leq 2^n - 1$. Donc $v_i(\tau_X) = 0$ pour tout $i > 0$.

References

[BLSZ23] Dorra Bourguiba, Jean Lannes, Lionel Schwartz, and Saïd Zarati. Complexes de modules équivariants sur l'algèbre de Steenrod associé à un $(\mathbb{Z}/2)^n$-CW-complexe fini. *Mémoire SMF*, 2023.

[GLM92] Paul Goerss, Jean Lannes, and Fabien Morel. Vecteurs de Witt non commutatifs et représentabilité de l'homologie modulo p. Invent. Math., 108(1), Pages=163–227, 1992.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[HK80] David J. Hunter and Nicholas J. Kuhn. Characterizations of spectra with $\mathcal{U}$-injective cohomology which satisfy the Brown-Gitler property. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 111(1):95–143, 1980.

[LS89] Jean Lannes and Lionel Schwartz. Sur la structure des A-modules instables injectifs. *Topology*, 28(2):153–169, 1989.

[MS74] John W. Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic classes*, volume No. 76 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974.

[Ngu22] Dang Ho Hai Nguyen. Stanley-Reisner rings and the occurrence of the Steinberg representation in the hit problem. *Comptes Rendus Mathmatique*, 2022.

[NS11] Dang Ho Hai Nguyen and Lionel Schwartz. Realizing a complex of unstable modules. *Proc. Japan Acad. Ser A*, 87(5):83–87, 2011.

[Qui72] Daniel Quillen. Higher algebraic -K–theory : I. Number 341, pages 77–139. Springer, 1972. Proceedings of the conference on Algebraic K-theory held at Seattle Research Center of Battelle Memorial Institute, August 28 - September 8, 1972,.

[Sch94] Lionel Schwartz. *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1994.

Nguyen Dang Ho Hai,
College of Sciences, Hue University,
77 Nguyen Hue, Hue city, VIETNAM
Email: nguyendanghohai@husc.edu.vn

Lionel Schwartz,
LAGA, UMR 7539 du CNRS, Université Sorbonne Paris Nord,
99 Av. J-B Clément, 93430 Villetaneuse, FRANCE
IRL FVMA du CNRS.
Email: schwartz@math.univ-paris13.fr